MUH1G3/ MATRIKS DAN RUANG VEKTOR

TIM DOSEN

6 Ruang Hasil Kali Dalam

Sub Pokok Bahasan

- Definisi Ruang Hasilkali Dalam
- Himpunan ortonormal
- Proses Gramm Schmidt

Aplikasi RHD

Metode Optimasi seperti metode least square dalam peminimumam error dalam berbagai bidang teknik

Definisi RHD

- Misal V adalah suatu ruang vektor dan $\vec{u}, \vec{v} \in V$ maka notasi $< \vec{u}, \vec{v} >$ dinamakan hasil kali dalam jika memenuhi keempat aksioma sebagai berikut:

1	$< \vec{u}, \vec{v} > \; = \; < \vec{v}, \vec{u} >$	SIMETRIS
2.	$< \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} > =< \vec{u}, \vec{w} > + < \vec{v}, \vec{w} >$	ADITIVITAS
3.	Untuk suatu $k \in R$, $< k\vec{u}, \vec{v} > =< \vec{u}, k\vec{v} > = k < \vec{u}, \vec{v} >$	HOMOGENITAS
4.	$< \vec{u}, \vec{u} > \geq 0$, untuk setiap $\vec{u}$ dan $< \vec{u}, \vec{u} > = 0 \leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$	POSITIVITAS

Ruang Hasil Kali Dalam

- Suatu ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam disebut Ruang Hasil Kali Dalam
- Jika V merupakan suatu ruang hasil kali dalam maka norm (panjang) sebuah vektor didefinisikan

$$|\vec{u}| = < \vec{u}, \vec{u} >^{1/2} \geq 0$$

Contoh 1:

Ruang Hasil Kali Dalam Euclides (R^n)

Misalkan $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ maka

$$|\vec{u}| = < \vec{u}, \vec{u} >^{1/2} = (u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2)^{1/2}$$

Contoh 2:

Misalkan $W \subseteq R^3$ yang dilengkapi dengan operasi hasil kali $< \vec{u}, \vec{v} > = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3$, dimana $\vec{u}, \vec{v} \in W$.

Buktikan bahwa W adalah ruang hasilkali dalam

Jawab:

Misalkan $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in W$

1 $\quad < \vec{u}, \vec{v} > = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3$

$\qquad = 2v_1u_1 + v_2u_2 + 3v_3u_3 = < \vec{v}, \vec{u} >$ TERBUKTI SIMETRI

2 $< \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} > \; = < (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3), (w_1, w_2, w_3) \; >$

$= 2(u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 + 3(u_3 + v_3)w_3$

$= 2u_1w_1 + 2v_1w_1 + u_2w_2 + v_2w_2 + 3u_3w_3 + 3v_3w_3$

$= 2u_1w_1 + u_2w_2 + 3u_3w_3 + 2v_1w_1 + v_2w_2 + 3v_3w_3$

$=< \vec{u}, \vec{w} >+< \vec{v}, \vec{w} >$ TERBUKTI BERSIFAT ADITIVITAS

3 Untuk suatu $k \in R$

$< k\vec{u}, \vec{v} > \; = < (ku_1, ku_2, ku_3), (v_1, v_2, v_3) >$

$= 2ku_1v_1 + ku_2v_2 + 3ku_3v_3$

$= k(2u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3) = 2u_1kv_1 + u_2kv_2 + 3u_3kv_3$

$=k < \vec{u}, \vec{\mathrm{v}} > = < \vec{u}, k\vec{\mathrm{v}} >$TERBUKTI BERSIFAT HOMOGENITAS

4 $< \vec{u}, \vec{u} > \; = \; 2u_1u_1 + u_2u_2 + 3u_3u_3 = 2u_1^2 + u_2^2 + 3u_3^2$

Jelas bahwa$< \vec{u}, \vec{u} > \geq 0$ untuk setiap $\vec{u}$ dan $< \vec{u}, \vec{u} > = 0$ hanya jika $\vec{u} = \vec{0}$ TERBUKTI BERSIFAT POSITIVITAS

Contoh 3:

Misalkan $W \subseteq R^3$ yang dilengkapi dengan operasi hasil kali $< \vec{u}, \vec{v} > = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 - 3u_3 v_3$, dimana $\vec{u}, \vec{v} \in W$.

