Variabel Random

Definisi :

- Variabel = variatif + able = dapat bervariasi
- Random = acak, tidak beraturan, tidak diketahui
- Variabel yg nilainya merupakan suatu bilangan yg ditentukan oleh **terjadinya** hasil suatu percobaan
- Or, *Outcomes of an experiment expressed numerically*

Variabel Random

Terdiri :

- V.R. diskrit/discrete :

  dinyatakan dg nilai-nilai atau harga-harga yg terbatas jumlahnya, atau dinyatakan dg bilangan bulat → {-2, -1, 0, 1, 2}
- V.R. kontinu/continous :

  dinyatakan dg sembarang nilai atau harga-harga yg terdapat dalam suatu interval atau kelompok interval tertentu, atau dinyatakan dg bilangan pecahan → $\{-2 \leq x \leq 2\}$

Variabel Random DISKRIT

Mis. :

- Histogram distribusi frekuensi relatif dari hasil pengukuran/observasi variabel random X yg DISKRIT dalam suatu percobaan sebanyak 100 kali, yg juga merup. DISTRIBUSI EMPIRIS
- Apa bedanya percobaan 100 dg 1000 kali ?
  - Bila n=100 → ukuran histogram renggang
  - Bila n=1000 → ukuran histogram lebih rapat
  - Bila n= ~ → mendekati kurva kontinu → distribusi teoritis

DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTION

Dr. Mendoza developed a test to measure boredom tolerance. He administered it to a group of 20,000 adults between the ages of 25 and 35. The possible scores were 0, 1, 2, 3, 4, 5, and 6, with 6 indicating the highest tolerance for boredom. The test results for this group are shown in Table 5-1.

TABLE 5-1 Boredom Tolerance Test Scores for 20,000 Subjects

Score	Number of Subjects
0	1400
1	2600
2	3600
3	6000
4	4400
5	1600
6	400

TABLE 5-2 Probability Distribution of Scores on Boredom Tolerance Test

Score x	Probability $P(x)$
0	0.07
1	0.13
2	0.18
3	0.30
4	0.22
5	0.08
6	0.02
	$\Sigma P(x) = 1$

boredom = *boring* = bosan = jenuh

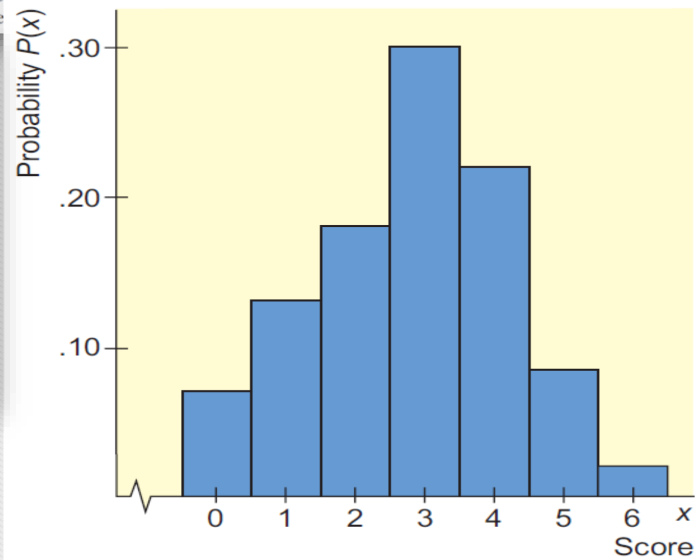
DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTION

Dr. Mendoza developed a test to measure boredo
to a group of 20,000 adults between the ages of
were 0, 1, 2, 3, 4, 5, and 6, with 6 indicating the
The test results for this group are shown in Table

TABLE 5-2 **Probability Distribution of Scores on Boredom Tolerance Test**

Score x	Probability $P(x)$
0	0.07
1	0.13
2	0.18
3	0.30
4	0.22
5	0.08
6	0.02
	$\Sigma P(x) = 1$

