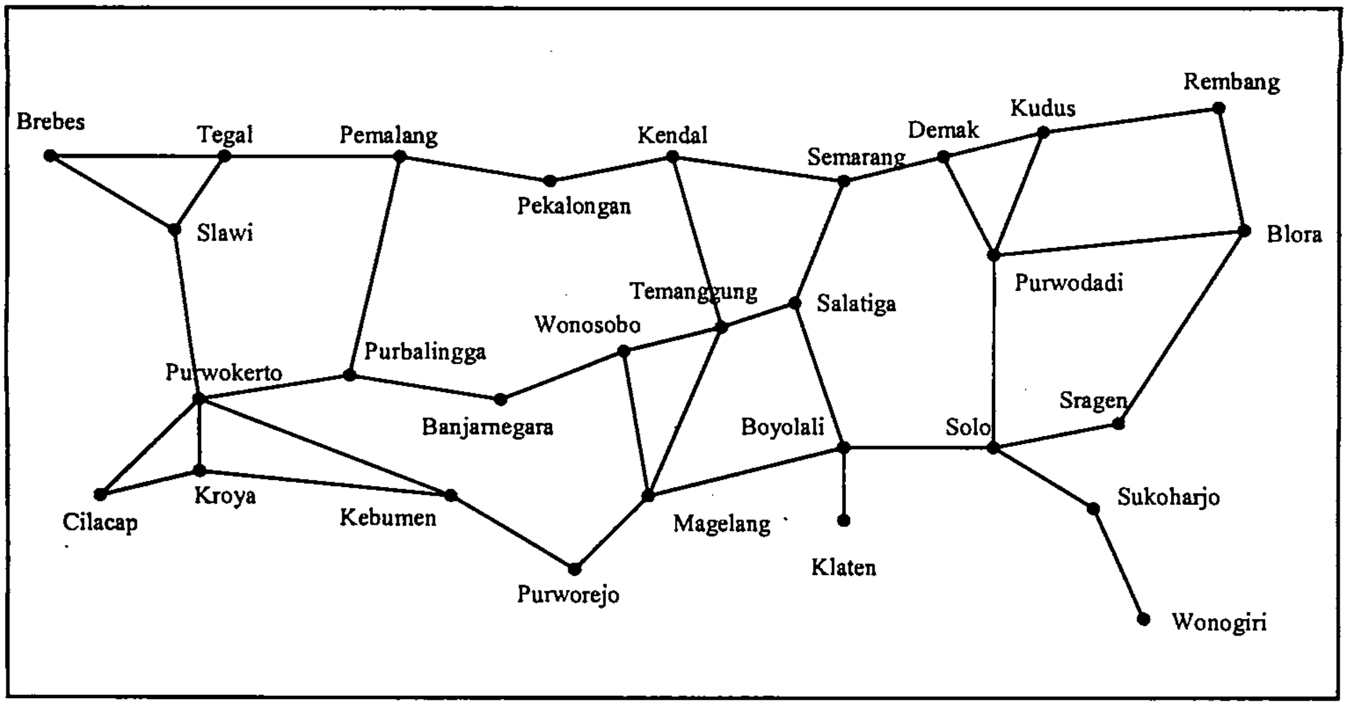
BAB 8

Graf

Jangan ikuti kemana jalan menuju,
tetapi buatlah jalan sendiri dan tinggalkan jejak[1]
(Anonim)

Teori graf merupakan pokok bahasan yang sudah tua usianya namun memiliki banyak terapan sampai saat ini. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek dinyatakan sebagai noktah, bulatan, atau titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis. Sebagai contoh, Gambar 8.1 adalah sebuah peta jaringan jalan raya yang menghubungkan sejumlah kota di Provinsi Jawa Tengah. Sesungguhnya peta tersebut adalah sebuah graf, yang dalam hal ini kota dinyatakan sebagai bulatan sedangkan jalan dinyatakan sebagai garis. Dengan diberikannya peta tersebut, kita dapat mengetahui apakah ada lintasan jalan antara dua buah kota. Selain itu, bila panjang jalan kereta api antara dua buah kota bertetangga diketahui, kita juga dapat menentukan rute perjalanan yang tersingkat dari kota A ke kota B. Masih banyak pertanyaan lain yang dapat kita munculkan berkenaan dengan graf. Sebelum kita mempelajari teori graf lebih lanjut, ada baiknya kita melakukan kilas balik menelusuri sejarah graf yang dimulai pada Abad 19.

[1] Terjemahan bebas dari kalimat: *"Do not follow where the path may lead. Go, instead, where there is no path and leave a trail"*.



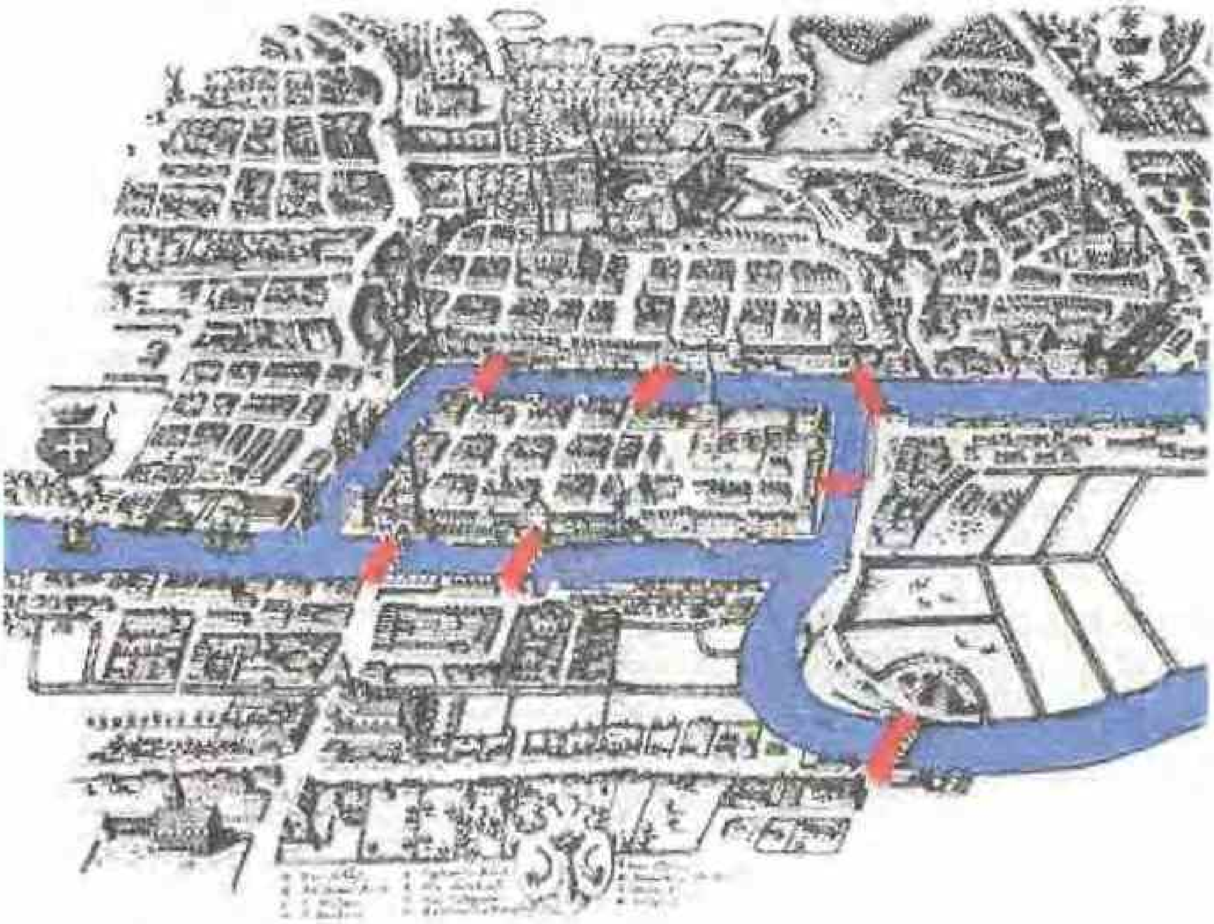
Gambar 8.1 Jaringan jalan raya di Provinsi Jawa Tengah

8.1 Sejarah Graf

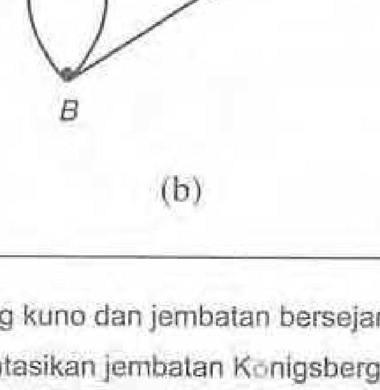
Menurut catatan sejarah, masalah jembatan Königsberg adalah masalah yang pertama kali menggunakan graf (tahun 1736). Di kota Königsberg (sebelah timur negara bagian Prussia, Jerman), sekarang bernama kota Kaliningrad, terdapat sungai Pregal yang mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai (Gambar 8.1(a).

