Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

MUH1G3/ MATRIKS DAN RUANG VEKTOR

TIM DOSEN

7 Transformasi Linear

Sub Pokok Bahasan

- Definisi Transformasi Linear
- Matriks Transformasi
- Kernel dan Jangkauan

Aplikasi Transformasi Linear

Grafika Komputer
Penyederhanaan Model Matematika
dan lain-lain

Transformasi Linear

- Misalkan V dan W adalah ruang vektor $T: V \rightarrow W$ dinamakan transformasi linear, jika untuk setiap $\vec{a}, \vec{b} \in V$ dan $\alpha \in R$

  – $T(\vec{a} + \vec{b}) = T(\vec{a}) + T(\vec{b})$

  – $T(\alpha\vec{a}) = \alpha T(\vec{a})$

  Jika $V = W$ maka T dinamakan operasi linear

- Contoh 1:

  Tunjukan bahwa $T: R^2 \rightarrow R^3$, dimana

$$T\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x - y \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

  Merupakan transformasi linear

Jawab:

Ambil 1 unsur sembarang R (contoh α) dan 2 unsur sembarang di R^2,

Misalkan $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

- Akan ditunjukan bahwa $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) \\ -(u_1 + v_1) \\ (u_2 + v_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 - u_2 - v_2 \\ -u_1 - v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - u_2 + v_1 - v_2 \\ -u_1 - v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ -u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ -v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

Terbukti bahwa $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

- Akan ditunjukan bahwa $\mathrm{T}(\alpha\vec{\mathrm{u}}) = \alpha\,\mathrm{T}(\vec{\mathrm{u}})$

$$\mathrm{T}(\alpha\vec{\mathrm{u}}) = \mathrm{T}\left(\alpha\begin{pmatrix}\mathrm{u}_1\\ \mathrm{u}_2\end{pmatrix}\right) = \mathrm{T}\left(\begin{pmatrix}\alpha\mathrm{u}_1\\ \alpha\mathrm{u}_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\alpha\mathrm{u}_1 - \alpha\mathrm{u}_2\\ -(\alpha\mathrm{u}_1)\\ \alpha\mathrm{u}_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha(\mathrm{u}_1 - \mathrm{u}_2)\\ (\alpha)(-\mathrm{u}_1)\\ \alpha\mathrm{u}_2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}\mathrm{u}_1 - \mathrm{u}_2\\ -\mathrm{u}_1\\ \mathrm{u}_2\end{pmatrix}$$

$$= \alpha\mathrm{T}(\vec{\mathrm{u}})$$

Terbukti bahwa $\mathrm{T}(\alpha\vec{\mathrm{u}}) = \alpha\,\mathrm{T}(\vec{\mathrm{u}})$

Jadi, T merupakan transformasi linear

- Contoh 2:

  Misalkan T merupakan suatu transformasi dari $M_{2\times 2}$ ke R yang didefinisikan oleh $T(A) = \det(A)$, untuk setiap $A \in M_{2\times 2}$. Apakah T merupakan Transformasi Linear?

  Jawab:

  Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$

  Maka untuk setiap $\alpha \in R$ berlaku

$$\det(\alpha A) = \det\left(\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \alpha^2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \alpha^2 \det(A)$$

  Perhatikan bahwa $\det(\alpha A) \neq \alpha \det(A)$

  Jadi T bukan transformasi linear

- Contoh 3:

  Diketahui $T: P2$ (Polinom orde 2)$\rightarrow R^2$, dimana

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a - b \\ a - c \end{pmatrix}$$

  a. Apakah T merupakan transformasi linear

  b. Tentukan $T(1 + x + x^2)$

  Jawab:

  a. Ambil 1 unsur sembarang R (contoh α) dan 2 unsur sembarang di $P2$, Misalkan $\vec{\mathrm{u}} = \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2\mathrm{x} + \mathrm{u}_3\mathrm{x}^2, \vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2\mathrm{x} + \mathrm{v}_3\mathrm{x}^2$

