Solusi SPL dengan Matriks Invers

Tinjau persamaan linear berikut

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

atau

$$AX = B$$

Jika kedua ruas dikalikan denganA^{-1}, maka didapat

$$A^{-1}A\,X = A^{-1}B$$

Karena $A^{-1}A = I$ maka

$$X = A^{-1}B$$

Ingat bahwa suatu matriks *A* mempunyai invers jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

Solusi SPL dengan Matriks Invers(2)

Contoh :

Tentukan solusi dari SPL berikut :

$$\begin{cases} a + c = 4 \\ a - b = -1 \\ 2b + c = 7 \end{cases}$$

Jawab :

Perhatikan bahwa

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Jadi A mempunyai Invers

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Solusi SPL dengan Matriks Invers(3)

sehingga $X = A^{-1} B$ berbentuk :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Jadi, Solusi SPL tersebut adalah $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Solusi SPL dengan Aturan Cramer

Misalkan SPL ditulis dalam bentuk AX = B, yaitu :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Jika determinan *A* tidak sama dengan nol maka solusi dapat ditentukan satu persatu (peubah $ke-i, x_i$)

Langkah-langkah aturan *cramer* adalah :

a. Hitung determinan *A*

b. Tentukan A_i ➔ matriks *A* dimana kolom ke-*i* diganti oleh B.

Contoh :

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Solusi SPL dengan Aturan Cramer(2)

c. Hitung $|A_i|$

d. Solusi SPL untuk peubah adalah $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$

Contoh :

Tentukan solusi b dari SPL berikut :

$$\begin{cases} a + c = 4 \\ a - b = -1 \\ 2b + c = 7 \end{cases}$$

Jawab :

Perhatikan bahwa $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Solusi SPL dengan Aturan Cramer(3)

Maka

$$b = \frac{\det(Ab)}{\det(A)}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{1}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1-0) + (-4)(1-0) + 1(7-0) = -1 + (-4) + 7$$

Jadi, Solusi peubah b yang memenuhi SPL adalah $b = 2$

Solusi SPL dengan Aturan Cramer(4)

Tentukan solusi SPL untuk peubah a ?

$$a = \frac{\det(Aa)}{\det(A)}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{1}$$

$$= 4\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-1-0)+1(-2-(-7))$$

$$= -4 + 0 + 5$$

$$= 1$$

Sistem Persamaan Linear Homogen

Bentuk umum

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- SPL homogen merupakan SPL yang konsisten (selalu mempunyai solusi).
- Solusi SPL homogen dikatakan tunggal jika solusi itu adalah

  $$\{x_1, x_2, \ldots, x_n = 0\}$$

  Jika tidak demikian,
  SPL homogen mempunyai solusi tak hingga banyak(biasanya ditulis dalam bentuk parameter)

Sistem Persamaan Linear Homogen(2)

Contoh :

Tentukan solusi SPL homogen berikut

$$\begin{cases} 2p + q - 2r - 2s = 0 \\ p - q + 2r - s = 0 \\ -p + 2q - 4r + s = 0 \\ 3p - 3s = 0 \end{cases}$$

SPL dapat ditulis dalam bentuk

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Sistem Persamaan Linear Homogen(3)

dengan melakukan OBE diperoleh :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Maka solusi SPL homogen adalah :

$p = a$,

$q = 2b$,

$s = a$, dan

$r = b$,

dimana *a, b* merupakan parameter.

Sistem Persamaan Linear Homogen(4)

Contoh :

Diketahui SPL

$$\begin{pmatrix} -b & 0 & 0 \\ 0 & 1-b & 1 \\ 0 & 1 & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a. Tentukan *b* agar SPL memiliki solusi tak hingga banyak

b. Tuliskan solusi SPL tersebut

Jawab :

Solusi suatu SPL homogen adalah tak tunggal
jika *det*(A) = 0.