Ada tujuh buah jembatan yang menghubungkan daratan yang dibelah oleh sungai tersebut. Masalah jembatan Königsberg adalah: apakah mungkin melalui ketujuh buah jembatan itu masing-masing tepat satu kali, dan kembali lagi ke tempat semula? Sebagian penduduk kota sepakat bahwa memang tidak mungkin melalui setiap jembatan itu hanya sekali dan kembali lagi ke tempat asal mula keberangkatan, tetapi mereka tidak dapat menjelaskan mengapa demikian jawabannya, kecuali dengan cara coba-coba. Tahun 1736, seorang matematikawan Swiss, L.Euler, adalah orang pertama yang berhasil menemukan jawaban masalah itu dengan pembuktian yang sederhana. Ia memodelkan masalah ini ke dalam graf. Daratan (titik-titik yang dihubungkan oleh jembatan) dinyatakannya sebagai titik (noktah) –yang disebut simpul (*vertex*)- dan jembatan dinyatakan sebagai garis –yang disebut sisi (*edge*). Setiap titik diberi label huruf A, B, C, dan D. Graf yang dibuat oleh Euler diperlihatkan pada Gambar 8.2(b).

Jawaban yang dikemukakan oleh Euler adalah: orang tidak mungkin melalui ketujuh jembatan itu masing-masing satu kali dan kembali lagi ke tempat asal keberangkatan jika derajat setiap simpul tidak seluruhnya genap. Yang dimaksud dengan derajat adalah banyaknya garis yang bersisian dengan noktah. Sebagai contoh, simpul C memiliki derajat 3 karena ada tiga buah garis yang bersisian dengannya, simpul B dan D juga berderajat dua, sedangkan simpul A berderajat 5. Karena tidak semua simpul berderajat genap, maka tidak mungkin dilakukan perjalananan berupa sirkuit (yang dinamakan dengan sirkuit Euler) pada graf tersebut. Kelak kita akan membahas lebih mendalam mengenai derajat dan sirkuit pada upabab selanjutnya.



(a)



(b)

Gambar 8.2 (a) Peta kota Konigsberg kuno dan jembatan bersejarahnya
(b) graf yang merepresentasikan jembatan Konigsberg

8.2 Definisi Graf

Secara matematis, graf didefinisikan sebagai berikut:

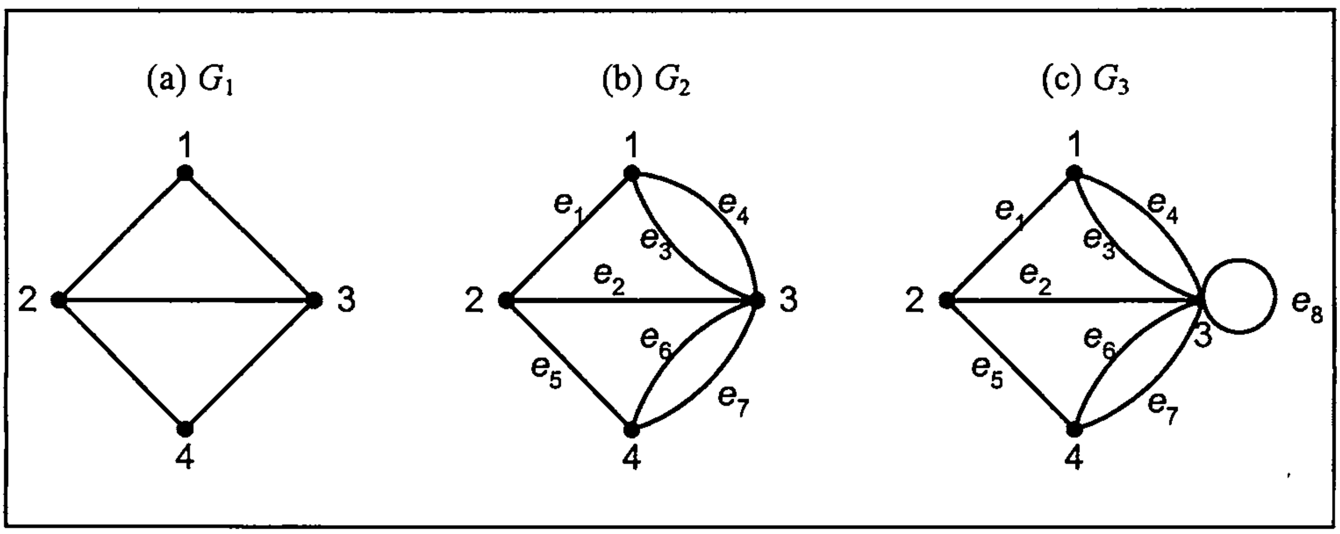
DEFINISI 8.1. Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul.

Definisi 8.1 menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi simpulnya harus ada, minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu buah simpul tanpa sebuah sisi pun dinamakan **graf trivial**.

Simpul pada graf dapat dinomori dengan huruf, seperti a, b, c, …, v, w, ..., dengan bilangan asli 1, 2, 3, ..., atau gabungan keduanya. Sedangkan sisi yang menghubungkan simpul u dengan simpul v dinyatakan dengan pasangan (u, v) atau dinyatakan dengan lambang e_1, e_2, …. Dengan kata lain, jika e adalah sisi yang menghubungkan simpul u dengan simpul v , maka e dapat ditulis sebagai

$$e = (v , v)$$

Secara geometri graf digambarkan sebagai sekumpulan noktah (simpul) di dalam bidang dwimatra yang dihubungkan dengan sekumpulan garis (sisi).



Gambar 8.3 Tiga buah graf (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

Contoh 8.1

Gambar 8.3 memperlihatkan tiga buah graf, G_1, G_2, dan G_3. G_1 adalah graf dengan himpunan simpul V dan himpunan sisi E adalah

$$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$
$$E = \{ (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$$

G_2 adalah graf dengan himpunan simpul V dan himpunan sisi E adalah:

$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4) \}$ $\Rightarrow$ himpunan ganda
$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

G_3 adalah graf dengan himpunan simpul V dan himpunan sisi E adalah:

$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4), (3, 3) \}$ $\Rightarrow$ himpunan ganda
$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$

Pada G_2, sisi $e_3 = (1, 3)$ dan sisi $e_4 = (1, 3)$ dinamakan **sisi-ganda** (*multiple edges* atau *paralel edges*) karena kedua sisi ini menghubungi dua buah simpul yang sama, yaitu simpul 1 dan simpul 3. Pada G_3, sisi $e_8 = (3, 3)$ dinamakan **gelang** atau **kalang** (*loop*) karena ia berawal dan berakhir pada simpul yang sama. ■

8.3 Jenis-jenis Graf

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori (jenis) bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau sisi kalang, berdasarkan jumlah simpul, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi.

Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis:

1. **Graf sederhana** (*simple graph*).
Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graf sederhana. G_1 pada Gambar 8.3(a) adalah contoh graf sederhana yang merepresentasikan jaringan komputer. Simpul menyatakan komputer, sedangkan sisi menyatakan saluran telepon untuk berkomunikasi. Saluran telepon dapat beroperasi pada dua arah.