Graph of the Probability Distribution of Test Scores

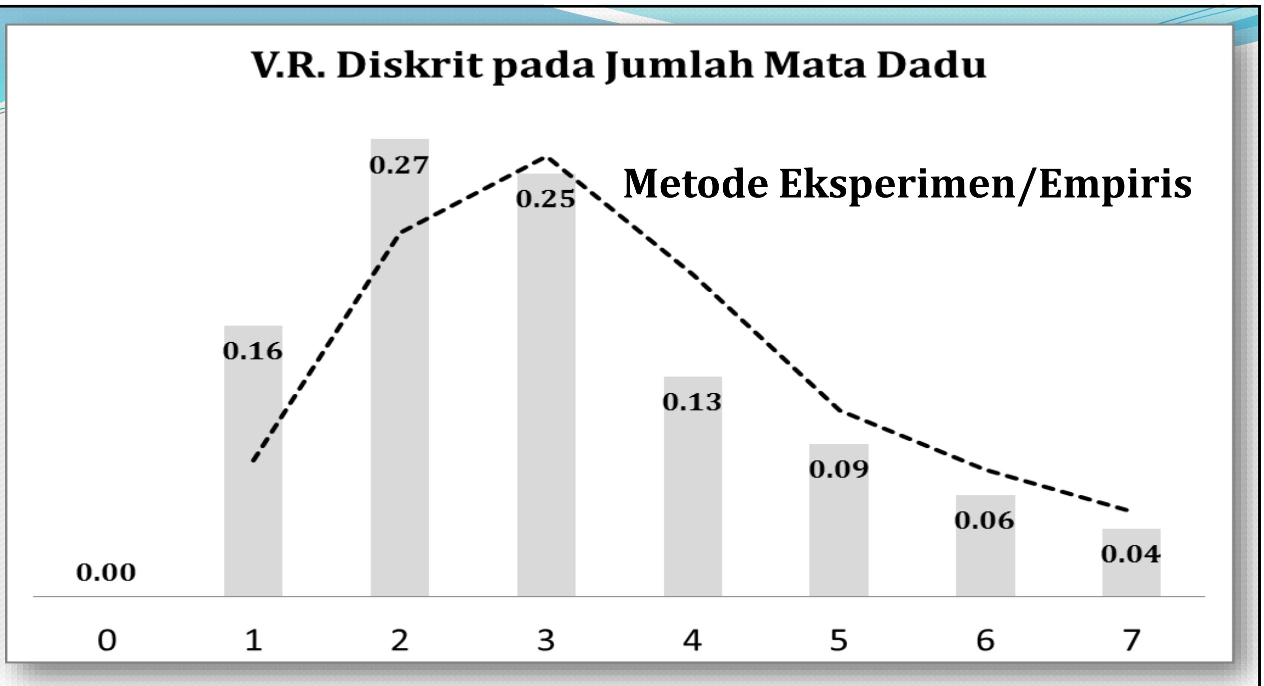


Variabel Random DISKRIT

Contoh :

- Distribusi frekuensi timbulnya JUMLAH MATA DADU sebagai hasil percobaan sebanyak 100 kali → EKSPERIMEN
- Bagaimana bila dibandingkan dg frekuensi relatif TEORITIS → kalau yg TEORITIS dirumuskan dari RUANG SAMPEL yg memenuhi.

Jumlah Mata Dadu	Frekuensi Kejadian	Frekuensi Relatif
2	4	0.04
3	3	0.03
4	7	0.07
5	7	0.07
6	15	0.15
7	19	0.19
8	17	0.17
9	8	0.08
10	13	0.13
11	4	0.04
12	3	0.03
Jumlah	100	1.00



Haryoso Wicaksono, S.Si., M.M., M.Kom. - Pengantar Probabilitas 69

Variabel Random DISKRIT

- Meskipun histogram frekuensi relatif TEORITIS tidak sama dg yg EMPIRIS (eksperimen), tapi jika percobaan diulang sampai TAK HINGGA, maka frekuensi relatif EMPIRIS akan mendekati histogram TEORITIS-nya.
- Ada dua jenis Fungsi Probabilitas :
  - $f(x) = p(X = x)$; $f(x) \geq 0$; $\sum f(x) = 1$
  - $F(x) = p(X \leq x)$; $\lim F(x) = 1$ untuk $x \rightarrow \sim$; $\lim F(x) = 0$ untuk $x \rightarrow -\sim$ $\rightarrow$ Distribusi Kumulatif.

