Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

MUH1G3/ MATRIKS DAN RUANG VEKTOR

TIM DOSEN

4 Vektor di Bidang dan di Ruang

Vektor di Bidang dan Ruang

Sub Pokok Bahasan

- Notasi dan Operasi Vektor
- Perkalian titik
- Perkalian silang

Beberapa Aplikasi

- Proses Grafika Komputer
- Kuantisasi pada Proses Kompresi
- Least Square pada Optimisasi
- dan lain-lain.

Notasi Vektor

- Vektor adalah besaran yang mempunyai arah
- Notasi Vektor

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c_1\hat{\imath} + c_2\hat{\jmath} + c_3\hat{k}$$

- Notasi Panjang Vektor

$$\|\vec{c}\| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$

- Vektor Satuan adalah vektor dengan panjang atau norm sama dengan satu

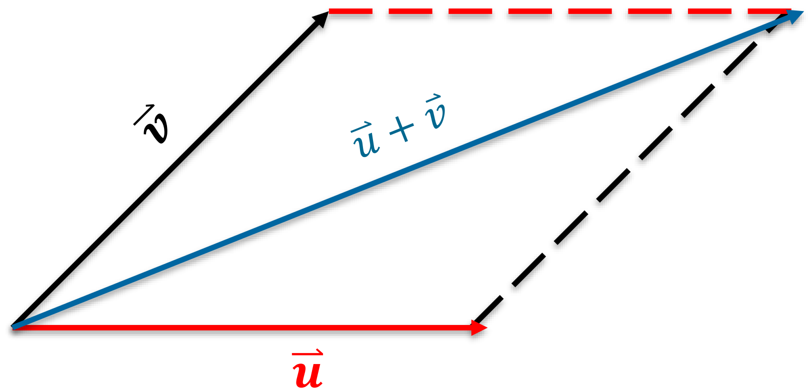
Operasi Vektor

- Operasi Vektor meliputi:
  A. Penjumlahan antar Vektor (Vektor-vektor yang berasal dari ruang yang sama)
  B. Perkalian Vektor
     i. Vektor dengan scalar
     ii. Vektor dengan vektor
        a. Hasil Kali Titik (Dot Product)
        b. Hasil Kali Silang (Cross Product)

Operasi Vektor_Penjumlahan antar Vektor

A. Penjumlahan antar Vektor

Misalkan $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah vektor-vektor yang berada diruang yang sama. vektor $\vec{u}+\vec{v}$ didefiniskan



Contoh:

Misalkan $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ maka

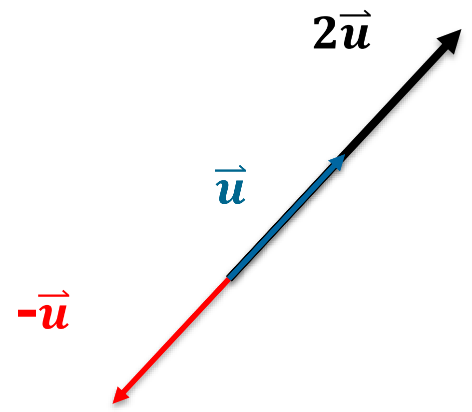
$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Operasi Vektor_Perkalian Vektor dengan Skalar

i. Vektor dengan scalar

Perkalian vektor $\vec{u}$ dengan scalar $k, (k\,\vec{u})$ didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya k kali panjang vektor $\vec{u}$ dengan arah:

- Searah dengan $\vec{u}$, jika $k > 0$
- Berlawanan arah dengan $\vec{u}$, jika $k < 0$



Contoh:

Misalkan $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ maka

1. $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$
2. $k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$

Operasi Vektor_Perkalian antar Vektor (Dot Product)

ii. Vektor dengan vektor

a. Hasilkali Titik (Dot Product)

Hasilkali titik merupakan operasi antara **dua buah vektor pada ruang yang sama**. Hasil perkalian ini **menghasilkan sebuah skalar.**

Misalkan $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah vektor pada ruang yang sama, Maka hasil kali titik antara 2 vektor tersebut adalah:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos \alpha$$

dimana

$\|\vec{u}\|$: panjang $\vec{u}$

$\|\vec{v}\|$: panjang $\vec{v}$

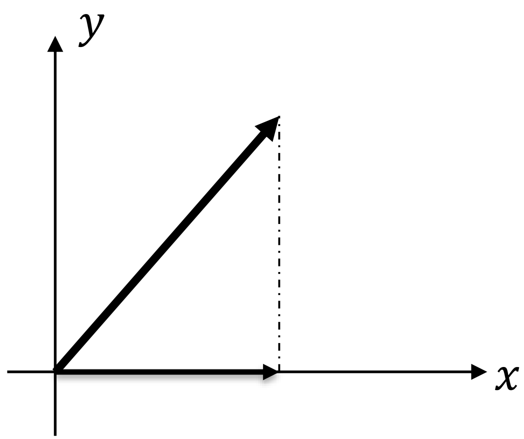
α : sudut antara keduanya

Operasi Vektor_Perkalian antar Vektor (Dot Product)_2

Contoh:

Tentukan hasil kali titik dari dua vektor $\vec{a} = 2\hat{\imath}$ dan $\vec{b} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$

Jawab:

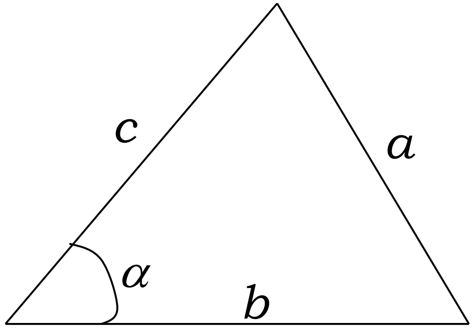


Karena $\tan\alpha = 1$; artinya $\alpha = 45$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|a\|\|b\| \cos\alpha$$
$$= 2\sqrt{8}\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= 4$$

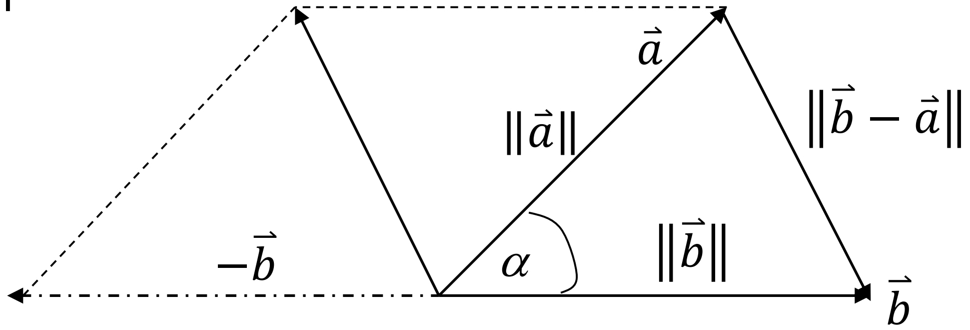
Operasi Vektor_Perkalian antar Vektor (Dot Product)_3

Ingat aturan cosinus



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Perhatikan



$$\left\|\vec{b} - \vec{a}\right\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2 - 2\|\vec{a}\|\left\|\vec{b}\right\|\cos\alpha$$

Operasi Vektor_Perkalian antar Vektor (Dot Product)_4

Selanjutnya dapat ditulis

$$\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{b} - \vec{a}\|^2\right)$$

Ingat bahwa:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\alpha$
2. $\|\vec{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$
3. $\|\vec{b}\|^2 = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$
4. $\|\vec{b} - \vec{a}\|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2$

$$= b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 - 2b_1a_1 - 2b_2a_2 - \cdots - 2b_na_n$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}$$

Operasi Vektor_Perkalian antar Vektor (Dot Product)_5

Perhatikan setiap sukunya, diperoleh hubungan:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

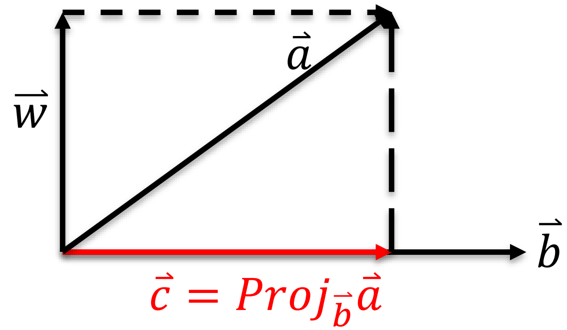
Tentukan kembali hasil kali titik dari dua vektor pada contoh sebelumnya, maka

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ &= 2(2) + 0(2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Beberapa sifat hasilkali titik:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{c})$
3. $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = k\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot k\vec{b}$, dimana $k \in R$

Operasi Vektor_Perkalian antar Vektor (Dot Product)_6



Terlihat bahwa

$$Proj_{\vec{b}}\vec{a} = \vec{c} = k\vec{b}$$

Karena

$$\vec{a} = \vec{w} + \vec{c}$$

$$\leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{w} + \vec{c}) \cdot \vec{b}$$
$$= \vec{w} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{b}$$
$$= k\,\vec{b} \cdot \vec{b}$$
$$= k\left\|\vec{b}\right\|^2$$

$$\leftrightarrow k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left\|\vec{b}\right\|^2}$$

Sehingga dapat disimpulkan

$$\boxed{Proj_{\vec{b}}\vec{a} = \vec{c} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left\|\vec{b}\right\|^2}\vec{b}}$$