Pada graf sederhana, sisi adalah pasangan tak-terurut (*unordered pairs*). Jadi, menuliskan sisi (u, v) sama saja dengan (v, u). Kita dapat juga mendefinisikan graf sederhana $G = (V, E)$ terdiri dari himpunan tidak kosong simpul-simpul dan E adalah himpunan pasangan tak-terurut yang berbeda yang disebut sisi.

2. **Graf tak-sederhana** (*unsimple-graph*).
Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak-sederhana (*unsimple graph*). Ada dua macam graf tak-sederhana, yaitu **graf ganda** (*multigraph*) dan **graf semu** (*pseudograph*). Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Sisi ganda yang menghubungkan sepasang simpul bisa lebih dari dua buah. G_2 pada Gambar 8.3(b) adalah graf-ganda. Sisi ganda dapat diasosisiasikan sebagai pasangan tak-terurut yang sama. Kita dapat juga mendefinisikan graf

ganda $G = (V, E)$ terdiri dari himpunan tidak kosong simpul-simpul dan E adalah himpunan-ganda (*multiset*) yang mengandung sisi ganda. Pada jaringan telekomunikasi, sisi ganda pada G_2 dapat diandaikan sebagai saluran telepon tambahan apabila beban komunikasi data antar komputer sangat padat. Perhatikanlah bahwa setiap graf sederhana juga adalah graf ganda, tetapi tidak setiap graf ganda merupakan graf sederhana.

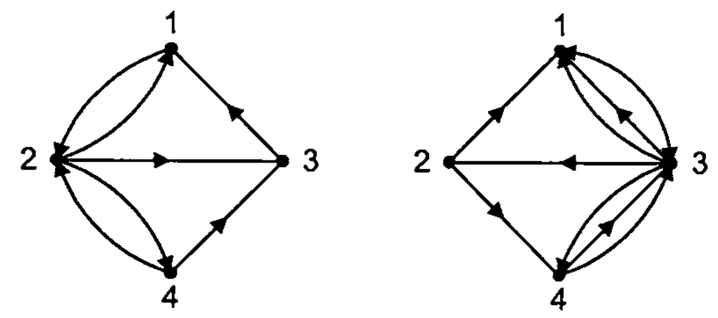
Graf semu adalah graf yang mengandung gelang (*loop*). G_3 adalah graf semu (termasuk bila memiliki sisi ganda sekalipun). Sisi gelang pada G_3 dapat dianggap sebagai saluran telelpon tambahan yang menghubungkan komputer dengan dirinya sendiri (mungkin untuk tujuan diagnostik). Graf semu lebih umum daripada graf ganda, karena sisi pada graf semu dapat terhubung ke dirinya sendiri.

Jumlah simpul pada graf kita sebut sebagai kardinalitas graf, dan dinyatakan dengan $n = |V|$, dan jumlah sisi kita nyatakan dengan $m = |E|$. Pada contoh di atas, G_1 mempunyai $n = 4$, dan $m = 4$, sedangkan G_2 mempunyai $n = 3$ dan $m = 4$.

Sisi pada graf dapat mempunyai orientasi arah. Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis:

1. **Graf tak-berarah** (*undirected graph*)
   Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah. Pada graf tak-berarah, urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi, $(u, v) = (v, u)$ adalah sisi yang sama. Tiga buah graf pada Gambar 8.3 adalah graf tak-berarah. Pada jaringan telepon, sisi pada graf berarah menyatakan bahwa saluran teelpon dapat beroperasi pada dua arah.

2. **Graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*)
   Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah. Kita lebih suka menyebut sisi berarah dengan sebutan **busur** (*arc*). Pada graf berarah, (u, v) dan (v, u) menyatakan dua buah busur yang berbeda, dengan kata lain $(u, v) \neq (v, u)$. Untuk busur (u, v), simpul u dinamakan **simpul asal** (*initial vertex*) dan simpul v dinamakan **simpul terminal** (*terminal vertex*). G_4 pada Gambar 8.4(a) adalah contoh graf berarah. Pada G_4 dapat dibayangkan sebagai saluran telepon tidak dapat beroperasi pada dua arah. Saluran hanya beroperasi pada arah yang ditunjukkan oleh anak panah. Jadi, sebagai contoh, saluran telepon (1, 2) tidak sama dengan saluran telepon (2, 1). Graf berarah sering dipakai untuk menggambarkan aliran proses, peta lalu lintas suatu kota (jalan searah atau dua arah), dan sebagainya. Pada graf berarah, gelang diperbolehkan, tetapi sisi ganda tidak.



(a) G_4 (b) G_5

Gambar 8.4 (a) graf berarah, (b) graf-ganda berarah

Definisi graf dapat diperluas sehingga mencakup **graf-ganda berarah** (*directed multigraph*). Pada graf-ganda berarah, gelang dan sisi ganda diperbolehkan ada. G_5 pada Gambar 8.4(b) adalah contoh graf-ganda berarah. Tabel 8.1 meringkas perluasan definisi graf.

Tabel 8.1 Jenis-jenis graf [ROS99]

Jenis	Sisi	Sisi ganda dibolehkan?	Sisi gelang dibolehkan?
Graf sederhana	Tak-berarah	Tidak	Tidak
Graf ganda	Tak-berarah	Ya	Tidak
Graf semu	Tak-berarah	Ya	Ya
Graf berarah	Bearah	Tidak	Ya
Graf-ganda berarah	Bearah	Ya	Ya

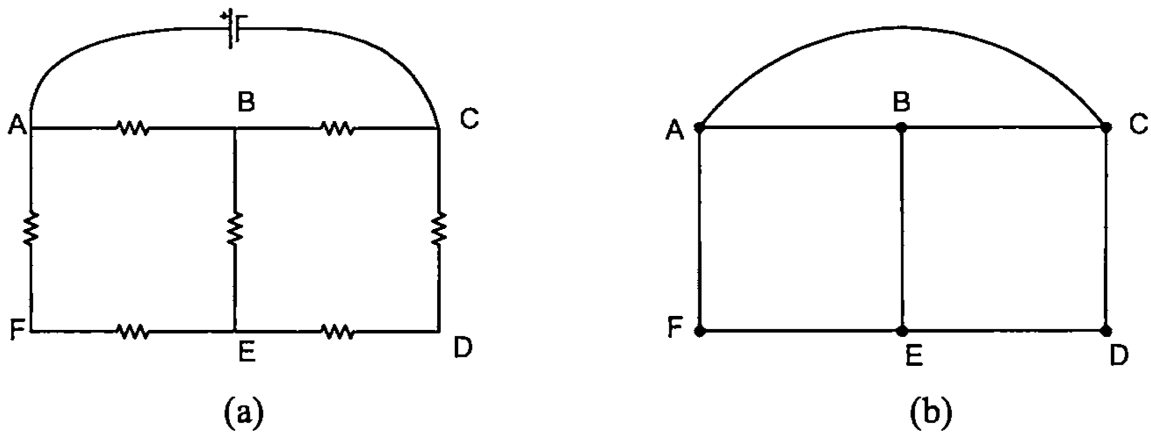
Di dalam buku ini, kita menyebut **graf** untuk jenis graf apa saja, baik sisinya tak-berarah maupun berarah, baik mengandung gelang maupun sisi ganda, baik graf sederhana maupun graf tak-sederhana.

8.4 Contoh Terapan Graf

Seperti yang sudah disebutkan di atas, aplikasi graf sangat luas. Graf dipakai di berbagai disiplin ilmu maupun dalam kehidupan sehari-hari. Penggunaan graf di berbagai bidang tesrebut adalah untuk memodelkan persoalan. Di bawah ini dikemukakan terapan graf dalam bidang kelistrikan, kimia, ilmu komputer, dan pertandingan olahraga. Terapan graf lainnya akan dibicarakan pada waktu membahas teori-teori di dalam graf.