Haryoso Wicaksono, S.Si., M.M., M.Kom. - Pengantar Probabilitas 70

Variabel Random DISKRIT

Dari Ruang Sampel : Pelemparan 2 dadu

x , y	1	2	3	4	5	6
1	(1 , 1)	(1 , 2)	(1 , 3)	(1 , 4)	(1 , 5)	(1 , 6)
2	(2 , 1)	(2 , 2)	(2 , 3)	(2 , 4)	(2 , 5)	(2 , 6)
3	(3 , 1)	(3 , 2)	(3 , 3)	(3 , 4)	(3 , 5)	(3 , 6)
4	(4 , 1)	(4 , 2)	(4 , 3)	(4 , 4)	(4 , 5)	(4 , 6)
5	(5 , 1)	(5 , 2)	(5 , 3)	(5 , 4)	(5 , 5)	(5 , 6)
6	(6 , 1)	(6 , 2)	(6 , 3)	(6 , 4)	(6 , 5)	(6 , 6)

Ruang Sampel di atas : S = { (x,y) | $1 \le x \le 6$; $1 \le y \le 6$ }

X = Jumlah 2 dadu

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f(x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

VR Diskrit

- Jika X menyatakan variabel random yang harganya bagi sembarang unsur dalam S (ruang sampel) ialah JUMLAH mata dadu dari sepasang dadu dalam percobaan maka fungsi probabilitas f(x) adalah :
- f(x) = p(X = x) ; f(x) $\ge$ 0 ; Σ f(x) = 1.
- Dalam pengambilan keputusan, selain X = x, juga probabilitas X $\le$ x atau X $\ge$ x. Maka probabilitas untuk X $\le$ 100 atau X $\ge$ 100 dinyatakan dg :
- F(100) = p(X $\le$ 100) atau F(100) = p(X $\ge$ 100).
- F (x) = fungsi probabilitas **kumulatif**

Variabel Random DISKRIT

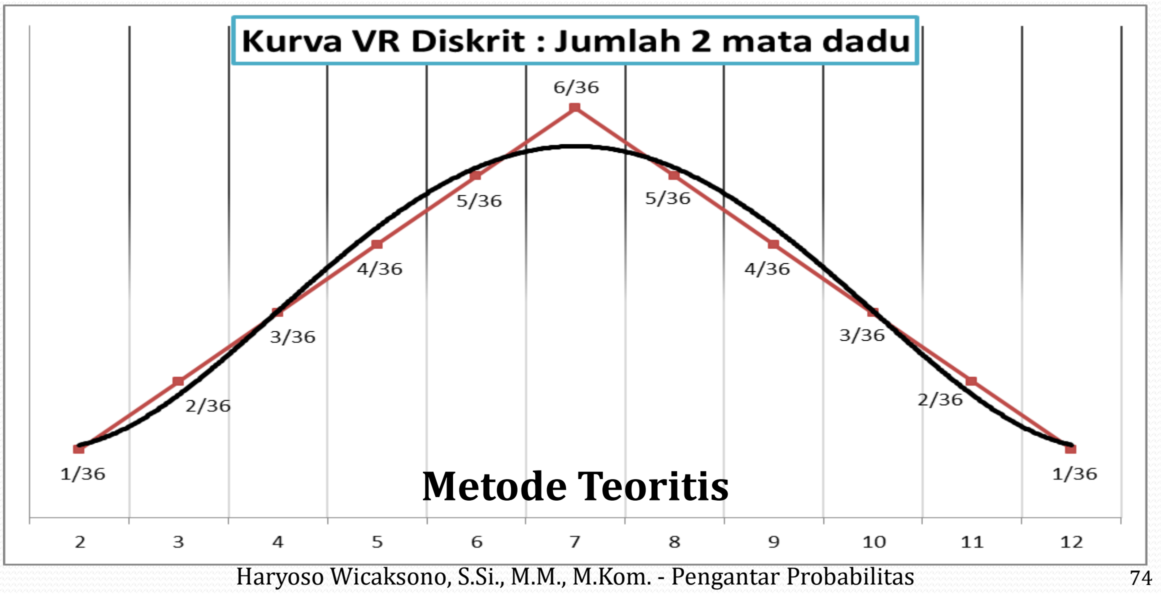
X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f(x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
F(x)	1/36	3/36	6/36	10/36	15/36	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	36/36

