Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

MUH1G3/ MATRIKS DAN RUANG VEKTOR

TIM DOSEN

3 Sistem Persamaan Linear

Sistem Persamaan Linear

Sub Pokok Bahasan

- Pendahuluan
- Solusi SPL dengan OBE
- Solusi SPL dengan Invers matriks dan Aturan Crammer
- SPL Homogen

Beberapa Aplikasi Matriks

- Rangkaian listrik
- Jaringan Komputer
- Model Ekonomi
- dan lain-lain.

Pendahuluan

Persamaan linear adalah persamaan dimana peubahnya tidak memuat eksponensial, trigonometri (seperti *sin*, *cos*, dll.), perkalian, pembagian dengan peubah lain atau dirinya sendiri.

Contoh :

Jika perusahaan A membeli 1 Laptop (x) dan 2 PC (y) maka ia harus membayar $ 5000, sedangkan jika membeli 3 Laptop dan 1 PC maka ia harus membayar $ 10000.

Representasi dari masalah tersebut dalam bentuk SPL

$$\begin{cases} x + 2y = 5000 \\ 3x + y = 10000 \end{cases}$$

Pendahuluan(2)

- Bentuk umum system persamaan linear

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{matrix}$$

- Dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Pendahuluan(3)

Atau

$$AX = B$$

dimana

- A dinamakan matriks koefisien
- X dinamakan matriks peubah
- B dinamakan matriks konstanta

Contoh :

Perhatikan bahwa SPL

$$\begin{cases} x + 2y = 5000 \\ 3x + y = 10000 \end{cases}$$

dapat ditulis dalam bentuk perkalian matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 10000 \end{bmatrix}$$

Solusi SPL

Solusi SPL adalah Himpunan bilangan Real dimana jika disubstitusikan pada peubah suatu SPL akan memenuhi nilai kebenaran SPL tersebut.

Perhatikan SPL :

$$\begin{cases} x + 2y = 5000 \\ 3x + y = 10000 \end{cases}$$

x + 2.y = 3000 + 2.1000 = 3000+2000=5000

3x + y = 3.3000 + 1000 = 9000 + 1000 = 10000

Maka

$\{x = 3000, y = 1000\}$ merupakan solusi SPL

$\{x = 1000, y = 3000\}$ bukan solusi SPL

Suatu SPL, terkait dengan solusi, mempunyai tiga kemungkinan :

- SPL mempunyai solusi tunggal
- SPL mempunyai solusi tak hingga banyak
- SPL tidak mempunyai solusi

x + 2.y = 1000 + 2.3000 = 1000 + 6000= 7000 xxx

3x + y = 3.1000 + 3000 = 3000 + 3000 = 6000 xxx

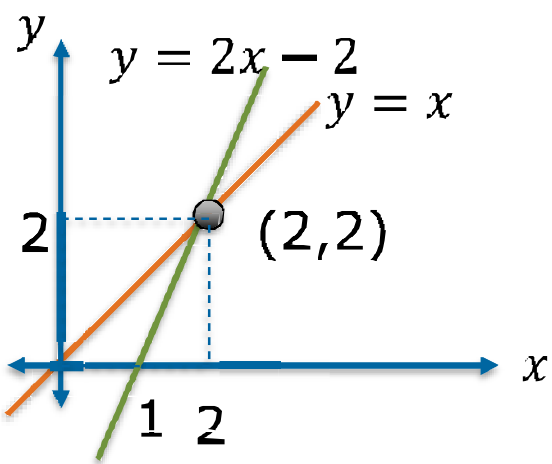
Solusi SPL_Ilustrasi Pada Bidang Kartesius

CASE I

Perhatikan SPL

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

Jika digambar dalam kartesius



(2, 2) merupakan titik potong dua garis tersebut

Tidak ada titik potong yang lain selain titik tersebut

Artinya : SPL $2x - y = 2$ dan $x - y = 0$ mempunyai **solusi tunggal**, yaitu $x = 2, y = 2$

Solusi SPL_Ilustrasi Pada Bidang Kartesius(2)

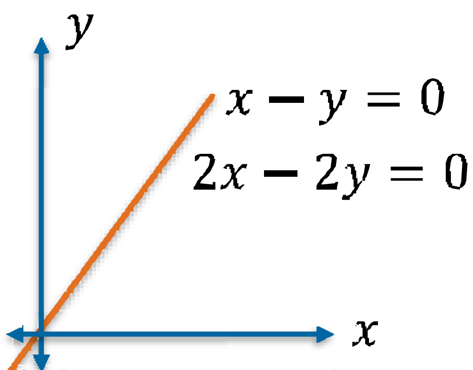
CASE II

Perhatikan SPL

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

Jika kedua ruas pada persamaan kedua dikalikan ½, maka akan diperoleh persamaan yang sama dengan pers. pertama