1. Rangkaian listrik.

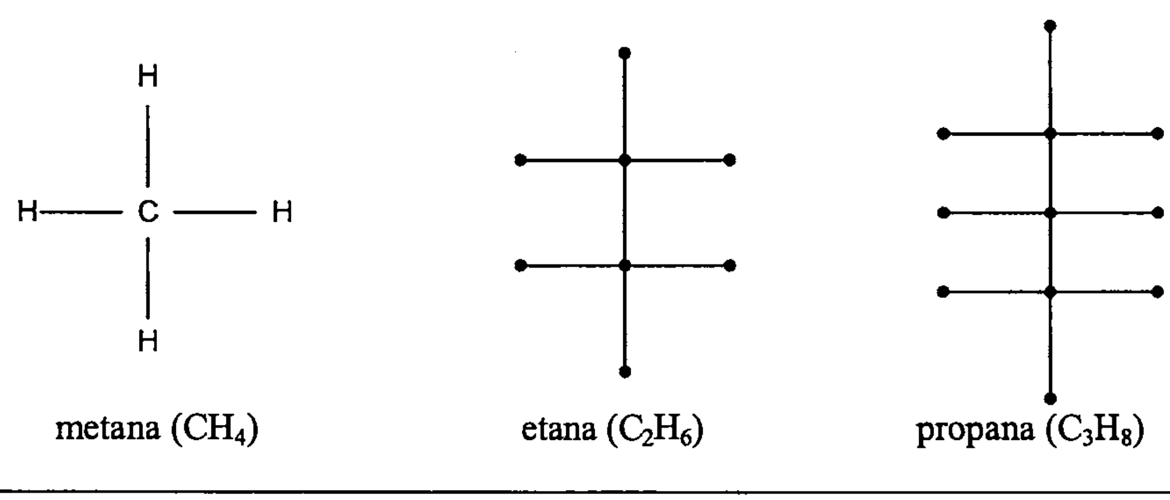
Kirchoff (1847) menggunakan graf untuk memodelkan rangkaian listrik. Berdasarkan graf tersebut Kirchoff menurunkan persamaan arus yang masuk dan keluar pada tiap simpul. Dari sistem persamaan lanjar (*linier*) simultan yang diperoleh dapat dapat dihitung arus listrik yang mengalir pada setiap komponen (Gambar 8.5).



Gambar 8.5 (a) Rangkaian listrik, (b) graf yang menyatakan rangkaian listrik

2. Isomer senyawa kimia karbon

Arthur Cayley (1857) menggunakan graf dalam memodelkan molekul senyawa alkana C_nH_{2n+2} untuk menghitung jumlah isomernya. Atom karbon (C) dan atom hidrogen (H) dinyatakan sebagai simpul, sedangkan ikatan antara atom C dan *H* dinyatakan sebagai sisi (Gambar 8.6). Isomer adalah senyawa kimia yang mempunyai rumus molekul sama tetapi rumus bangun (bentuk graf) berbeda.



Gambar 8.6 Graf senyawa alkana, masing-masing metana, etana, dan propana

3. Transaksi konkuren pada basis data terpusat

Ini adalah terapan graf dalam bidang komputer. Basis data (*database*) terpusat melayani beberapa transaksi (*T*) yang dilakukan secara konkuren (bersamaan). Transaksi terhadap basis data dapat berupa operasi pembacaan dan operasi penulisan terhadap data yang sama. Persoalan kritis pada proses konkuren adalah *deadlock*, yaitu keadaan yang timbul karena beberapa transaksi saling menunggu transaksi lainnya sehingga sistem menjadi *hang*. Misalnya, transaksi T_1 akan membaca data B yang sedang ditulis oleh transaksi T_2, sedangkan T_2 akan membaca data A yang sedang ditulis T_1. Kedua transaksi saling menunggu data yang sedang dikuncinya (*circular wait*). Bila terdapat lebih dari dua transaksi yang saling menunggu sehingga membentuk siklus, maka timbul *deadlock*. Cara yang digunakan sistem untuk mendeteksi *deadlock* adalah dengan membangun graf transaksi secara periodik dan memeriksa apakah terdapat siklus pada grafnya. Jika ada siklus, maka kondisi *deadlock* terjadi .

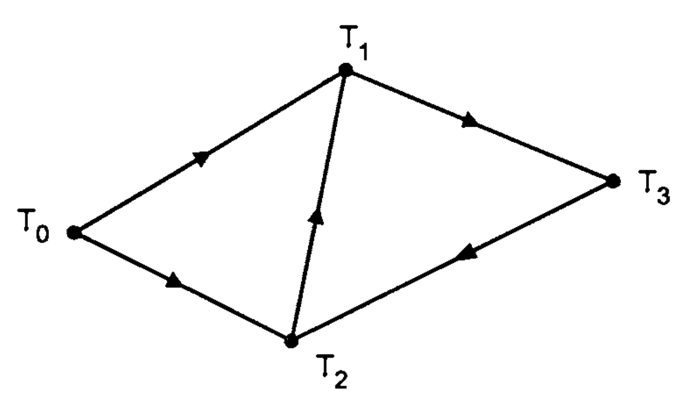
Misalkan:

transaksi T_0 menunggu transaksi T_1 dan T_2 ;
transaksi T_2 menunggu transaksi T_1 ;
transaksi T_1 menunggu transaksi T_3 ;
transaksi T_3 menunggu transaksi T_2 ;

Graf berarah yang menyatakan transaksi menunggu transaksi lainnya ditunjukkan pada Gambar 8.7. Simpul menyatakan transaksi, sedangkan busur (T_i, T_j) menyatakan transaksi T_i menunggu transaksi T_j. Graf ini mengandung siklus, yaitu

$$T_1 - T_3 - T_2 - T_1$$

Untuk mengatasi *deadlock*, sistem harus memutuskan siklus dengan cara membatalkan satu atau lebih transaksi di dalam siklus. Metode penanganan *deadlock* tidak dibahas di dalam buku ini, karena merupakan bagian dari kuliah Sistem Operasi dan Sistem Basis Data.



Gambar 8.7 Graf transaksi yang menunjukkan keadaan deadlock

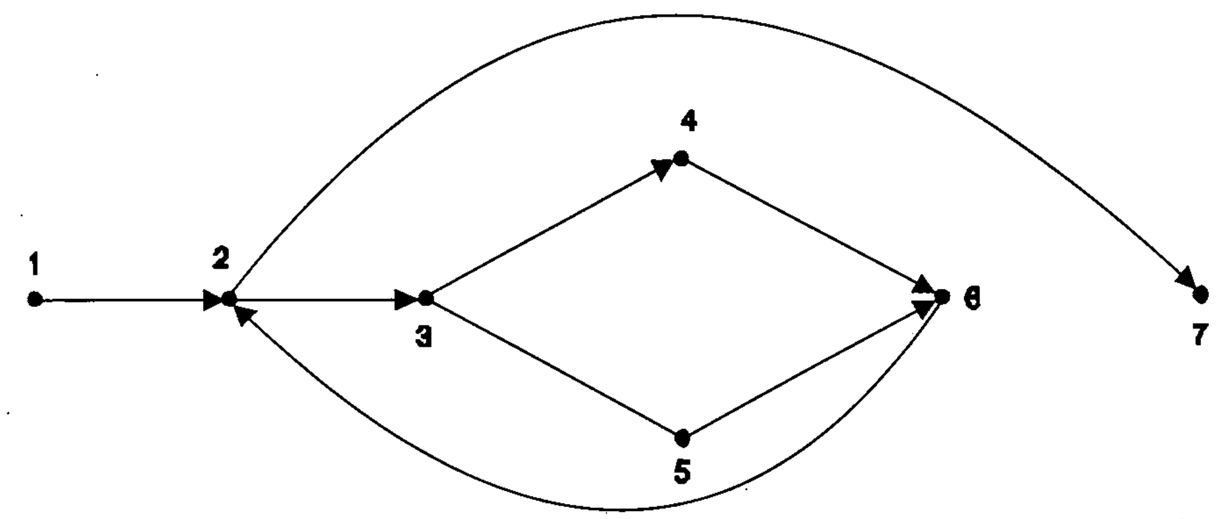
4. Pengujian program

Dalam bidang rekayasa perangkat lunak, sebuah program harus mengalami tahap pengujian untuk menemukan kesalahan (*bug*). Salah satu pengujian program adalah pengujian eksekusi. Aliran kendali program harus diperiksa untuk memastikan apakah aliran tersebut sudah benar untuk berbagai kasus data uji. Aliran kendali program dimodelkan dengan graf berarah yang dinamakan **graf alir** (*flow graph*). Pada graf berarah tersebut, simpul menyatakan pernyataan atau kondisi yang dievaluasi, sedangkan busur menyatakan aliran kendali program ke pernyataan atau kondisi berikutnya.