Tentukan : ada perbedaan antara f(x) & F(x)

- f(5) =
- f(7) =
- F(3) =
- F(6) =

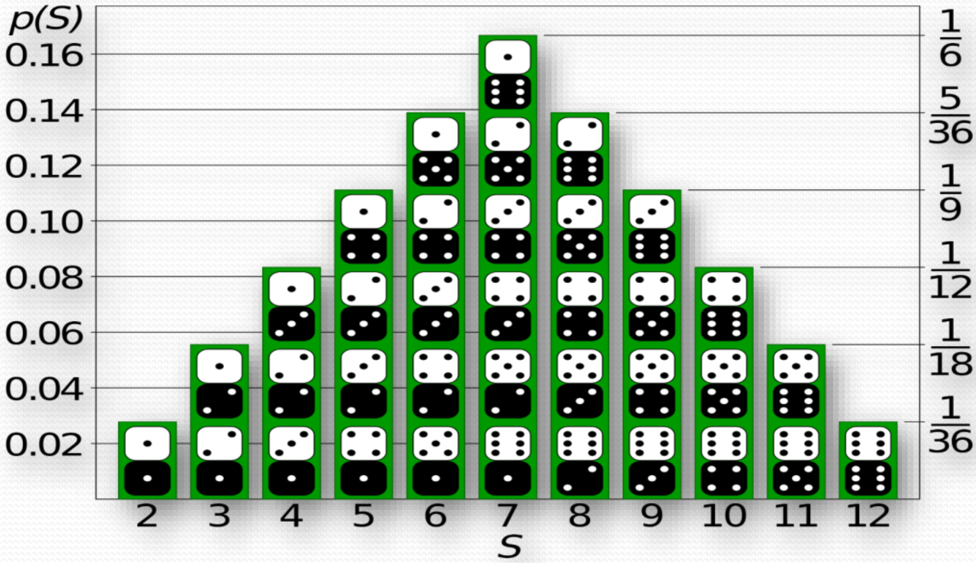
Haryoso Wicaksono, S.Si., M.M., M.Kom. - Pengantar Probabilitas 73

Variabel Random DISKRIT



Haryoso Wicaksono, S.Si., M.M., M.Kom. - Pengantar Probabilitas 74

Variabel Random DISKRIT



Mean and standard deviation of a discrete probability distribution

Rata-rata & Standart Deviasi untuk VR Diskrit

The **mean** and the **standard deviation of a discrete population probability distribution** are found by using these formulas:

$\mu = \Sigma x P(x)$; μ is called the **expected value** of x

$\sigma = \sqrt{\Sigma (x - \mu)^2 P(x)}$; σ is called the standard deviation of x

where x is the value of a random variable,
$P(x)$ is the probability of that variable, and
the sum Σ is taken for all the values of the random variable.

Note: μ is the *population mean* and σ is the underlying *population standard deviation* because the sum Σ is taken over *all* values of the random variable (i.e., the entire sample space).

