Vektor Bebas Linear

- Misalkan $S = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}\}$ adalah himpunan vektor diruang vektor V. S dikatakan bebas linear(linearly independent) jika kombinasi linear:

$$k_1\overrightarrow{u_1} + k_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + k_n\overrightarrow{u_n} = \vec{0}$$

Hanya dipenuhi oleh

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 0$$

Contoh:

- Diketahui $\vec{u} = (-1,3,2)$ dan $\vec{a} = (1,1,-1)$. Apakah $\vec{u}$ dan $\vec{a}$ saling bebas linear di R^3

Jawab:

- Tulis

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{a} = \vec{0}$$

Atau

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Menggunakan OBE dapat diperoleh:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dengan demikian diperoleh:

$k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$

Ini berarti $\vec{u}\ dan\ \vec{a}$ saling bebas linear

- Contoh:

Misalkan

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Apakah ketiga vektor diatas saling bebas linear

Jawab:

Tulis $\vec{0} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c}$

Atau

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Dengan OBE diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ini menunjukan bahwa

k_1, k_2, k_3 solusi tidak trivial (k_1, k_2, k_3 tidak selalu 0)

Jadi

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ adalah vektor-vektor yang bergantung linear

Basis

- Jika V adalah sembarang ruang vektor dan $S = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}\}$ merupakan himpunan berhingga dari vektor-vektor di V, maka S dinamakan basis bagi V jika kedua syarat berikut dipenuhi:
  - S membangun V
  - S bebas linear

Contoh:

- Tunjukan bahwa himpunan matriks berikut:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Merupakan basis bagi matriks berukuran 2×2

Jawab:

- Tulis kombinasi linear:

$$k_1 \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Atau

$$\begin{bmatrix} 3k_1 + k_4 & 6k_1 - k_2 - 8k_3 \\ 3k_1 - k_2 - 12k_3 - k_4 & -6k_1 - 4k_3 + 2k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- Dengan menyamakan setiap unsur pada kedua matriks, diperoleh SPL:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -8 & 0 \\ 3 & -1 & -12 & -1 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Determinan matriks koefisien = 48 determinan matriks koefisiennya tidak sama dengan 0 maka

- Ketika $a = 0, b = 0, c = 0, d = 0$, SPL Homogen punya solusi trivial yaitu k_1=0, k_2=0, k_3=0, k_4=0 (bebas linear)
- SPL memiliki solusi untuk setiap $a, b, c, d \in R$ (membangun)

Jadi, M bebas linear.

- Karena M bebas linear dan membangun $M_{2\times 2}$ maka M merupakan basis bagi $M_{2\times 2}$.
- Ingat, basis untuk setiap ruang vektor adalah tidak tunggal

Contoh:

Untuk ruang vektor $M_{2\times 2}$, himpunan matriks

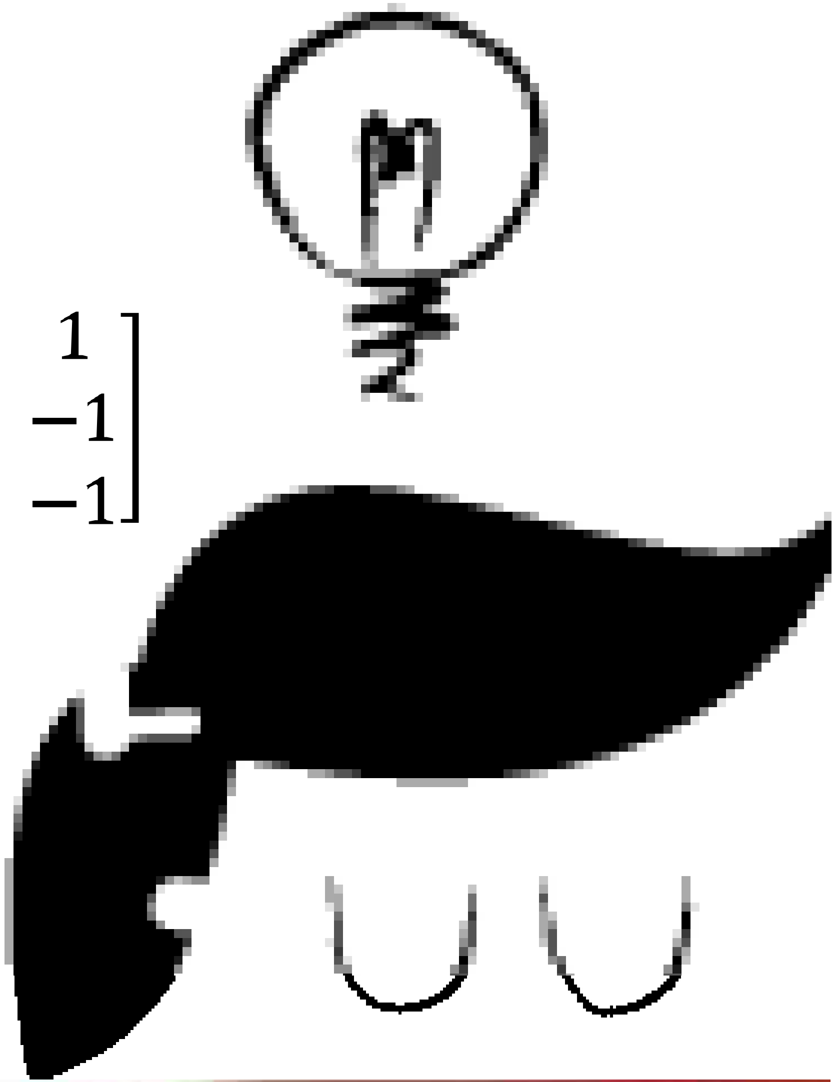
$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

juga merupakan basisnya

Dimensi

- Perhatikan matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$



Dengan melakukan OBE diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Perhatikan kolom-kolom pada matriks hasil OBE

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan satu utama dari matriks A. Maka matriks A mempunyai **basis ruang kolom** yaitu:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Jika A ditransposkan terlebih dahulu dan dilakukan OBE pada A^t, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Perhatikan kolom-kolom pada matriks hasil OBE

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan satu utama dari matriks A. Maka Matriks A tersebut mempunyai **basis ruang baris**:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

"Dimensi basis ruang baris-ruang kolom dinamakan rank"

Contoh:

- Diberikan SPL homogen:

$$
\begin{aligned}
2p + q - 2r - 2s &= 0 \\
p - q + 2r - s &= 0 \\
-p + 2q - 4r + s &= 0 \\
3p - 3s &= 0
\end{aligned}
$$

Tentukan basis ruang solusi dari SPL diatas:

Jawab:

SPL dapat ditulis dalam bentuk:

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & 1 & -2 & -2 & 0 \\
1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
-1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\
3 & 0 & 0 & -3 & 0
\end{array}\right]
$$

- Dengan melakukan OBE diperoleh

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- Solusi SPL Homogen tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dimana a, b merupakan parameter

- Jadi, basis ruang solusi dari SPL diatas adalah:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Dimensi dari basis ruang solusi dinamakan nulitas. Dengan demikian, nulitas dari SPL diatas adalah 2.

Latihan

- Nyatakan matriks $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

Sebagai kombinasi linear dari matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ dan } \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

- Periksa apakah himpunan berikut bebas linear!
  - $\{6 - x^2, 6 + x + 4x^2\}$
  - $\{1 + 3x + 3x^2, x + 4x^2, 5 + 6x + 3x^2,\ 7 + 2x - x^2\}$
- Periksa apakah himpunan $A = \{6 - x^2, 6 + x + 4x^2\}$ membangun polinom orde 2?

- Periksa, apakah himpunan berikut merupakan basis bagi polinom orde 2
  - $\{4 + 6x + x^2, -1 + 4x + 2x^2, 5 + 2x - x^2\}$
  - $\{-4 + x + 3x^2, 6 + 5x + 2x^2,\ 8 + 4x + x^2\}$
- Misalkan

$$J = \{a + bx + cx^2 | a^2 = b^2 + c^2\}$$

Merupakan himpunan bagian dari ruang vektor polinom orde dua

Periksa apakah J merupakan subruang dari ruang vektor Polinom orde dua

Jika ya, tentukan basisnya


Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

THANK YOU