Sebagai contoh, misalkan terdapat sebagian teks program Pascal di bawah ini:

```
read(x);
while x <> 9999 do
begin
    if x < 0 then
       writeln('Masukan tidak boleh negatif')
    else
       x := x + 10;
    read(x);
end;
writeln(x);
```

Graf alir yang menggambarkan aliran kendali program ditunjukkan pada Gambar 8.8.



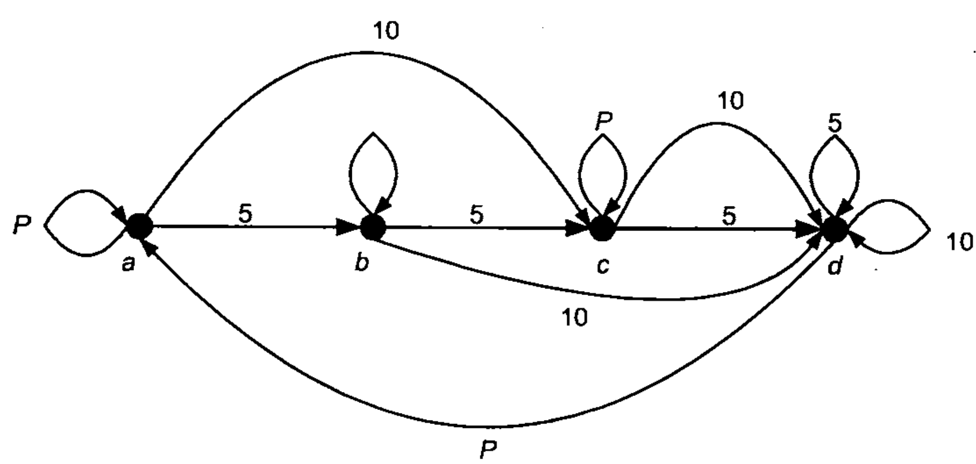
Keterangan:
1 : read(x)
2 : x <> 9999
3 : x < 0
4 : writeln('Masukan tidak boleh negatif');
5 : x := x + 10
6 : read(x)
7 : writeln(x)

Gambar 8.8 Graf alir dari sebagian teks program

Data pengujian harus dirancang sedemikian sehingga semua lintasan di dalam graf alir pernah dilalui minimum satu kali. Tujuannya agar kesalahan pada setiap lintasan eksekusi dapat ditemukan dan perbaikan program dilakukan.

5. Terapan graf di dalam teori otomata.

Marilah kita simak masalah pemodelan perilaku sebuah mesin jaja (*vending machine*) yang menjual coklat seharga 15 sen [LIU85]. Untuk memudahkan, kita akan memisalkan bahwa mesin tersebut hanya menerima uang logam 5 sen dan 10 sen, dan mesin tidak akan memberi kembalian bila yang dimasukkan lebih dari 15 sen. Graf berbobot (setiap sisi diberi sebuah harga, akan dijelaskan kemudian) pada Gambar 8.10 menggambarkan perilaku mesin ini, dengan simpul menyatakan banyaknya uang logam yang dimasukkan, yaitu 0, 5, 10, dan 15 sen atau lebih. Setiap saat seorang pembeli dapat melakukan salah satu dari tiga hal berikut: memasukkan sebuah uang logam 5 sen, memasukkan sebuah uang logam 10 sen, dan menekan tombol coklat (*P*) pilihannya. Dengan demikian, di dalam graf pada Gambar 8.9 ada tiga buah sisi dari setiap simpul yang berbobot 5, 10, dan *P*. Sisi dengan bobot 5 menghitung kembali jumlah uang yang ada di dalam mesin ketika pembeli memasukkan sebuah uang logam 5 sen, dan sisi dengan bobot 10 menghitung kembali jumlah uang yang ada di dalam mesin ketika seorang pembeli memasukkan uang logam 10 sen. Kiranya jelas, ketika kita ada di simpul *a*, *b*, dan *c*, tidak akan terjadi apa-apa meskipun tombol kita tekan; mesin akan mengeluarkan sepotong coklat hanya bila kita sampai pada simpul *d*.

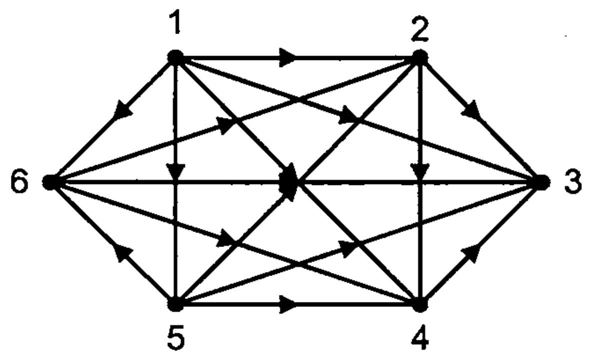


Keterangan:
a : 0 sen dimasukkan
b : 5 sen dimasukkan
c : 10 sen dimasukkan
d : 15 sen atau lebih dimasukkan

Gambar 8.9 Graf yang memodelkan perilaku mesin jaja

6. Turnamen *Round-Robin*

Turnamen yang setiap tim bertanding dengan tim lainnya hanya sekali disebut turnamen *round-robin*. Turnamen semacam itu dimodelkan dengan graf berarah, yang dalam hal ini simpul menyatakan tiap tim yang bertanding, dan busur menyatakan pertandingan. Busur (a, b) berarti tim a berhasil memukul tim b. Gambar 8.10 memperlihatkan turnamen *round-robin* untuk 6 buah tim. Tim 1 tidak terkalahkan, sedangkan tim 3 tidak pernah menang.

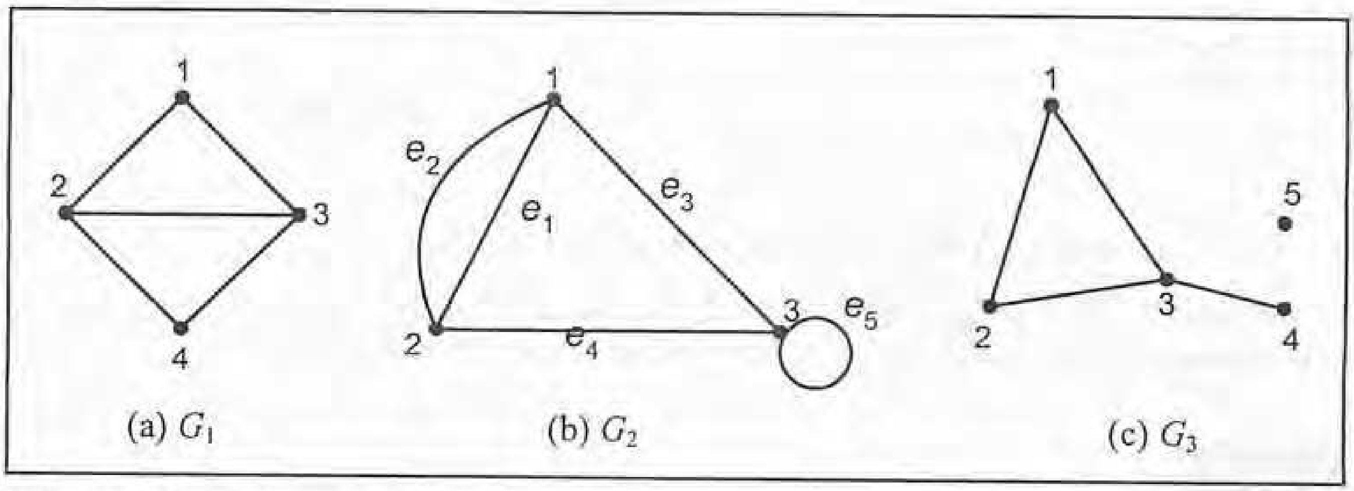


Gambar 8.10 Turnamen *round-robin*

Contoh terapan graf yang lain adalah menyatakan aliran informasi dalam pengolahan sinyal dan aliran massa dalam industri kimia. Graf juga berguna memodelkan sesuatu yang abstrak, seperti struktur perusahaan, tingkatan sosial, pohon keluarga, aliran kerja dalam proyek, perencanaan dan manajemen proyek, perpindahan dalam permainan (*game*), dan langkah-langkah pemecahan masalah. Terapan yang terakhir ini merupakan kemampuan dasar yang harus dikuasai dalam bidang kecerdasan buatan (*artificial intelligence*).