  - Akan ditunjukan bahwa $\mathrm{T}(\vec{\mathrm{u}} + \vec{\mathrm{v}}) = \mathrm{T}(\vec{\mathrm{u}}) + \mathrm{T}(\vec{\mathrm{v}})$

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(\vec{\mathrm{u}} + \vec{\mathrm{v}}) &= \mathrm{T}\big((\mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2\mathrm{x} + \mathrm{u}_3\mathrm{x}^2) + (\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2\mathrm{x} + \mathrm{v}_3\mathrm{x}^2)\big) \\ &= \mathrm{T}\big((\mathrm{u}_1 + v_1) + (\mathrm{u}_2 + v_2)\mathrm{x} + (\mathrm{u}_3 + v_3)\mathrm{x}^2\big) \\ &= \begin{pmatrix} (\mathrm{u}_1 + v_1) - (\mathrm{u}_2 + v_2) \\ (\mathrm{u}_1 + v_1) - (\mathrm{u}_3 + v_3) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} (\mathrm{u}_1 + v_1) - (\mathrm{u}_2 + v_2) \\ (\mathrm{u}_1 + v_1) - (\mathrm{u}_3 + v_3) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 - u_2 - v_2 \\ u_1 + v_1 - u_3 - v_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u_1 - u_2 + v_1 - v_2 \\ u_1 - u_3 + v_1 - v_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ u_1 - u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 - v_3 \end{pmatrix}$$
$$= \mathrm{T}(\mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2\mathrm{x} + \mathrm{u}_3\mathrm{x}^2) + T(\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2\mathrm{x} + \mathrm{v}_3\mathrm{x}^2)$$
$$= \mathrm{T}(\vec{\mathrm{u}}) + \mathrm{T}(\vec{\mathrm{v}})$$

- Akan ditunjukan bahwa $\mathrm{T}(\alpha\vec{\mathrm{u}}) = \alpha\,\mathrm{T}(\vec{\mathrm{u}})$

$$\mathrm{T}(\alpha\vec{\mathrm{u}}) = \mathrm{T}(\alpha(\mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2\mathrm{x} + \mathrm{u}_3\mathrm{x}^2))$$
$$= \mathrm{T}(\alpha\mathrm{u}_1 + \alpha\mathrm{u}_2\mathrm{x} + \alpha\mathrm{u}_3\mathrm{x}^2)$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha u_1 - \alpha u_2 \\ \alpha u_1 - \alpha u_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha(u_1 - u_2) \\ \alpha(u_1 - u_3) \end{pmatrix}$$
$$= \alpha \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ u_1 - u_3 \end{pmatrix} = \alpha\, T(u_1 + u_2 x + u_3 x^2) = \alpha\,\mathrm{T}(\vec{\mathrm{u}})$$

Jadi, T merupakan Transformasi Linear

b. $T(1 + x + x^2) = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Suatu Transformasi Linear $T: V \rightarrow W$ dapat direpresentasikan dalam bentuk:

$$T(\vec{u}) = A\vec{u}$$

Untuk setiap $\vec{u} \in V$

(A dinamakan matriks Transformasi dari T)

Contoh 4:

Misalkan, suatu transformasi linear $T: R^2 \rightarrow R^3$ didefinisikan oleh:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

- Jawab:

  Perhatikan bahwa

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  Jadi matriks transformasi untuk $T: R^2 \rightarrow R^3$ adalah

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Secara umum, jika $T: R^n \rightarrow R^m$ merupakan transformasi linear maka ukuran matriks transformasi adalah $m \times n$

Misalkan

$B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ basis bagi ruang vektor V dan $T: R^2 \rightarrow R^3$ merupakan transformasi linear dimana

$$T(\overrightarrow{v_i}) = \overrightarrow{u_i} \text{ untuk setiap } i = 1, 2$$

Matriks transformasinya dapat ditentukan dengan cara:

Tulis:

$$T(\overrightarrow{v_1}) = A\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{u_1}$$
$$T(\overrightarrow{v_2}) = A\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_2}$$

Sehingga

$$A_{3\times2}[\overrightarrow{v_1} \quad \overrightarrow{v_2}]_{2\times2} = [\overrightarrow{u_1} \quad \overrightarrow{u_2}]_{2\times2}$$

Jadi

$$A = [\overrightarrow{u_1} \quad \overrightarrow{u_2}][\overrightarrow{v_1} \quad \overrightarrow{v_2}]^{-1}$$

- Contoh 5:

Misalkan

$$\left\{\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$ adalah basis bagi R^3.

