Determinan dengan Ekspansi Kofaktor

Determinan dengan ekspansi kofaktor

Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beberapa definisi yang perlu diketahui :

- M_{ij} disebut **Minor- *ij*** yaitu determinan matriks A dengan menghilangkan baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ matriks A.

  Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{maka } M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor(2)

- C_{ij} dinamakan **kofaktor** $-$ ***ij*** yaitu $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

maka

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3 .2$$

$$= -2$$

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor(3)

Secara umum, cara menghitung determinan dengan ekspansi kofaktor:

- Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke$-i$

$$\det(A) = ai_1 Ci_1 + ai_2 Ci_2 + ..+ a_{in} C_{in}$$

- Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke$-j$

$$\det(A) = a_{ij} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \ldots + a_{nj} C_{nj}$$

Contoh: Hitunglah $\det(A)$ dengan ekspansi kofaktor :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor(4)

Jawab :

A. Misalkan, kita akan menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-3

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{3j} c_{3j}$$

$$= a_{31}\, C_{31} + a_{32}\, C_{32} + a_{33}\, C_{33}$$

$$= 0 + 1\,(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\,(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 2 + 6 = 4$$

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor(5)

B. Menghitung det (A) dengan ekspansi kopaktor sepanjang **kolom ke-3**

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i3} c_{i3}$$

$$= a_{13}\,C_{13} + a_{23}\,C_{23} + a_{33}\,C_{33}$$

$$= 0 + 1\,(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\,(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 2 + 6$$

$$= 4$$

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor(6)

- Misal $A_{n\times n}$ merupakan matriks yang memiliki invers dan C_{ij} adalah kofaktor a_{ij}. Maka

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor A. Transpos dari matriks tersebut dinamakan adjoin A (notasi $adj(A)$).

$$adj\,(A) = C^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor(7)

Misalkan A punya invers
maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj\ (A)$$

A mempunyai invers *jika dan hanya jika* $\det(A) \quad 0$.

Beberapa sifat determinan matriks adalah :

1. Jika A adalah sembarang matriks kuadrat, maka $\det \quad (A) = \det(A^t)$
2. Jika A dan B merupakan matriks kuadrat berukuran sama, maka: $\det(A)\det(B) = \det(AB)$
3. Jika A mempunyai invers maka :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor(8)

Contoh:

Diketahui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tentukan matriks adjoin A

Jawab :

Perhatikan bahwa

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$c_{21} = 2,\ c_{22} = 1,\ c_{23} = -2,\ c_{31} = 1,\ c_{32} = 1,\ \text{dan}\ \ c_{33} = -1.$$

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor(9)

Sehingga matriks kofaktor dari A :

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Maka matriks Adjoin dari A adalah :

$$adj(A) = C^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

LATIHAN

1. Tentukan determinan matriks dengan OBE dan ekspansi kofaktor

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad Q = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Diketahui :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tunjukan bahwa : *det* (A) *det* (B) = *det* (AB)

LATIHAN(2)

3. Diketahui :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 4 \end{pmatrix}$$

Tentukan k jika *det* (D) = 29

4. Diketahui matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Jika B = A^{-1} dan A^t merupakan transpos dari A. Tentukan nilai

$$x = \frac{\det\left(2A^2\right) - \det(5B)}{\det\left(A^t B\right)}$$


Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

THANK YOU