Sistem Persamaan Linear Homogen(5)

$$\begin{vmatrix} -b & 0 & 0 \\ 0 & 1-b & 1 \\ 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (-b)\begin{vmatrix} 1-b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (-b)\ ((1 - b)(1 - b)) - 1 \quad = 0$

$\Leftrightarrow (-b)\ (b2 - 2b + 1 - 1) \quad = 0$

$\Leftrightarrow (-b)\ (b2 - 2b) \quad = 0$

$\Leftrightarrow b = 0$ *atau* $b = 2$

Solusi SPL tak hingga banyak saat $b = 0$ atau $b = 2$

Sistem Persamaan Linear Homogen(6)

- Saat $b = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Dengan OBE maka

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Misalkan p,q adalah parameter Riil, maka

$$\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -q \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} q$$

Sistem Persamaan Linear Homogen(7)

- Saat $b = 2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

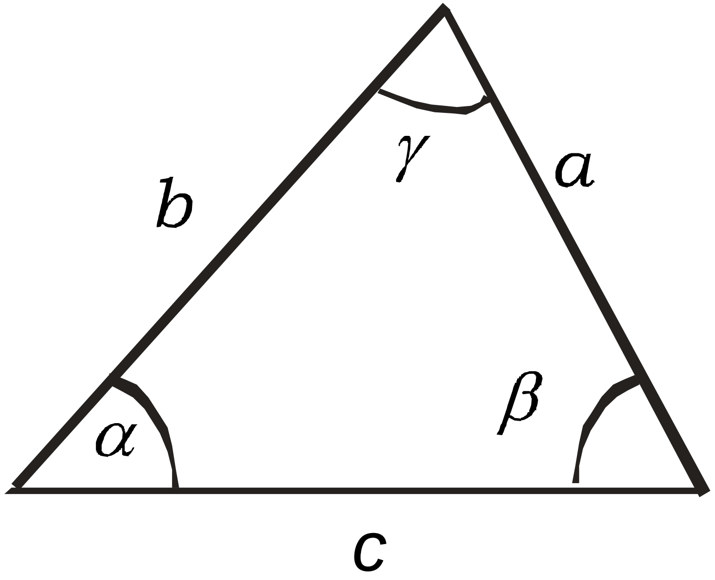
- Dengan OBE maka

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Misalkan q adalah parameter Riil, maka $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} q$

Sistem Persamaan Linear

Perhatikan ilustrasi segitiga berikut :



Tunjukan bahwa :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Sistem Persamaan Linear(2)

Jawab :

Dari gambar tersebut diketahui bahwa :

$$c\cos\beta + b\cos\gamma = a$$
$$c\cos\alpha + a\cos\gamma = b$$
$$b\cos\alpha + a\cos\beta = c$$

atau

$$\begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Sistem Persamaan Linear(3)

- Perhatikan bahwa :

$$\det\begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix} = 0 + c(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} c & a \\ b & 0 \end{vmatrix} + b(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} c & 0 \\ b & a \end{vmatrix}$$

$$= -c(ab) + b(ac)$$

dengan aturan Crammer diperoleh bahwa :

$$\cos\alpha = \frac{\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & 0 & a \\ c & a & 0 \end{vmatrix}}{2abc} = \frac{1}{2abc}\left(c\,(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} b & a \\ c & 0 \end{vmatrix} + 0 + a\,(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \right)$$

Sistem Persamaan Linear(4)

$$\cos\alpha = \frac{ac^2 - a^3 + a^2b^2}{2abc}$$

$$= \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2bc}$$

Jadi, terbukt bahwa :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

LATIHAN

1. Tentukan solusi SPL berikut :

$$\begin{aligned} 2a - 8b &= 12 \\ 3a - 6b &= 9 \\ -a + 2b &= -4 \end{aligned}$$

2. Tentukan solusi SPL :

$$\begin{aligned} 2p - 2q - r + 3s &= 4 \\ q + 2s &= 1 \\ -2p + p - 2q - 4s &= -2 \end{aligned}$$

3. Tentukan solusi SPL homogen berikut :

$$\begin{aligned} p - 5q - 4r - 7t &= 0 \\ 2p + 10q - 7r + s - 7t &= 0 \\ r + s + 7t &= 0 \\ -2p - 10q + 8r + s + 18t &= 0 \end{aligned}$$

LATIHAN(2)

4. Diketahui SPL *AX = B*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tentukan solusi SPL di atas dengan menggunakan :

- operasi baris elementer (OBE)
- Invers matrik
- Aturan Cramer

5. Diketahui

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Tentukan $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ yang memenuhi.

LATIHAN(3)

6. SPL homogen (dengan peubah *p*, *q*, dan *r*)

$$p + 2q + r = 0$$
$$q + 2r = 0$$
$$k^2 p + (k+1)\, q + r = 0$$

Tentukan nilai *k* sehingga SPL punya solusi tunggal

7. Misalkan $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

Tentukan vektor tak nol $\bar{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sehingga $B\bar{u} \ = \ 6\bar{u}$


Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

THANK YOU