MEAN OF A DISCRETE RANDOM VARIABLE

The *mean of a discrete random variable* is given by

$\mu = \Sigma x\, P(x)$ where the sum is over all values of X

STANDARD DEVIATION OF A DISCRETE RANDOM VARIABLE

The *variance of a discrete random variable* is represented by σ^2 and is defined by

$$\sigma^2 = \Sigma\,(x - \mu)^2\, P(x)$$

The variance is also represented by Var(X) and may be calculated by the alternative formula by

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \Sigma\, x^2\, P(x) - \mu^2$$

The *standard deviation of a discrete random variable* is represented by σ or sd(X) and is by

$$\sigma = \mathrm{sd}\,(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Contoh :

- Tentukan Rata-rata & Standart Deviasi untuk Jumlah Mata Dadu yg timbul sebagai hasil pelemparan sepasang dadu.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f(x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

- $Rata - rata\ \ (\mu)$:

$$\mu = \Sigma\, x_i . f(x_i) = 2.\frac{1}{36} + 3.\frac{2}{36} + 4.\frac{3}{36} + 5.\frac{4}{36} + 6.\frac{5}{36} + 7.\frac{6}{36} + 8.\frac{5}{36} + 9.\frac{4}{36} + 10.\frac{3}{36} + 11.\frac{2}{36} + 12.\frac{1}{36} = 7$$

Contoh :

- $Variansi\ (\sigma^2)$:

$$\sigma^2 = \Sigma\,(x_i - \mu)^2 . f(x_i) = (2-7)^2.\frac{1}{36} + (3-7)^2.\frac{2}{36} + (4-7)^2.\frac{3}{36} +$$
$$(5-7)^2.\frac{4}{36} + (6-7)^2.\frac{5}{36} + (7-7)^2.\frac{6}{36} + (8-7)^2.\frac{5}{36} +$$
$$(9-7)^2.\frac{4}{36} + (10-7)^2.\frac{3}{36} + (11-7)^2.\frac{2}{36} + (12-7)^2.\frac{1}{36} = 5.833$$

Maka, Standart Deviasi = σ = √ VAR = √ (5.833) = 2.415

X_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Jumlah
$f(x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1
$X_i . f(x_i)$	2/36	6/36	12/36	20/36	30/36	16/36	14/36	1	30/36	22/36	12/36	7
$(X_i - \mu)^2 . f(x_i)$	0.694	0.889	0.750	0.444	0.139	0	0.139	0.444	0.750	0.889	0.694	5.833

Contoh :

KKKK	KEKK	EKKK	EEKK
KKKE	KEKE	EKKE	EEKE
KKEK	KEEK	EKEK	EEEK
KKEE	KEEE	EKEE	EEEE

Jika 4 (empat) keping uang logam di lempar, berapakah rata-rata & standar deviasi munculnya K (kepala) ?

- Uang Logam mempunyai 2 sisi (Kepala & Ekor)
- Fungsi Probabilitas :

X_i	0	1	2	3	4	Jumlah
$f(x_i)$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16	1.00
$X_i . f(x_i)$	0	4/16	12/16	12/16	4/16	2.00
$(X_i - \mu)^2 . f(x_i)$	0.250	0.250	0	0.250	0.250	1.00

- $Rata-rata : \mu = \Sigma\, x_i . f(x_i) = 2.00$
- $Variansi : \sigma^2 = 1.00$
- Maka, Standart Deviasi = σ = √ VAR = √ (1.00) = 1.00

Harapan Matematis

- Bila peristiwa A_1, A_2, A_3, ..., A_k merupakan peristiwa independen yg lengkap terbatas, sedangkan p_1, p_2, p_3, ..., p_k merupakan probabilitas terjadinya masing-2 peristiwa di atas. Maka, andaikan seseorang memenangkan sejumlah uang U_1 bila peristiwa A_1 , uang U_2 bila peristiwa A_2 , dst. terjadi maka :
- Harapan Matematis memperoleh kemenangan A(U) :

$$A(U) = U_1.p_1 + U_2.p_2 + \ldots + U_k.p_k$$

- Diterapkan dalam pertaruhan (konsep judi) & asuransi

Harapan Matematis [contoh]

Pada permainan judi/taruhan/*games of chance* pelemparan 2 (dua) uang logam dilakukan oleh si X & Y. Si X akan menerima sejumlah uang dari Y. X akan menerima :

- Rp 1,000,- bila hasil pelemparan memperoleh 2K.
- Rp 500,- bila hasil pelemparan memperoleh 1K.
- Rp 0,- bila hasil pelemparan TIDAK memperoleh K (0K).