8.5 Terminologi Dasar

Kita akan sering menggunakan terminologi (istilah) yang berkaitan dengan graf. Di bawah ini didefinisikan beberapa terminologi yang sering dipakai. Contoh graf pada Gambar 8.11 akan digunakan untuk memperjelas terminologi yang kita definisikan. Graf yang pertama, G_1, adalah graf sederhana, G_2 adalah graf semu yang mengandung sisi ganda maupun gelang, sedangkan G_3 adalah graf dengan sebuah simpul yang terpisah dari simpul lainnya. Ketiga buah graf ini adalah graf tidak-berarah. Untuk terminologi yang menyangkut graf berarah, contoh grafnya akan digambarkan pada waktu pembahasan.



Gambar 8.11 Tiga buah graf, G_1, G_2, dan G_3

1. Bertetangga (*Adjacent*)

DEFINISI 8.2. Dua buah simpul pada graf tak-berarah G dikatakan **bertetangga** bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, u bertetangga dengan v jika (u, v) adalah sebuah sisi pada graf G.

Contoh 8.2

Pada Gambar 8.11(a), simpul 1 bertetangga dengan simpul 2 dan 3, tetapi simpul 1 tidak bertetangga dengan simpul 4. ■

Pada graf berarah, sisi kita sebut busur. Jika (u, v) adalah busur maka u dikatakan bertetangga dengan v dan v dikatakan tetangga dari u. Pada Gambar 8.4(a), simpul 1 bertetangga dengan simpul 2, dan simpul 2 dikatakan tetangga dari simpul 1.

2. Bersisian (*Incident*)

DEFINISI 8.3. Untuk sembarang sisi $e = (u, v)$, sisi e dikatakan **bersisian** dengan simpul u dan simpul v.

Contoh 8.3

Pada Gambar 8.11(a), sisi (2, 3) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 3, sisi (2, 4) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 4, tetapi sisi (1, 2) tidak bersisian dengan simpul 4. ■

3. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)

DEFINISI 8.4. Simpul terpencil ialah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya. Atau, dapat juga dinyatakan bahwa simpul terpencil adalah simpul yang tidak satupun bertetangga dengan simpul-simpul lainnya.

Contoh 8.4

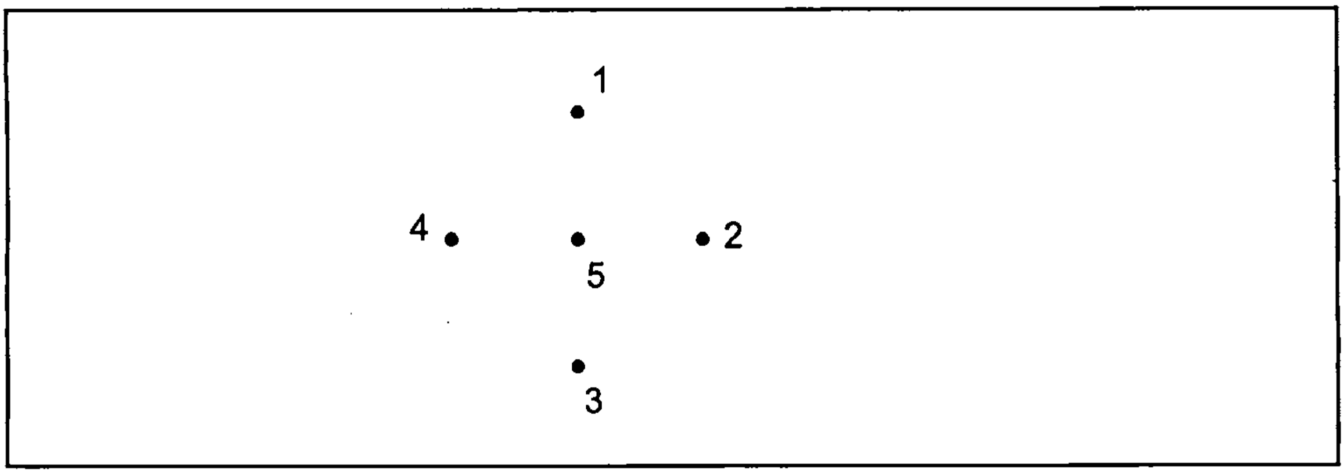
Pada Gambar 8.11(c), simpul 5 adalah simpul terpencil.

4. Graf Kosong *(Null Graph* atau *Empty Graph)*

DEFINISI 8.5. Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong disebut sebagai graf kosong dan ditulis sebagai N_n, yang dalam hal ini n adalah jumlah simpul.

Contoh 8.5

Graf pada Gambar 8.12 adalah graf N_5. ■



Gambar 8.12 Graf kosong N_5

5. Derajat (*Degree*)

DEFINISI 8.6. **Derajat** suatu simpul pada graf tak-berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.

Notasi: $d(v)$ menyatakan derajat simpul v.

Contoh 8.6

Pada Gambar 8.11(a),

$$d(1) = d(4) = 2$$
$$d(2) = d(3) = 3$$ ■

Simpul terpencil adalah simpul dengan $d(v) = 0$, karena tidak ada satupun sisi yang bersisian dengan simpul tersebut. Pada Gambar 8.11(c), $d(5) = 0$.

Sisi gelang (*loop*) dihitung berderajat dua. Jadi, untuk graf pada Gambar 8.11(b), $d(2) = 4$. Secara umum, jika terdapat g buah gelang dan e buah sisi bukan-gelang yang bersisian dengan simpul v, maka derajat simpul v adalah

$$d(v) = 2g + e \qquad (8.1)$$

Alasan mengapa gelang mengkontribusikan dua untuk derajat simpulnya adalah karena gelang direpresentasikan sebagai (v, v), dan simpul v bersisian dua kali pada sisi (v, v).

Simpul yang berderajat satu disebut **anting-anting** (*pendant vertex*). Dengan kata lain, anting-anting hanya bertetangga dengan sebuah simpul. Pada Gambar 8.12(c), $d(4) = 1$, karena itu simpul 4 adalah anting-anting.

Pada graf berarah, derajat suatu simpul dibedakan menjadi dua macam untuk mencerminkan jumlah busur dengan simpul tersebut sebagai simpul asal dan jumlah busur dengan simpul tersebut sebagai simpul terminal.

DEFINISI 8.7. Pada graf berarah, derajat simpul v dinyatakan dengan $d_{in}(v)$ dan $d_{out}(v)$, yang dalam hal ini

$d_{in}(v)$ = derajat-masuk (*in-degree*) = jumlah busur yang masuk ke simpul v
$d_{out}(v)$ = derajat-keluar (*out-degree*) = jumlah busur yang keluar dari simpul v

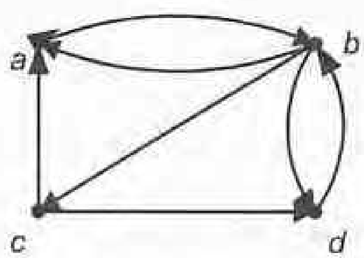
dan

$$d(v) = d_{in}(v) + d_{out}(v) \tag{8.2}$$

Catatlah bahwa sisi gelang pada graf berarah menyumbangkan 1 untuk derajat-masuk dan 1 untuk derajat- keluar.

