Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

MUH1G3/ MATRIKS DAN RUANG VEKTOR

TIM DOSEN

5 Ruang Vektor

Ruang Vektor

Sub Pokok Bahasan

- Ruang Vektor Umum
- Subruang
- Basis dan Dimensi

Beberapa Aplikasi Ruang Vektor

- Beberapa metode optimasi
- Sistem Kontrol
- Operation Research
- dan lain-lain

Ruang Vektor Umum

Misalkan $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ dan $k, l \in R$

V dinamakan ruang vektor jika memenuhi aksioma:

- untuk setiap $\vec{u}, \vec{v} \in V$ maka $\vec{u} + \vec{v} \in V$ (V tertutup terhadap operasi penjumlahan)
- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
- Terdapat $\vec{0} \in V$ sehingga untuk setiap $\vec{u} \in V$ berlaku $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

Ruang Vektor Umum_2

- untuk setiap $\vec{u} \in V$ terdapat $-\vec{u}$ sehingga $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u} + \vec{u}) = \vec{0}$
- untuk setiap $\vec{u} \in V$ dan $k \in R$ maka $k\vec{u} \in V$ (V tertutup terhadap operasi perkalian dengan scalar)
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$
- $k(l\vec{u}) = l(k\vec{u}) = (kl)\vec{u}$
- $1\vec{u} = \vec{u}$

Contoh Ruang Vektor:

Contoh :

- Himpunan vektor Euclides dengan operasi standar (operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar).
  Notasi : R^n(Ruang Euclides orde n)
- Himpunan matriks berukuran $m \times n$
  dengan operasi standar (penjumlahan matriks dan perkalian matriks dengan skalar),
  Notasi : $M_{m\times n}$(Ruang Matriks $m \times n$)
- Himpunan polinom pangkat n dengan operasi standar.
  Notasi : P_n(Ruang Polinom orde n)

Ruang Euclides orde n

- Operasi-operasi pada ruang vektor Euclides:
  - Penjumlahan
  $$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$
  - Perkalian dengan scalar Riil sebarang (k)
  $$k\vec{u} = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$$
  - Perkalian titik (Euclidean inner product)
  $$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

  Panjang vektor didefiniskan oleh:
  $$\|\vec{u}\| = (\vec{u} \cdot \vec{u})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

  Jarak antara dua vektor didefinisikan oleh:
  $$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

Contoh:

- Diketahui $\vec{u} = (1,1,2,3)$ dan $\vec{v} = (2,2,1,1)$
  Tentukan panjang masing-masing vektor dan jarak antara kedua vektor tersebut

Jawab:

- Panjang vektor:

$$\|\vec{u}\| = (\vec{u} \cdot \vec{u})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{15}$$
$$\|\vec{v}\| = (\vec{v} \cdot \vec{v})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

- Jarak antar kedua vektor:

$$d(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(1-2)^2 + (1-2)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2}$$
$$= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{7}$$

SubRuang

- Misal W merupakan subhimpunan dari sebuah ruang vektor V
  W dinamakan subruang (subspace) V jika W juga merupakan ruang vektor yang tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan scalar.

- Syarat W disebut subruang dari V adalah:
  – $W \neq \{ \quad \}$
  – $W \subseteq V$
  – Jika $\vec{u}, \vec{v} \in W$ maka $\vec{u} + \vec{v} \in W$
  – Jika $\vec{u} \in W$ dan $k \in R$ maka $k\vec{u} \in W$

Contoh 1:

- Tunjukan bahwa himpunan W yang berisi semua matriks orde 2×2 dimana setiap unsur diagonalnya adalah nol merupakan subruang dari ruang vektor matriks 2×2

Jawab:

- $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$ maka $W \neq \{\}$
- Jelas bahwa $W \subseteq V$

- Ambil sembarang matriks $A, B \in W$ maka

  Perhatikan bahwa:

  $$A + B = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} = + \begin{bmatrix} 0 & a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 & 0 \end{bmatrix}$$