Buktikan bahwa W adalah **bukan** ruang hasilkali dalam

Jawab:

- Perhatikan bahwa

$$< \vec{u}, \vec{u} > \; = \; u_1 u_1 + 2u_2 u_2 - 3u_3 u_3 = u_1^2 + 2u_2^2 - 3u_3^2$$

Jika $3u_3^2 > u_1^2 + 2u_2^2$ maka $< \vec{u}, \vec{u} > \leq 0.$

TIDAK MEMENUHI SIFAT POSITIVITAS

Contoh 4:

Diketahui $<\vec{u},\vec{v}> = ad + cf$, dimana $\vec{u} = (a, b, c)$ dan $\vec{v} = (d, e, f)$.
Apakah $<\vec{u},\vec{v}>$ merupakan hasil kali dalam?

Jawab:

Jelas bahwa $<\vec{u},\vec{u}> = (a^2 + c^2) \geq 0$
Misalkan $\vec{u}$=$(0,2,0)$ diperoleh $<\vec{u},\vec{u}> = 0$. Padahal $\vec{u} \neq \vec{0}$
(Aksioma terakhir tidak terpenuhi)

Jadi, $<\vec{u},\vec{v}> = ad + cf$ **bukan** merupakan hasil kali dalam

Himpunan Ortonormal

- Sebuah himpunan vektor pada ruang hasil kali dalam dinamakan himpunan ortogonal jika semua pasangan vektor yang berbeda dalam himpunan tersebut adalah ortogonal (saling tegak lurus).
- Himpunan ortonormal adalah himpunan ortogonal yang setiap vektornya memiliki panjang (normnya) satu.

#SecaraOperasional

Misalkan, $T = \{\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \ldots, \overrightarrow{c_n}\}$ pada suatu RHD

T dikatakan himpunan vektor ortogonal jika $< \overrightarrow{c_i}, \overrightarrow{c_j} > = 0$ untuk setiap $i \neq j$

Sedangkan, T dikatakan himpunan vektor ortonormal jika untuk setiap i berlaku $|\overrightarrow{c_i}| = 1$

Contoh 5:

1. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
   Pada RHD Euclides, A bukan himpunan ortogonal

2. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$
   Pada RHD Euclides, B merupakan himpunan ortonormal

3. $C = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$
   Pada RHD Euclides, C merupakan himpunan ortonormal

Misalkan

$$S = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$$

adalah basis ortonormal untuk RHD V. Jika $\vec{u}$ adalah sembarang vektor pada RHD V, maka

$$\vec{u} = k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + k_n\overrightarrow{v_n}$$

Perhatikan bahwa, untuk suatu i berlaku:

$$\begin{aligned} < \vec{u}, \overrightarrow{v_i} > &= < k_1\, \overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + k_n\overrightarrow{v_n}, \overrightarrow{v_i} > \\ &= k_1 < \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_i} > + k_2 < \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_i} > + \cdots + k_i < \overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_i} > + \cdots + k_n < \overrightarrow{v_n}, \overrightarrow{v_i} > \end{aligned}$$

Karena S merupakan himpunan ortonormal maka

$< \overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_j} > = 0$ untuk setiap $i \neq j$ dan $< \overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_i} >$ =1 untuk setiap i

Sehingga untuk setiap i berlaku

$$< \vec{u}, \overrightarrow{v_i} > = k_i$$

Kombinasi linear $\vec{u} = k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + k_n\overrightarrow{v_n}$

Ditulis menjadi

$$\vec{u} =< \vec{u}, \overrightarrow{v_1} > \overrightarrow{v_1} +< \vec{u}, \overrightarrow{v_2} > \overrightarrow{v_2} + \cdots +< \vec{u}, \overrightarrow{v_n} > \overrightarrow{v_n}$$

Contoh 6:

Tentukan kombinasi linear dari $\vec{a} = \binom{1}{2}$ pada RHD Euclides berupa bidang yang dibangun oleh

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ dan } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Jawab:

$$\vec{a} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$$

$$\vec{a} =< \vec{a},\vec{u} > \vec{u} +< \vec{a},\vec{v} > \vec{v}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} =< \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} > \vec{u} +< \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix} > \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\vec{v}$$

$$\vec{a} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,\vec{u} + (-\frac{1}{\sqrt{2}})\vec{v}$$

Proses Gramm- Schmidth

Basis bagi Suatu RHD V

$S = \{\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \dots, \overrightarrow{c_n}\}$