Operasi Vektor_Perkalian antar Vektor (Dot Product)_7

Contoh:

Tentukan proyeksi orthogonal vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ terhadap vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Jawab:

$$Proj_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}}{1^2 + 3^2 + (-4)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-2 + (-12) + (-12)}{26} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{26}{26} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Operasi Vektor_Perkalian antar Vektor (Cross Product)_1

b. Hasilkali silang (Cross Product)

Hasilkali silang merupakan operasi antara **dua buah vektor pada ruang** $\mathbb{R}^3$. Hasil perkalian ini **menghasilkan sebuah vektor di** $\mathbb{R}^3$ **yang tegak lurus terhadap kedua vektor lainnya.**

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{\imath} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_{!} & b_2 \end{vmatrix} \hat{k}$$

Operasi Vektor_Perkalian antar Vektor (Cross Product)_2

Contoh:

Tentukan $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ dimana $\vec{u} = (1,2,-2),\ \vec{v} = (3,0,1)$

Jawab:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(2.1 - 0(-2)\right)\hat{\imath} + (3(-2)-1(1))\ \hat{\jmath} + (1(0)-3(2))\ \hat{k}$$

$$= 2\hat{\imath} - 7\hat{\jmath} - 6\hat{k}$$

Operasi Vektor_Perkalian antar Vektor (Cross Product)_3

Beberapa sifat Cross Product:

a. $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$

b. $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$

c. $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

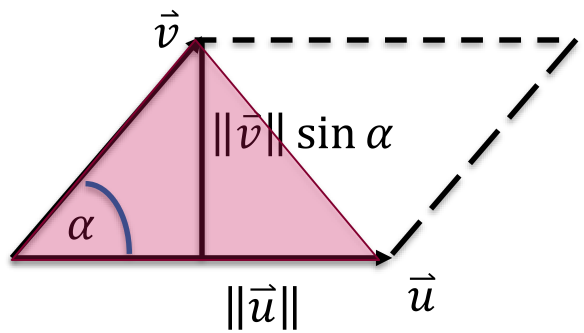
Dari sifat ke-3 diperoleh

$$
\begin{aligned}
\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \\
&= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \\
&= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos \alpha)^2 \\
&= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \cos^2 \alpha \\
&= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 (1 + \cos^2 \alpha) \\
&= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \sin^2 \alpha
\end{aligned}
$$

Jadi $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin \alpha$

Operasi Vektor_Perkalian antar Vektor (Cross Product)_4

Perhatikan Ilustrasi berikut:



Luas Jajar Genjang=$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin \alpha$

Luas Segitiga yang dibentuk oleh kedua vektor tersebut adalah

$$\frac{1}{2}\|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

Operasi Vektor_Perkalian antar Vektor (Cross Product)_5

Diketahui titik-titik diruang adalah

$A = (1, -1, -2)$
$B = (4,1,0)$
$C = (2,3,3)$

Dengan menggunakan hasilkali silang, tentukan luas segitiga ABC!

Jawab:

Orientasi pada titik A

1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (4,1,0)$-$(1, -1, -2)$=(3,2,2)
2. $\overrightarrow{AC} = C - A = (2,3,3)$ -$(1, -1, -2)$=(1,4,5)

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\hat{\imath} - 13\hat{\jmath} + 10\hat{k}$$

Luas segitiga ABC yang berimpit di A adalah

Luas= $\frac{1}{2}\sqrt{4 + 169 + 100} = \frac{1}{2}\sqrt{273}$

Operasi Vektor_Perkalian antar Vektor (Cross Product)_6

Orientasi pada titik B

1. $\overrightarrow{BA} = A - B = (1, -1, -2) - (4,1,0)$=(-3,-2,-2)
2. $\overrightarrow{BC} = C - B = (2,3,3)$ -$(4,1,0)$=(-2,2,3)

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2\hat{\imath} + 13\hat{\jmath} - 10\hat{k}$$

Luas segitiga ABC yang berimpit di A adalah

Luas= $\frac{1}{2}\sqrt{4 + 169 + 100} = \frac{1}{2}\sqrt{273}$

LATIHAN

1. Tentukan $\cos\alpha$ sudut yang terbentuk oleh pasangan vektor berikut:
   a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$
   b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$
2. Tentukan proyeksi orthogonal vektor terhadap vektor dan tentukan panjang vektor proyeksi tersebut:
   a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
   b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
3. Tentukan 2 buah vektor satuan di bidang yang tegak lurus terhadap

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

LATIHAN_2

4. Tentukan vektor yang tegak lurus terhadap vektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dan } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5. Tentukan luas segitiga yang mempunyai titik sudut $P(2,0,-3), Q(1,4,5)$ dan $R(7,2,9)$

THANK YOU