Operasi Matriks

Beberapa Operasi Matriks yang perlu diketahui :

1. Penjumlahan Matriks
2. Perkalian Matriks
   - Perkalian skalar dengan matriks
   - Perkalian matriks dengan matriks
3. Operasi Baris Elementer (OBE)

Operasi Matriks_Penjumlahan Matriks

- Syarat: Matriks yang dijumlahkan berorde (berukuran) sama
- Contoh:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d+j & e+k & f+l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Operasi Matriks_Perkalian Matriks

- Terdapat 2 jenis Perkalian dalam Matriks
  - Perkalian scalar dengan matriks

$$k\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kp & kq \\ kr & ks \\ kt & ku \end{bmatrix}$$

  - Perkalian matriks dengan matriks

    Misal terdapat 2 buah matriks A berorde $p \times q$ dan B berorde $m \times n$.

    - Matriks A dapat dikalikan dengan matriks B jika $q = m$. Hasil perkaliannya (AB) berorde $p \times n$.
    - Matriks B dapat dikalikan dengan matriks A jika $n = p$. Hasil perkaliannya (BA) berorde $m \times q$.

Operasi Matriks_Perkalian Matriks(2)

- Contoh:

Diketahui $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}_{2\times 3}$ dan $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}_{3\times 2}$ maka

$$AB = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} ap + br + ct & aq + bs + cu \\ dp + er + ft & dq + es + fu \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Operasi Matriks_Perkalian dan Penjumlahan

- Misalkan A, B, C adalah matriks berukuran sama dena α, β merupakan unsur bilangan Riil,

  Maka operasi matriks memenuhi sifat berikut:

  1. $A + B = B + A$
  2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
  3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
  4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

Operasi Matriks_Perkalian dan Penjumlahan(2)

- Contoh:

Diketahui matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan

a. AA^T

b. A^TA

Operasi Matriks_Perkalian dan Penjumlahan(3)

- Jawab:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka

$$AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 13 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Sedangkan

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Operasi Matriks_Operasi Baris Elementer

Operasi baris elementer meliputi :

1. Pertukaran Baris
2. Perkalian suatu baris dengan konstanta tak nol
3. Penjumlahan hasil perkalian suatu baris dengan konstanta tak nol (seperti butir 2) dengan baris yang lain.

- Contoh OBE 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \underset{\sim}{b_1 \leftrightarrow b_2} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

"Baris pertama ditukar dengan baris ke 2"

Operasi Matriks_Operasi Baris Elementer(2)

- Contoh OBE 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\tfrac{1}{2}b_1} \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 3 \quad 4 \quad 1 \end{bmatrix}$$

"Baris pertama dikalikan dengan konstanta ½"

- Contoh OBE 3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\tfrac{1}{2}b_1 + b_2} \begin{bmatrix} 2 \quad 4 \quad 6 \\ \boxed{4 \quad 6 \quad 4} \end{bmatrix}$$

"Baris pertama dikalikan dengan konstanta 1/2 **LALU** ditambahkan **KE** baris kedua"

Operasi Matriks_Operasi Baris Elementer(3)

- Beberapa definisi yang perlu diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Baris pertama dan baris dua dinamakan **baris tak nol** (karena pada kedua baris tersebut memuat unsur tak nol)
  - Bilangan 1 pada baris pertama dan bilangan 3 pada baris kedua dinamakan **unsur pertama tak nol** pada baris masing-masing
  - Bilangan 1 pada baris pertama dan kolom pertama dinamakan **satu utama**
  - Baris ketiga dinamakan **baris nol** (karena setiap unsur pada baris ketiga adalah nol)

Operasi Matriks_Operasi Baris Elementer(4)

- Sifat matriks hasil OBE :
  - Pada baris tak nol maka unsur tak nol pertama adalah 1(dinamakan satu utama)
  - Pada baris yang berturutan, baris yang lebih rendah memuat satu utama yang lebih ke kanan
  - Jika ada baris nol maka baris tersebut diletakan pada baris yang paling bawah
  - Pada kolom yang memuat unsur 1 utama, maka unsur yang lainnya adalah 0
- Suatu matriks dinamakan **eselon baris** jika memenuhi sifat **1,2, dan 3** (proses Eliminasi Gauss)
- Suatu matriks dinamakan **eselon baris tereduksi** jika memenuhi sifat **1,2,3, dan 4** (proses Eliminasi Gauss-Jordan)

Operasi Matriks_Operasi Baris Elementer(5)

- Contoh:

Tentukan matriks eselon baris tereduksi dari

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Operasi Matriks_Operasi Baris Elementer(6)

- *Jawab:*

$$A \underset{\sim}{-2b_1 + b_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{b_2 \leftrightarrow b_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \underset{\sim}{-2b_2 + b_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{-b_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{-b_3 + b_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{b_2 + b_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Operasi Matriks_Operasi Baris Elementer(7)

- Perhatikan hasil OBE tersebut

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Setiap baris mempunyai satu utama.