Contoh 8.7

Tinjau graf berarah berikut ini:



Derajat setiap simpul adalah

$d_{in}(a) = 3$; $d_{out}(a) = 2$
$d_{in}(b) = 2$; $d_{out}(b) = 3$
$d_{in}(c) = 1$; $d_{out}(c) = 2$
$d_{in}(d) = 2$; $d_{out}(d) = 1$ ■

Pada graf berarah $G = (V, E)$ selalu berlaku hubungan

$$\sum_{v \in V} d_{in}(v) = \sum_{v \in V} d_{out}(v) = |E|$$

Misalnya pada Contoh 8.7 di atas,

$$\sum_{v \in V} d_{in}(v) = 3 + 2 + 1 + 2 = 8 = \sum_{v \in V} d_{out}(v) = 2 + 3 + 2 + 1 = 8 = |E|$$

Lemma Jabat Tangan. Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut. Dengan kata lain, jika $G = (V, E)$, maka

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| \tag{8.3}$$

(catatan: ingatlah $2|E|$ selalu bernilai genap)

Lemma ini dikenal dengan lemma jabat tangan (*handshaking lemma*). Hal ini disebabkan oleh setiap sisi dihitung dua kali, yaitu pada ujung kiri sebagai bagian dari simpul kiri dan pada ujung kanan dihitung sebagai bagian dari simpul kanan. Layaknya orang berjabat tangan, maka jumlah tangan yang berjabatan adalah genap dan jumlah tangan yang berjabatan adalah dua kali jumlah jabatan tangan yang terjadi [DUL94]. Catatlah bahwa Lemma Jabat Tangan juga benar untuk graf berarah, yang dalam hal ini $d(v) = d_{in}(v) + d_{out}(v)$.

Contoh 8.8

Jumlah derajat seluruh simpul pada graf Gambar 8.11(a) adalah:

$$d(1) + d(2) + d(3) + d(4) = 2 + 3 + 3 + 2 = 10 = 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 5$$

Jumlah derajat seluruh simpul pada graf Gambar 8.11(b) adalah:

$$d(1) + d(2) + d(3) = 3 + 3 + 4 = 10 = 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 5$$

Jumlah derajat seluruh simpul pada graf Gambar 8.11(c) adalah

$$d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5) = 2 + 2 + 3 + 1 + 0 = 8 = 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 4$$

■

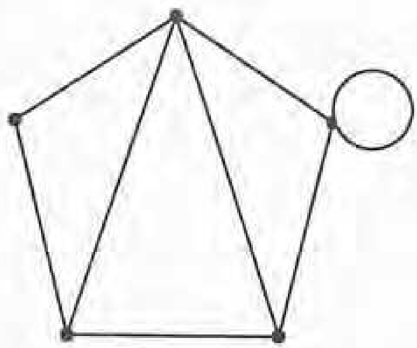
Contoh 8.9

Diketahui graf dengan lima buah simpul. Dapatkah kita menggambar graf tersebut jika derajat masing-masing simpul adalah:

(a) 2, 3, 1, 1, 2
(b) 2, 3, 3, 4, 4

Penyelesaian:

(a) tidak dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya ganjil $(2 + 3 + 1 + 1 + 2 = 9)$.
(b) dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya genap $(2 + 3 + 3 + 4 + 4 = 16)$. Salah satu kemungkinan graf yang dapat digambar ditunjukkan pada Gambar 8.13. Ternyata grafnya bukan graf sederhana. ■



Gambar 8.13. Graf dengan derajat setiap simpul masing-masing 2, 3, 3, 4, 4

Akibat dari Lemma Jabat Tangan di atas kita menurunkan teorema berikut:

Teorema 8.1. Untuk sembarang graf G, banyaknya simpul yang berderajat ganjil selalu genap.

Bukti:
Misalkan V_1 dan V_2 masing-masing adalah himpunan simpul yang berderajat genap dan berderajat ganjil pada graf $G = (V, E)$. Persamaan (8.3) dapat ditulis sebagai

$$\sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = 2|E| \tag{8.4}$$

Karena $d(v)$ genap untuk $v \in V_1$, maka suku pertama dari ruas kiri persamaan selalu bernilai genap. Ruas kanan persamaan (8.4) juga bernilai genap. Nilai genap pada ruas kanan hanya benar bila suku kedua dari ruas kiri juga harus genap agar

genap + genap = genap

Karena $d(v)$ ganjil untuk $v \in V_2$, maka banyaknya simpul v di dalam V_2 harus genap agar jumlah seluruh derajatnya bernilai genap. Jadi, banyaknya simpul yang berderajat ganjil selalu genap. ■

Perhatikan graf pada Gambar 8.11(c), di sini banyaknya simpul yang berderajat ganjil ada dua buah, yaitu simpul 3 dan simpul 4.

6. Lintasan (*Path*)

DEFINISI 8.7. Lintasan yang panjangnya n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_n di dalam graf G ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk v_0, e_1, v_1, e_2, v_2,... , v_{n-1}, e_n, v_n sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2)$, ... , $e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G.

contoh, pada Gambar 8.11(a), lintasan 1, 2, 4, 3 adalah lintasan dengan barisan sisi (1,2), (2,4), (4,3). Istilah lain untul lintasan adalah jalur.

Pada graf yang mengandung sisi ganda, kita harus menulis lintasan sebagai barisan

$1, e_1, 2, e_4, 3, e_5, 3$

adalah lintasan dari simpul 1 ke simpul 3 yang melalui sisi e_1, e_4, dan e_5.

lintasan 1, 2, 4, 3, 2 bukan lintasan sederhana, tetapi lintasan terbuka. ■

---

jumlah sisi di dalam sirkuit tersebut. Sirkuit 1, 2, 3, 1 pada Gambar 8.11(a) memiliki panjang 3. Sebuah sirkuit dikatakan **sirkuit sederhana** (*simple circuit*) jika setiap sisi yang dilalui berbeda.

Contoh 8.11

Pada Gambar 8.11(a), 1, 2, 3, 1 adalah sirkuit sederhana, sedangkan 1, 2, 4, 3, 2, 1 bukan sirkuit sederhana, karena sisi (1, 2) dilalui dua kali. ■

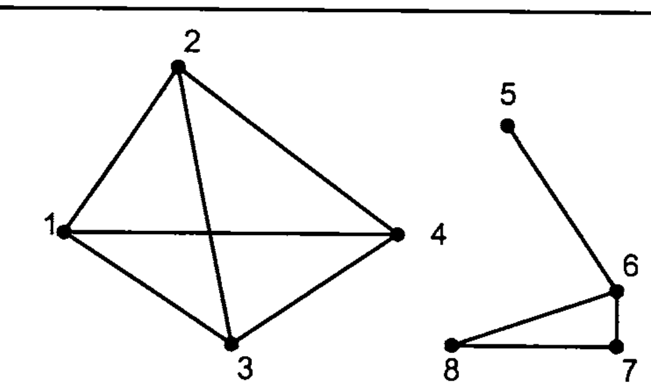
8. Terhubung (*Connected*)

Keterhubungan dua buah simpul adalah penting di dalam graf. Dua buah simpul u dan simpul v dikatakan **terhubung** jika terdapat lintasan dari u ke v. Jika dua buah simpul terhubung maka pasti simpul yang pertama dapat dicapai dari simpul yang kedua. Dua simpul terminal pada jaringan komputer hanya dapat berkomunikasi bila keduanya terhubung.

Jika setiap pasang simpul di dalam graf terhubung, maka graf tersebut kita katakan graf terhubung. Secara formal, definisi graf terhubung adalah sebagai berikut:

DEFINISI 8.9. Graf tak-berarah G disebut **graf terhubung** (*connected graph*) jika untuk setiap pasang simpul u dan v di dalam himpunan V terdapat lintasan dari u ke v (yang juga harus berarti ada lintasan dari u ke v). Jika tidak, maka G disebut **graf tak-terhubung** (*disconnected graph*).

G_1 dan G_2 pada Gambar 8.11 adalah graf terhubung, sedangkan G_3 tidak. Graf pada Gambar 8.14 di bawah ini juga adalah contoh graf yang tak-terhubung.