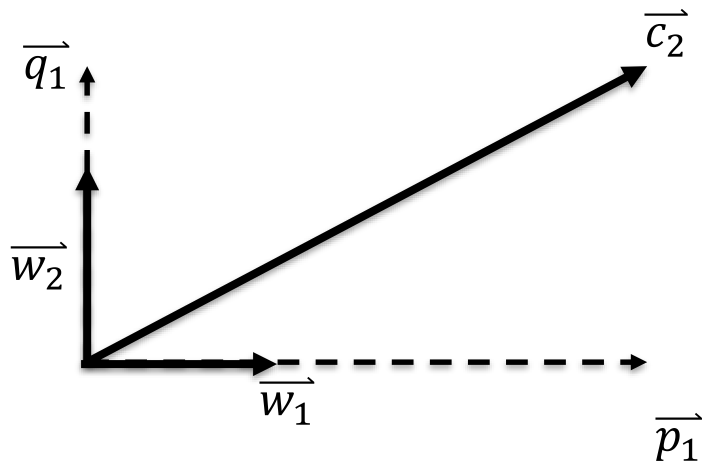
Basis ortonormal bagi V

$B = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \dots, \overrightarrow{w_n}\}$

Langkah yang dilakukan :

1. $\overrightarrow{w_1} = \dfrac{\overrightarrow{c_1}}{|\overrightarrow{c_1}|}$

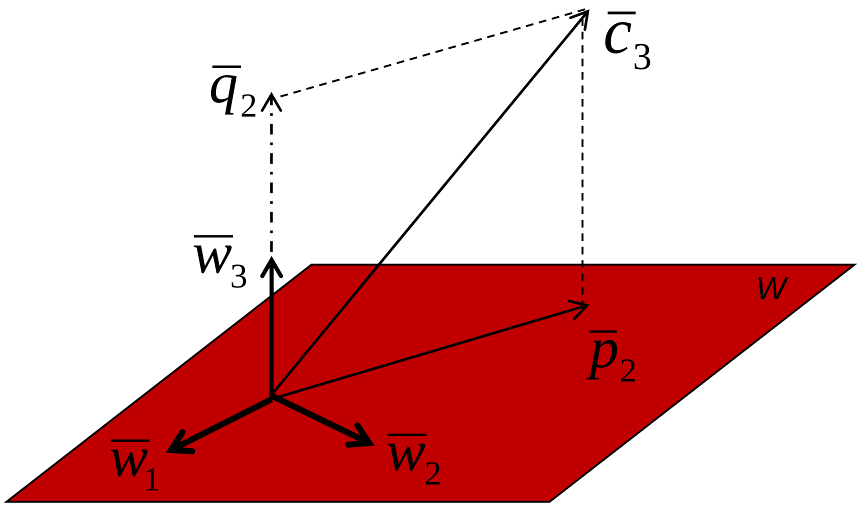
2. Langkah kedua $\overrightarrow{c_2} \rightarrow \overrightarrow{w_2}$



Karena $\overrightarrow{p_1} = proj_{\overrightarrow{w_1}}\overrightarrow{c_2} = <\overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{w_1}> \overrightarrow{w_1}$ dan $\overrightarrow{q_1} = \overrightarrow{c_2} - \overrightarrow{p_1}$ maka

$$\overrightarrow{w_2} = \frac{\overrightarrow{c_2} - <\overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{w_1}> \overrightarrow{w_1}}{|\overrightarrow{c_2} - <\overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{w_1}> \overrightarrow{w_1}|}$$

3. Langkah ketiga $\overrightarrow{c_3} \to \overrightarrow{w_3}$



$\overrightarrow{p_2} = proj_W\overrightarrow{c_3} =< \overrightarrow{c_3}, \overrightarrow{w_1} > \overrightarrow{w_1} +< \overrightarrow{c_3}, \overrightarrow{w_2} > \overrightarrow{w_2}$dan $\overrightarrow{q_2} = \overrightarrow{c_3} - \overrightarrow{p_2}$ maka

$$\overrightarrow{w_3} = \frac{\overrightarrow{c_3} -< \overrightarrow{c_3}, \overrightarrow{w_1} > \overrightarrow{w_1} -< \overrightarrow{c_3}, \overrightarrow{w_2} > \overrightarrow{w_2}}{|\overrightarrow{c_3} -< \overrightarrow{c_3}, \overrightarrow{w_1} > \overrightarrow{w_1} -< \overrightarrow{c_3}, \overrightarrow{w_2} > \overrightarrow{w_2}|}$$

Contoh 7:

Diketahui:

$$B = \left\{ \overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

B merupakan basis pada RHD Euclides di R^3. Transformasikan basis tersebut menjadi basis Ortonormal

Jawab:

Langkah 1.

$$\overrightarrow{v_1} = \frac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Langkah 2.

