Fakultas Informatika
School of Computing
Telkom University

MUH1G3/ MATRIKS DAN RUANG VEKTOR

TIM DOSEN

2 Determinan Matriks

Determinan Matriks

Sub Pokok Bahasan

- Permutasi dan Determinan Matriks
- Determinan dengan OBE
- Determinan dengan Ekspansi Kofaktor

Beberapa Aplikasi Matriks

- Solusi SPL
- Optimasi
- Model Ekonomi
- dan lain-lain.

Permutasi dan Determinan Matriks

- **Permutasi** adalah susunan yang mungkin dibuat dengan memperhatikan urutan
- Contoh: Permutasi dari {1,2,3} adalah
  - (1,2,3)
  - (1,3,2)
  - (2,1,3)
  - (2,3,1)
  - (3,1,2)
  - (3,2,1)

Permutasi dan Determinan Matriks(2)

- **Invers dalam Permutasi**

  Sebuah inversi dikatakan terjadi dalam suatu permutasi jika bilangan bulat yang lebih besar mendahului bilangan bulat yang lainnya.

- Jika jumlah inversi dalam satu permutasinya genap maka disebut **permutasi genap**, dan begitu pula sebaliknya untuk **permutasi ganjil.**
  - (1,2,3) → permutasi genap
  - (1,3,2) → permutasi ganjil
  - (2,1,3) → permutasi ganjil
  - (2,3,1) → permutasi genap
  - (3,1,2) → permutasi genap
  - (3,2,1) → permutasi ganjil

Permutasi dan Determinan Matriks(3)

- **Hasil perkalian elementer** matriks berukuran $n \times n$ adalah hasilkali n buah unsur dari matriks tersebut tanpa ada pengambilan unsur dari baris dan kolom yang sama

- Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Terdapat 6 (atau 3!) hasil kali elementer dari matriks A, yakni

$$a_{11}a_{22}a_{33}, \quad a_{11}a_{23}a_{32}, \quad a_{12}a_{21}a_{33},$$
$$a_{12}a_{23}a_{31}, \quad a_{13}a_{21}a_{32}, \quad a_{13}a_{22}a_{31}$$

Permutasi dan Determinan Matriks(4)

- **Hasil kali elementer bertanda**

$a_{11}a_{22}a_{33}$
$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$
$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Perhatikan…
Tanda (+/-) muncul sesuai hasil klasifikasi permutasi indeks kolom, yaitu : jika genap → + (positif)
jika ganjil → - (negatif)

- **Determinan** didefinisikan sebagai penjumlahan hasil kali elementer dengan bertanda.

  Sehingga hasil kali elementer dari matriks A (determinan) dengan orde 3×3 adalah

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Permutasi dan Determinan Matriks(5)

- **Contoh:**

Tentukan Determinan Matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Jawab:

Menurut definisi:

$$\boldsymbol{det(A_{3\times 3}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$

Atau dapat dilihat lebih mudah menggunakan

$$|A| = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Cara ini tidak berlaku untuk matriks 4x4, dst.

ket : jumlahkan hasil kali elemen yang terlintasi garis hijau dan kurangi hasil kali elemen yang terlintasi garis merah

Permutasi dan Determinan Matriks(6)

- **Contoh:**

Tentukan Determinan Matriks

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{matrix}$$

Jawab:

$$|B| = \left| \begin{matrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{matrix}$$

$$= (3)(1)(1) + (2)(0)(-2) + (-1)(1)(-2) - (-1)(1)(-2) - (3)(0)(-2) - (2)(1)(1)$$