$T: R^3 \rightarrow P_1$ Transformasi linear didefinisikan $T(\overrightarrow{v_i}) = A\overrightarrow{v_i} = p_i$ untuk setiap $i = 1,2,3.$

Jika

$p_1 = 1 - x;\ p_2 = 1;\ p_3 = 2x$

Tentukan:

Tentukan hasil transformasi dari $T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Jawab:

Definisikan:

$$p_1 = [1 - x]_B = \binom{1}{-1};\quad p_2 = [1]_B = \binom{1}{0};\quad p_3 = [2x]_B = \binom{0}{2}$$

Karena

$$A\overrightarrow{v_i} = p_i \qquad \forall i$$

Maka

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Atau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

- Invers matriks dicari dengan OBE:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\begin{array}{c}-b_1+b_2 \\ b_1+b_3\end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{b_2+b_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Sehingga

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Jadi matriks transformasi T adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

- Sementara itu,

$$T\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

Ingat bahwa

$$\left[\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right]_B=-1+x$$

Jadi

$$T\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=-1+x$$

- Contoh 6:

Diketahui basis dari polinom orde dua adalah $\{1+x,\ -x+x^2, 1+x-x^2\}$

Jika $T: P_2 \rightarrow R^3$ adalah transformasi linear dimana

$$T(1+x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};\ T(-x+x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};\ T(1+x-x^2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tentukan

$T(1-x+x^2)$

- Jawab:

Perhatikan bahwa

Himpunan 3 polinom tersebut adalah basis bagi polinom orde 2

Maka polinom tersebut ditulis menjadi

$$1 - x + x^2 = k_1(1 + x) + k_2(-x + x^2) + k_3(1 + x - x^2)$$

Dengan menyederhakan persamaan diatas, didapat SPL sebagai berikut

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 1 \\ k_1 - k_2 + k_3 = -1 \\ k_2 - k_3 = 1 \end{cases}$$

Dengan solusi $k_1 = 0, k_2 = 2,$ dan $k_3 = 1$

- Jadi kombinasi linear tersebut dapat ditulis dalam bentuk:

$$1 - x + x^2 = 0(1 + x) + 2(-x + x^2) + 1(1 + x - x^2)$$

Atau

$$T(1 - x + x^2) = T\big(0(1 + x) + 2(-x + x^2) + 1(1 + x - x^2)\big)$$

Karena T merupakan Transformasi linear maka

$$T(1 - x + x^2) = 0T(1 + x) + 2T(-x + x^2) + 1T(1 + x - x^2)$$

$$= 0\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}$$

Kernel dan Jangkauan

- Misalkan $T: V \to W$ merupakan transformasi linear. Semua unsur di V yang dipetakan ke vektor nol di W dinamakan KERNEL T

  notasi $\ker(T)$ atau

$$\ker(T) = \{\vec{u} \in v | T(\vec{u}) = \vec{0}\}$$

Contoh 7:

Transformasi linear $T: P_2 \to R^2$

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a - b \\ a - c \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa $T(1 + x + x^2) = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Maka $1 + x + x^2 \in \ker(T)$

Sementara itu, $1 + 2x + x^2 \notin \ker(T)$

Karena $T(1 + 2x + x^2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

Jelas bahwa vektor nol pada daerah asal transformasi merupakan unsur kernel T. Tetapi, tak semua transformasi linear mempunyai vektor tak nol sebagai unsur kernel T.