Berapakah yg harus dibayar oleh X kepada Y untuk setiap permainan agar taruhan dikatakan seimbang ?

Harapan Matematis [contoh]

Pada permainan judi/taruhan/*games of chance* pelemparan 2 (dua) uang logam dilakukan oleh si X & Y. Si X akan menerima sejumlah uang dari Y. X akan menerima :

- Rp 1,000,- bila hasil pelemparan memperoleh 2K.
- Rp 500,- bila hasil pelemparan memperoleh 1K.
- Rp 0,- bila hasil pelemparan TIDAK memperoleh K (0K).

Berapakah yg harus dibayar oleh X kepada Y untuk setiap permainan agar taruhan dikatakan seimbang ?

Soal di atas memiliki 3 peristiwa :

Pelemparan 2 keping Uang Logam :

KK	2K --> 1 peristiwa dari 4 peristiwa = 1/4 --> Rp 1,000,-	
KE	1K --> 1 peristiwa dari 4 peristiwa = 1/4	--> Rp 500,-
EK	1K --> 1 peristiwa dari 4 peristiwa = 1/4	
EE	0K --> 1 peristiwa dari 4 peristiwa = 1/4 --> Rp 0,- (kalah)	

Harapan Matematis [contoh]

Soal di atas memiliki 3 peristiwa :

Pelemparan 2 keping Uang Logam :

X_i	0	1	2	Jumlah
$f(x_i) = p_k$	1/4	2/4	1/4	1
U_k	0	500	1000	1500
$U_k . p_k$	0	250	250	500

Kemenangan rata-rata tiap permainan (nilai taruhan tiap pengundian) :

$A(U) = U_1.p_1 + U_2.p_2 + U_3.p_3 =$ Rp. 500,-

Harapan Matematis [contoh]

Pada Jasa Asuransi, dari tabel Mortalita diketahui bahwa seseorang usia 25 tahun dapat hidup selama setahun adalah 0.992 (992/1000), yang berarti probabilitas mortalitanya (kematiannya) adalah 0.008 (8/1000). Bila perusahaan asuransi akan menjual Polis kepada seseorang usia 25 tahun untuk jangka waktu setahun dg Premi Rp 10,000,- Berapakah keuntungan dari perusahaan asuransi tsb ? Dengan polis asuransi sebesar Rp 1,000,000,-

Ada 2 peristiwa : [Prob.Kecil x UangBesar] vs [Prob.Besar x UangKecil]

- Peristiwa pertama/meninggal dalam setahun p_1 = 0.008
- Peristiwa kedua/tidak meninggal dalam setahun p_2 = 0.992
- Peristiwa pertama mengeluarkan uang U_1 = - (1,000,000-10,000) = -990,000
- Peristiwa kedua menerima uang U_2 = + 10,000

Haryoso Wicaksono, S.Si., M.M., M.Kom. - Pengantar Probabilitas 85

Harapan Matematis [contoh]

Pada Jasa Asuransi, dari tabel Mortalita diketahui bahwa seseorang usia 25 tahun dapat hidup selama setahun adalah 0.992 (992/1000), yang berarti probabilitas mortalitanya (kematiannya) adalah 0.008 (8/1000). Bila perusahaan asuransi akan menjual Polis kepada seseorang usia 25 tahun untuk jangka waktu setahun dg Premi Rp 10,000,- Berapakah keuntungan dari perusahaan asuransi tsb ? Dengan polis asuransi sebesar Rp 1,000,000,-

Maka harapan matematisnya :

A(U) = $U_1.p_1 + U_2.p_2$ = [- 990,000 x 0.008] + [10,000 x 0,992]

= 2,000,-

dan selama positip, pihak asuransi masih memperoleh keuntungan.

Haryoso Wicaksono, S.Si., M.M., M.Kom. - Pengantar Probabilitas 86