$$= 3 + 0 + 2 - 2 - 0 - 2$$

$$= 1$$

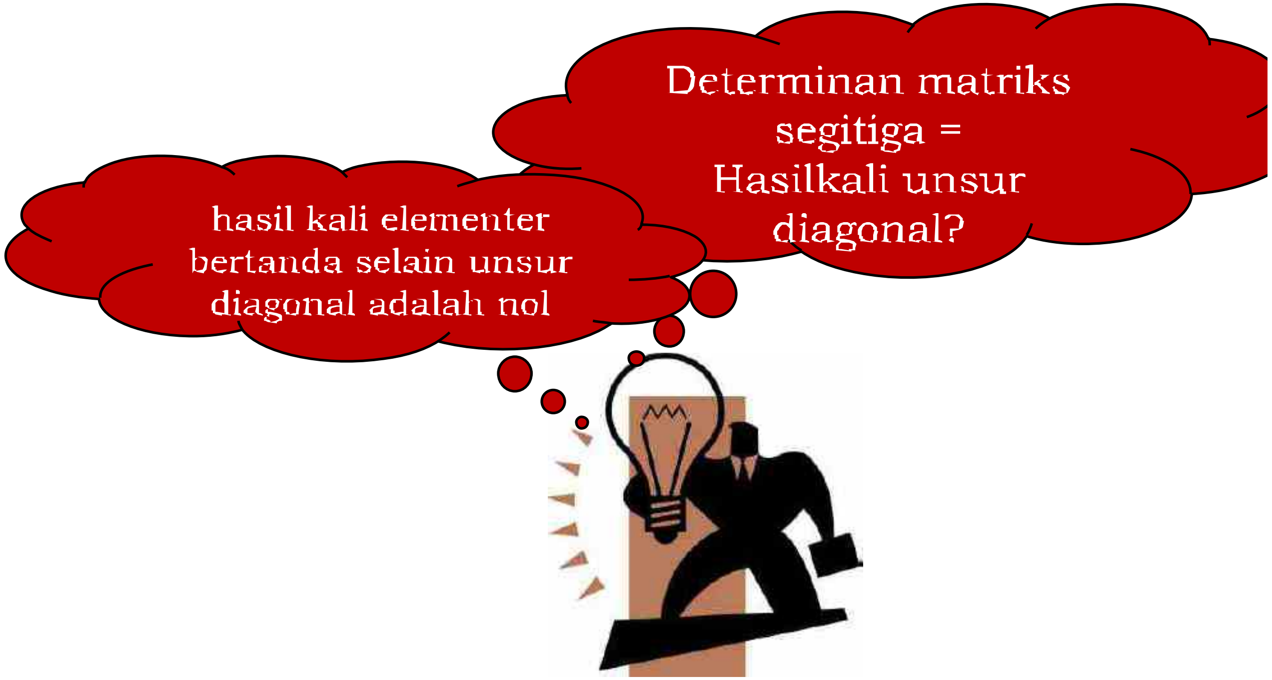
Determinan dengan OBE

- Perhatikan

$$a.\ \det\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix} = 3$$

$$b.\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 4 & 5\\0 & 0 & 6\end{vmatrix} = 24$$

$$c.\ \det\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\4 & 5 & 0\\7 & 8 & 9\end{bmatrix} = 45$$



Determinan dengan OBE(2)

Menghitung determinan matriks dengan cara mengkalikan unsur-unsur diagonalnya hanya berlaku untuk matriks dengan bentuk segitiga bawah ataupun matriks segitiga atas.

Oleh karena itu :

Matriks bujur sangkar ~ OBE ~ Matriks Segitiga

Berikut ini adalah **pengaruh OBE** pada nilai determinan suatu matriks, yaitu :

1. Jika matriks B berasal dari matriks A dengan satu kali pertukaran baris maka $\boldsymbol{det}\,(\boldsymbol{B}) = -\,\boldsymbol{det}\,(\boldsymbol{A})$

   Contoh :

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 3$$

   sehingga

   $$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 = -|A|$$

Determinan dengan OBE(3)

2. Jika matriks B berasal dari matriks A dengan mengalikan satu baris A dengan k maka $\boldsymbol{det}\,(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{k}\,\boldsymbol{det}\,(\boldsymbol{A})$

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 3 \qquad \text{dan} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

maka

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2|A| = 6$$

3. Jika matriks B berasal dari matriks A dengan perkalian sebuah baris dengan konstanta tak nol k lalu dijumlahkan pada baris lain maka $\boldsymbol{det}\,(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{det}\,(\boldsymbol{A})$

kolom 1 : -2.1+2=0 ; kolom 2 : -2.3+-6=-12

Contoh

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -12$$

OBE yang dilakukan pada matriks tersebut adalah $-2b_1 + b_2$

Perhatikan $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = -12$

Determinan dengan OBE(4)

Tentukan determinan matriks berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{pertukaran baris ke - 1 dan ke - 2}$$

Determinan dengan OBE(5)

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad -2b_1 + b_2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} \qquad \text{Pertukaran baris ke - 2 dan ke - 3}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \qquad 3b_2 + b_3$$

$= 4$ (hasil perkalian semua unsur diagonalnya)