Tidak setiap kolom memiliki satu utama, karena jumlah baris lebih sedikit dari jumlah kolom

(kolom 4 tidak mempunyai satu utama)

Invers Matriks

- Misal A adalah matriks bujur sangkar. B dinamakan invers matriks A jika memenuhi

$$AB = I \text{ atau } BA = I$$

Sebaliknya, A juga dinamakan B. Notasi $A = B^{-1}$

- Salah satu cara menentukan invers matriks adalah menggunakan OBE.

$$(A|I) \sim \ldots \sim (I|A^{-1})$$

- Jika OBE tidak menghasilkan matriks identitas maka A tidak memiliki invers

Invers Matriks(2)

- Tentukan matriks invers (jika ada) dari:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{b_1 \leftrightarrow b_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} -3b_1 + b_2 \\ 2b_1 + b_3 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Invers Matriks(3)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{-b_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{-b_3 + b_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{-b_2 + b_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Jadi Invers Matriks dari A adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Invers Matriks(4)

- Perhatikan bahwa:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Invers Matriks(5)

- Berikut ini adalah sifat-sifat matriks invers

i. $(A^{-1})^{-1} = A$

ii. Jika A, B dapat dibalik atau memiliki invers maka $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

iii. Misal $k \in Riil$ maka $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

iv. Akibat dari (ii) maka $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

LATIHAN

- Diketahui:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, dan\ C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. AB

b. $3CA$

c. $(AB)C$

d. $(4B)C + 2C$

LATIHAN(2)

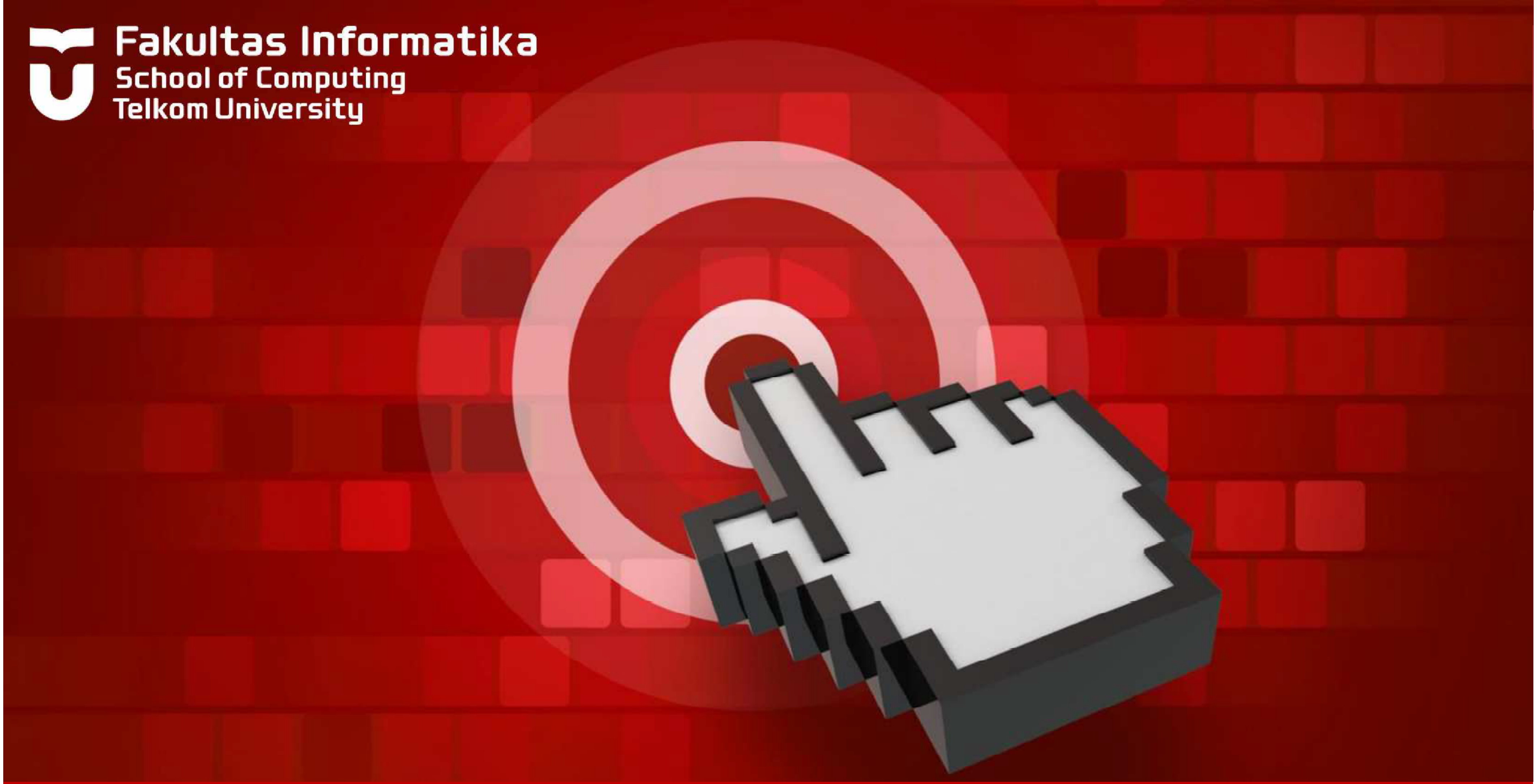
- Diketahui:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} dan\ E = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

e. Tentukan $D + EE$

f. Tentukan matriks bentuk eselon baris tereduksi dari A, B, C, D, E

g. Tentukan matriks invers dari D dan E (jika ada)



THANK YOU