  Ini menunjukan bahwa $A + B \in W$

- Ambil sembarang matriks $A \in W$ dan $k \in Riil$ maka

  $$kA = k \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix} \in W$$

  Ini menunjukan bahwa $kA \in W$

  Jadi, W merupakan subruang dari $M_{2\times 2}$

Contoh 2:

Periksa apakah himpunan D yang berisi semua matriks orde 2x2 yang determinannya nol merupakan subruang dari ruang vektor $M_{2\times 2}$

Jawab:

Ambil sembarang matriks $A, B \in W$. Dimana dipilih $a \neq \pm b$:

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, jelas bahwa $\det(A) = 0$

$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$, jelas bahwa $\det(B) = 0$

- Perhatikan bahwa:

$$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Karena $a \neq b$

Maka $\det(A + B) = a^2 - b^2 \neq 0$

Jadi D bukan merupakan subruang Matriks berukuran 2×2 karena tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan

Kombinasi Linear

- Sebuah vektor $\vec{u}$ dinamakan kombinasi linear dari vektor-vektor $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$
  Jika vektor $\vec{u}$ tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\vec{u} = k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + k_n\overrightarrow{v_n}$$

  dimana $k_1, k_2, \ldots, k_n$ adalah skalar Riil

Contoh:

- Misal $\vec{u} = (2,4,0)$ dan $\vec{v} = (1,-1,3)$ adalah vektor-vektor di R^3.
  Apakah vektor berikut merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor di atas
  - $\vec{a} = (4,2,6)$
  - $\vec{b} = (1,5,6)$
  - $\vec{c} = (0,0,0)$

Jawab:

a. Tulis $k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{a}$

Akan diperiksa apakah ada k_1, k_2 sehingga kesamaan tersebut dipenuhi

$$k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Persamaan diatas dapat dituliskan dalam bentuk perkalian matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

menggunakan OBE diperoleh:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dengan demikian $\vec{a}$ merupakan kombinasi linear dari vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ atau

$$\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v}$$

b. Tulis $k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{b}$

Akan diperiksa apakah ada k_1, k_2 sehingga kesamaan tersebut dipenuhi

$$k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Persamaan diatas dapat dituliskan dalam bentuk perkalian matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

menggunakan OBE diperoleh:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{array}\right]$$

Baris terakhir pada matriks ini menunjukan bahwa SPL tersebut tidak konsisten(tidak mempunyai solusi). Jadi, tidak ada nilai k_1 dan k_2 yang memenuhi persamaan tersebut. Oleh karena itu, $\vec{b}$ tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$

c. Dengan memilih $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka $k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{c}$

Membangun Suatu Ruang Vektor

- Himpunan vektor

$$S = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$$

dikatakan membangun suatu ruang vektor V jika setiap vektor pada V selalu dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor di S.

Contoh:

Tentukan apakah

$\overrightarrow{v_1} = (1,1,2)$,

$\overrightarrow{v_2} = (1,0,1)$, dan

$\overrightarrow{v_3} = (2,1,3)$

Membangun R^3

Jawab:

- Ambil sembarang vektor di R^3, misalkan

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Tulis:

$$\vec{u} = k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} + k_3\overrightarrow{v_3}$$

Dalam bentuk perkalian matriks, persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

- Syarat agar $\vec{u}$ dapat dikatakan kombinasi linear $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ adalah SPL tersebut harus mempunyai solusi.
- Dengan OBE diperoleh:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & u_1 \\ 0 & -1 & -1 & u_2 - u_1 \\ 0 & 0 & 0 & u_3 - u_1 - u_2 \end{array}\right]$$

Agar SPL itu konsisten haruslah $u_3 - u_2 - u_1 = 0$

Ini kontradiksi dengan pengambilan vektor sembarang(unsur-unsurnya bebas, tak bersyarat)

Dengan demikian vektor-vektor tersebut tidak membangun R^3