Teorema :

Jika $\mathrm{T} : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ adalah transformasi linear maka $\ker(\mathrm{T})$ merupakan subruang dari V

Bukti :

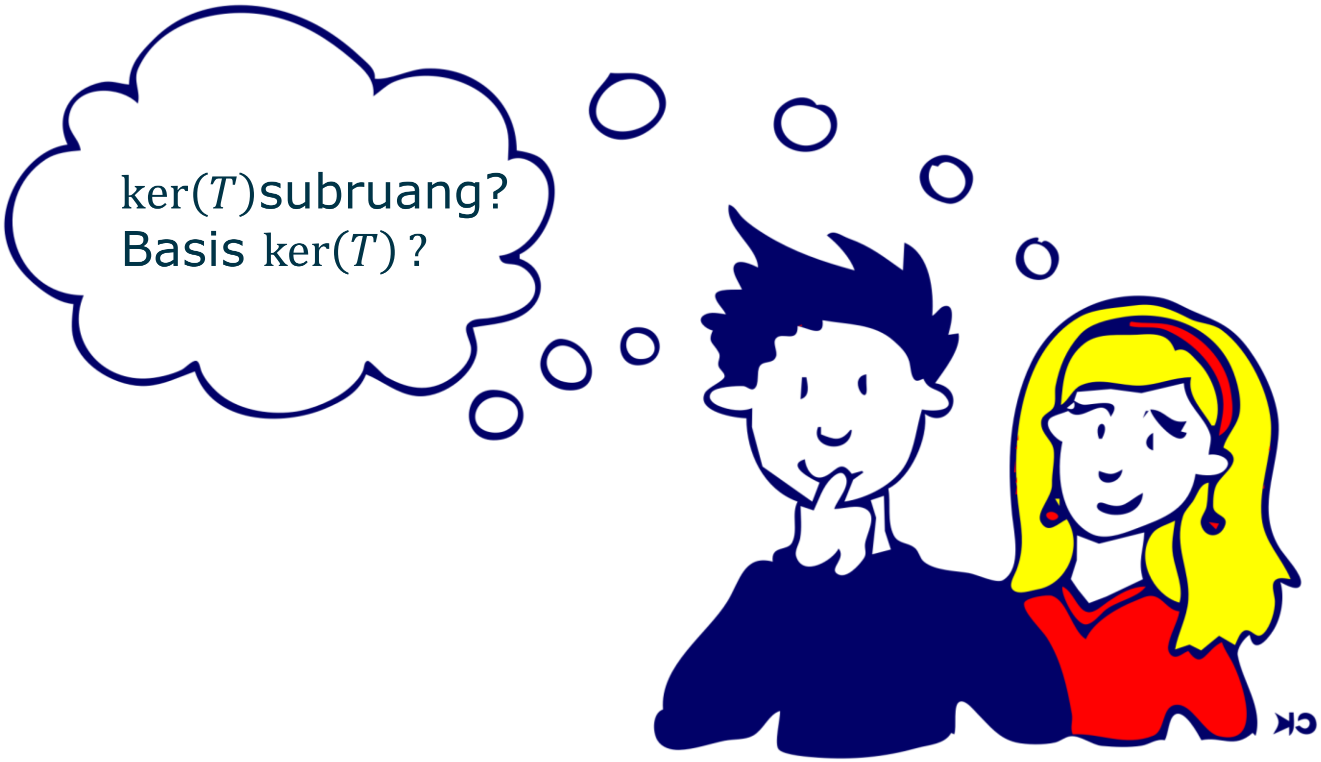
Ambil $\vec{\mathrm{a}}, \vec{\mathrm{b}} \in \ker(\mathrm{T})$ sembarang dan $\alpha \in \mathrm{R}$

1. Karena setiap $\vec{\mathrm{a}} \in \ker(\mathrm{T})$ artinyna setiap $\vec{\mathrm{a}} \in V$ sehingga $T(\vec{\mathrm{a}}) = \vec{0}$, Maka $\ker(T) \subseteq V$