$$\overrightarrow{v_2} = \frac{\overrightarrow{u_2} - proj_{\overrightarrow{v_1}}\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_2} - proj_{\overrightarrow{v_1}}\overrightarrow{u_2}|}$$

Karena $\overrightarrow{u_2} - proj_{\overrightarrow{v_1}}\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u_2} - < \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v_1} > \overrightarrow{v_1}$

$$= (0,1,1) - \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$$

Maka $|\overrightarrow{u_2} - proj_{\overrightarrow{v_1}}\overrightarrow{u_2}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Sehingga $\overrightarrow{v_2} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

Langkah 3.

$$\overrightarrow{v_3} = \frac{\overrightarrow{u_3} - proj_{\overrightarrow{W}}\overrightarrow{u_3}}{|\overrightarrow{u_3} - proj_{\overrightarrow{W}}\overrightarrow{u_3}|}$$

Karena $\overrightarrow{u_3} - proj_{\overrightarrow{W}}\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{u_3} - < \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{v_1} > \overrightarrow{v_1} - < \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{v_2} > \overrightarrow{v_2}$

$$= (0,0,1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{6}}(-\frac{2}{\sqrt{6}}.\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$$

$$= (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Maka $\left|\overrightarrow{u_3} - proj_{\overrightarrow{W}}\overrightarrow{u_3}\right| = \sqrt{(0)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Sehingga $\overrightarrow{v_3} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

- Jadi

$$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

Merupakan basis ortonormal untuk ruang vektor R^3 dengan hasil kali dalam Euclides.

Contoh 8:

Diketahui bidang yang dibangun oleh $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ merupakan subruang dari RHD Euclides di R^3.

Tentukan proyeksi ortogonal dari vektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pada bidang tersebut.

Jawab:

Diketahui

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Merupakan basis bagi subruang pada RHD tersebut. Karena $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ selain membangun subruang pada RHD himpunan tersebut juga saling bebas linear
(terlihat bahwa ia tidak saling berkelipatan)

Langkah 1.

$$\overrightarrow{w_1} = \frac{\overrightarrow{v_1}}{|\overrightarrow{v_1}|} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (1)^2}} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Perhatikan bahwa: $< \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_1} > = < (0,1,1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) >$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Sehingga $< \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_1} > \ \overrightarrow{w_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (\frac{1}{2}, 0\ , \frac{1}{2})$

$$\overrightarrow{v_2} \ -< \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_1} > \overrightarrow{w_1} = (0,1,1) - \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = (-\frac{1}{2}, 1\ , \frac{1}{2})$$

Akibatnya:

$$|\overrightarrow{v_2} \ -< \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_1} > \overrightarrow{w_1}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

Akibatnya, diperoleh

$$\overrightarrow{w_2} = \frac{\overrightarrow{v_2} - < \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_1} > \overrightarrow{w_1}}{|\overrightarrow{v_2} - < \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_1} > \overrightarrow{w_1}|}$$

$$= \frac{(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})}{\frac{1}{2}\sqrt{6}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Jadi Basis ortonormal bagi bidang tersebut adalah

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\}$$

- Proyeksi ortogonal Vektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pada bidang tersebut adalah

$$Proj_W \vec{u} = <\vec{u}, \overrightarrow{w_1}> \overrightarrow{w_1} + <\vec{u}, \overrightarrow{w_2}> \overrightarrow{w_2}$$

Perhatikan bahwa:

$$<\vec{u}, \overrightarrow{w_1}> = <(1,1,1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)>$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Sementara itu:

$$< \vec{u}, \overrightarrow{w_2} > = < (1,1,1)\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) >$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Dengan demikian

$$Proj_W\vec{u} = < \vec{u}, \overrightarrow{w_1} > \overrightarrow{w_1} + < \vec{u}, \overrightarrow{w_2} > \overrightarrow{w_2}$$

$$= (1,0,1) + \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$= (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$$

LATIHAN

- Periksa apakah operasi berikut merupakan hasil kali dalam atau bukan
  - $< \vec{u}, \vec{v} > = u_1^2 v_1 + u_2 v_2^2$ di R^2
  - $< \vec{u}, \vec{v} > = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 - u_3 v_3$ di R^3
  - $< \vec{u}, \vec{v} > = u_1^2 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1$ di R^3
- Tentukan nilai k sehingga vektor $(k, k, 1)$ dan vektor $(k, 5, 6)$ adalah ortogonal dalam ruang Euclides!
- W merupakan subruang RHD Euclides di R^3 yang dibangun oleh vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dan \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tentukan proyeksi ortogonal vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ pada W

THANK YOU