Jika digambar dalam kartesius



Terlihat bahwa dua garis tersebut adalah berimpit (Titik potong kedua garis banyak sekali disepanjang garis tersebut)

Artinya, SPL diatas mempunyai **solusi tak hingga banyak**

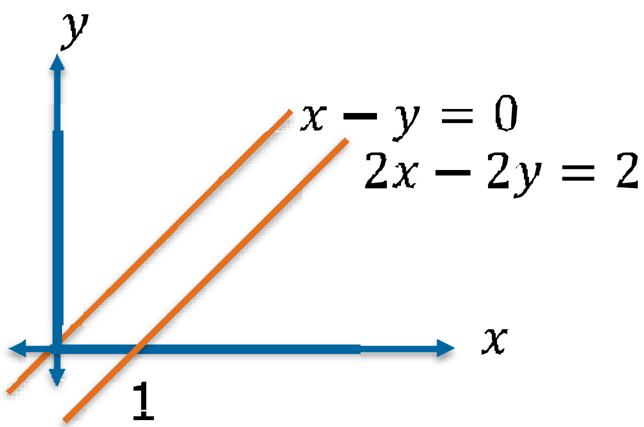
Solusi SPL_Ilustrasi Pada Bidang Kartesius(3)

CASE III

Perhatikan SPL

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

Jika digambar dalam kartesius



Terlihat bahwa dua garis tersebut adalah sejajar (Tak akan pernah diperoleh titik potong kedua garis itu)

Artinya, SPL diatas **TIDAK mempunyai solusi**

Solusi Sistem Persamaan Linear dengan OBE

Solusi Sistem Persamaan Linear dengan OBE

- Tulis SPL dalam bentuk matriks yang diperbesar
- Lakukan OBE sampai menjadi eselon baris tereduksi

Contoh :

Tentukan solusi dari SPL

$$\begin{aligned} 3x - y &= 5 \\ x + 3y &= 5 \end{aligned}$$

Jawab :

Matriks yang diperbesar dari SPL

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -10 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Solusi Sistem Persamaan Linear dengan OBE(2)

Tulis kembali matriks yang diperbesar hasil OBE menjadi perkalian matriks

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Maka, solusi SPL tersebut adalah $x = 2$ dan $y = 1$

Contoh :

Tentukan solusi (jika ada) dari SPL berikut :

a. $\begin{cases} a + c = 4 \\ a - b = -1 \\ 2b + c = 7 \end{cases}$

Solusi Sistem Persamaan Linear dengan OBE(3)

b. $\begin{cases} a + c = 4 \\ a - b = -1 \\ -a + b = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} a + c = 4 \\ a - b = -1 \\ -a + b = 2 \end{cases}$

Jawab :

a. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Terlihat bahwa solusi SPL adalah $a = 1, b = 2,$ dan $c = 3$

Solusi Sistem Persamaan Linear dengan OBE(4)

b. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Jika dikembalikan kedalam bentuk perkalian matriks diperoleh :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ini memberikan $a + c = 4$ dan $b + c = 5$.

Dengan memilih $c = t$, dimana t adalah parameter.

Maka solusi SPL tersebut adalah :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$, dimana t adalah parameter

Solusi Sistem Persamaan Linear dengan OBE(5)

c.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Terlihat bahwa ada baris nol pada matriks koefisien tetapi matriks konstanta pada baris ke-3 sama dengan 1 (tak nol)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dari baris ke-3 diperoleh hubungan bahwa

$0.a + 0.b + 0.c = 1.$

Tak ada nilai a , b dan c yang memenuhi kesamaan ini.

Jadi, SPL tersebut tidak memiliki solusi.

Solusi Sistem Persamaan Linear dengan OBE(6)

Contoh :

Diketahui SPL :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)\,z = a + 2 \end{cases}$$

Tentukan a sehingga SPL :

a. Mempunyai solusi tunggal

b. Tidak mempunyai solusi

c. Solusi yang tidak terhingga

Solusi Sistem Persamaan Linear dengan OBE(7)

Jawab:

Matrik diperbesar dari SPL adalah

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2-2 & a-14 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{array}\right)$$

a. Agar SPL mempunyai solusi tunggal:

$a^2 - 16 \neq 0$ sehingga $a \neq 4$ dan $a \neq -4$

Solusi Sistem Persamaan Linear dengan OBE(8)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{array}\right)$$

b. Perhatikan baris ketiga

$0x + 0y + (a^2 - 16a)\,z = a - 4$

SPL tidak mempunyai solusi saat $a^2 - 16 = 0$ dan $a - 4 \neq 0$

Sehingga $a = \pm 4$ dan $a \neq 4$.

Jadi, $a = -4$.

c.SPL mempunyai solusi tak hingga banyak jika memenuhi persamaan

$$a^2 - 16 = 0 \quad \text{dan} \quad a - 4 = 0$$

Jadi, $a = 4$