2. Perhatikan bahwa $\vec{0} \in \ker(T)$.
   Artinya setiap $T(\vec{0}) = A\vec{0} = \vec{0}$
   oleh karena itu $\ker(T) \neq \{\}$
3. Karena $\vec{a}, \vec{b} \in \ker(T)$ dan $\ker(T) \subseteq V$
   Ingat bahwa V merupakan ruang vektor, sehingga berlaku
   $$\vec{a} + \vec{b} \in V$$
   akibatnya $T(\vec{a} + \vec{b}) = T(\vec{a}) + T(\vec{b}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$
   Jadi $\vec{a} + \vec{b} \in \ker(T)$
4. $\vec{a} \in \ker(T)$ dan $\vec{a} \in V$
   Karena V adalah ruang vektor, maka untuk setiap $\alpha \in R$ berlaku:
   $$T(\alpha\vec{a}) = \alpha T(\vec{a}) = \alpha\,\vec{0} = \vec{0}$$
   Jadi $\alpha\vec{a} \in \ker(T)$

Dengan demikian, terbukti bahwa

Jika $T: V \to W$ adalah transformasi linear maka $\ker(T)$ merupakan subruang dari ruang vektor V


$\ker(T)$subruang?
Basis $\ker(T)$?

- Contoh 8:

Diketahui transformasi linear $T: R^3 \rightarrow P_2$ dengan

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a+b) + (2a-c)x + (2a+b+c)x^2$$

Tentukan basis dan dimensi $\ker(T)$ dan $R(T)$ (R(T) adalah jangkauan dari T)

Jawab:

Perhatikan bahwa:

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a+b) + (2a-c)x + (2a+b+c)x^2 = \vec{0}$$

Ini memberikan

$$\begin{pmatrix} a+b \\ 2b-c \\ 2a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga

$$T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\2b-c\\2a+b+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&-1\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

Jadi matriks transformasi bagi T adalah

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&-1\\2&1&1\end{pmatrix}$$

Dengan melakukan OBE pada matriks yang telah diperbesar maka didapat

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&2&-1&0\\2&1&1&0\end{array}\right]\sim\ldots\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right]$$

Jadi (0,0,0) adalah satu-satunya anggota dari ker(T).

Sehingga, basis $\ker(T)=\{\quad\}$

dan nulitasnya adalah nol

- Perhatikan hasil OBE,

  maka basis ruang kolom dari matriks A adalah

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

  oleh karena itu, basis jangkauan dari T adalah:

$$\{1+2x^2, 1+2x+x^2, -x+x^2\}$$

  sehingga rank(dimensi basis $R(t)$)=3

- Contoh 9:

  Diketahui transformasi linear $T: R^4 \rightarrow R^3$ didefinisikan oleh:

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c-2d \\ -a-b+c-2d \end{pmatrix}$$

  Tentukan basis kernel dari T dan nulitasnya

Jawab:

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c-2d \\ -a-b+c-2d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

- Jadi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Basis $\ker(T)$ dan Nulitasnya?

$\ker(T)$ adalah ruang solusi dari

$$T(\vec{v}) = A(\vec{v}) = \vec{0}$$

$$\forall \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in R^4$$

Dengan OBE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\ker(T) =$ ruang solusi dari $A\vec{v} = \vec{0}$

Yaitu

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} t; \quad s, t \neq 0 \right\}$$

Jadi basis $\ker(T)$ adalah

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

nulitas = Dimensi dari $\ker(T) = 2$

LATIHAN

- Suatu Transformasi $T: R^3 \rightarrow R^2$ didefinisikan oleh
$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2b \\ a + c \end{pmatrix}$$
  Periksa apakat T merupakan transformasi linear
- Jika suatu transformasi $T: P_1 \rightarrow P_2$ diberikan oleh $T[2 + x] = 4 - x - x^2$ dan $T[1 + 3x] = 7 + 2x - 2x^2$
  Tentukan $T[3 - x]$
- Suatu transformasi linear, $T: R^2 \rightarrow R^3$.
$$T\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dan } T\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
  a. Tentukan matriks transformasi dari T
  b. Tentukan hasil transformasi $T\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
  c. Tentukan basis kernel dan jangkauan dari T

THANK YOU