Gambar 8.14 Graf tak-berarah tidak terhubung

Sebagai catatan, graf yang hanya terdiri atas satu simpul saja (tidak ada sisi) tetap kita katakan terhubung, karena simpul tunggalnya terhubung dengan diringan sendiri. juga dikatakan graf terhubung.

Pada graf berarah, definisi graf terhubung kita rumuskan sebagai berikut:

DEFINISI 8.11. Graf berarah G dikatakan terhubung jika graf tak-berarahnya terhubung (graf tak-berarah dari G diperoleh dengan menghilangkan arahnya).

Keterhubungan dua buah simpul pada graf berarah dibedakan menjadi terhubung kuat dan terhubung lemah.

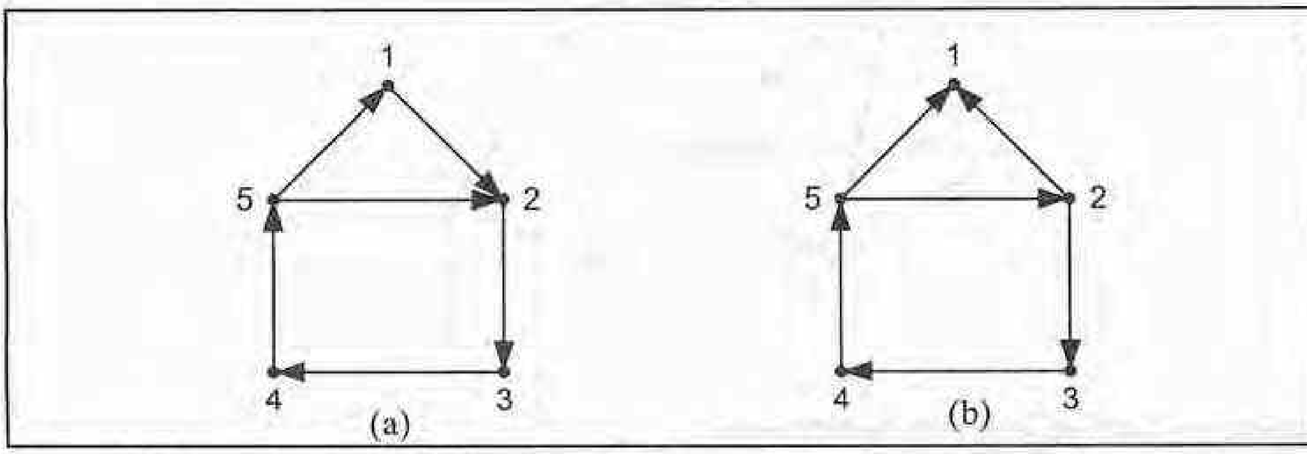
Dua simpul, u dan v pada graf berarah G disebut **terhubung kuat** (*strongly connected*) jika terdapat lintasan berarah dari u ke v. dan juga sebaliknya lintasan berarah dari v ke u. Pada Gambar 8.15(a), simpul 1 dan simpul 3 terhubung kuat karena terdapat lintasan dari 1 ke 3 (yaitu 1, 2, 3), begitu juga terdapat lintasan dari 3 ke 1 (yaitu 3, 4, 5, 1).

Jika u dan v tidak terhubung kuat tetapi tetap terhubung pada graf tak-berarahnya, maka u dan v dikatakan **terhubung lemah** (*weakly coonected*). Pada Gambar 8.15(b), simpul 1 dan simpul 3 terhubung lemah karena hanya terdapat lintasan dari 3 ke 1 (yaitu 3, 5, 4, 1), tetapi tidak ada lintasan dari 1 ke 3.

Kedua hal di atas (terhubung kuat dan terhubung lemah) melahirkan definisi graf terhubung kuat:

DEFINISI 8.12. Graf berarah G disebut **graf terhubung kuat** (*strongly connected graph*) apabila untuk setiap pasang simpul sembarang v_i dan v_j di G terhubung kuat. Kalau tidak, G disebut **graf terhubung lemah**.

Graf pada Gambar 8.15(a) adalah graf terhubung kuat, karena untuk sembarang sepasang simpul di dalam graf terdapat lintasan, sedangkan graf pada Gambar 8.16(b) adalah graf terhubung lemah karena tidak semua pasangan simpul mempunyai lintasan dari dua arah.



Gambar 8.15 (a) graf berarah terhubung kuat, (b) graf berarah terhubung lemah

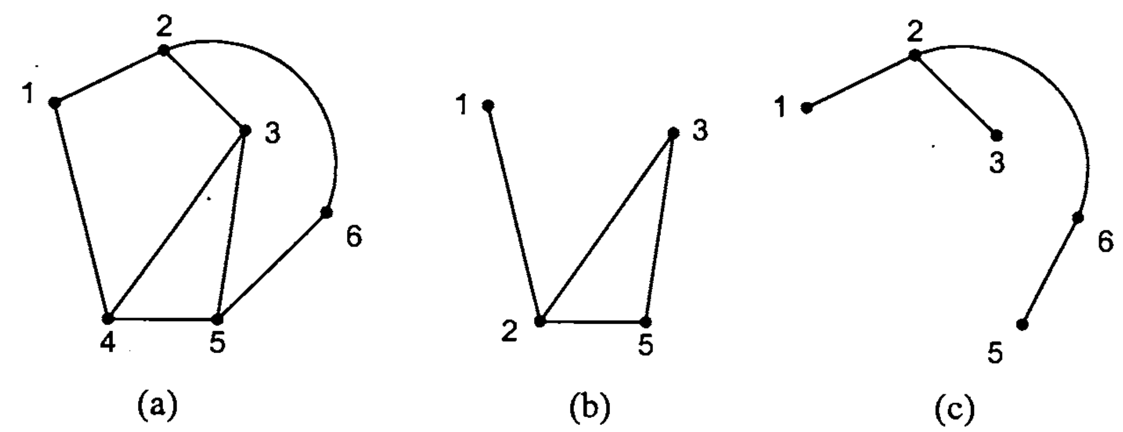
9. Upagraf (*Subgraph*) dan Komplemen Upagraf

DEFINISI 8.13. Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah **upagraf** (*subgraph*) dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$

Gambar 8.17(b)) adalah upagraf dari graf pada Gambar 8.17(a).

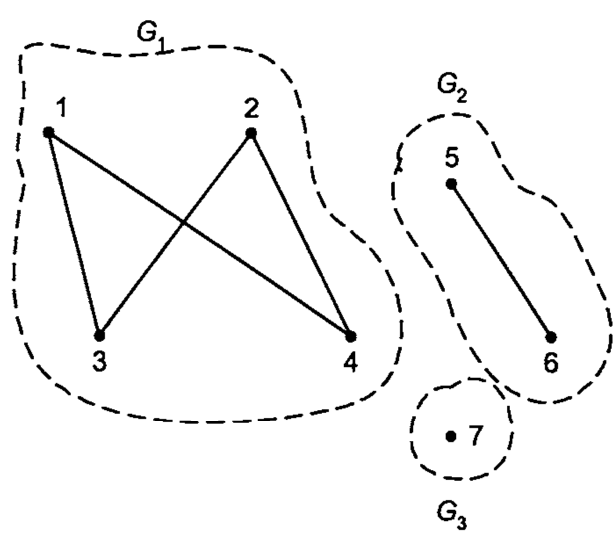
DEFINISI 8.14. Komplemen dari upagraf G_1 terhadap graf G adalah graf $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$ dan V_2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggota E_2 bersisian dengannya.

Gambar 8.16(c) adalah komplemen dari upagraf pada Gambar 8.16(b).



Gambar 8.16 (a) Graf G_1, (b) Sebuah upagraf dari G_1, dan (c) komplemen dari upagraf yang bersesuaian.

Jika graf tidak terhubung, maka graf tersebut terdiri atas beberapa komponen terhubung (*connected component*). **Komponen terhubung** (atau disingkat "komponen" saja) adalah upagraf terhubung dari graf G yang tidak terdapat di dalam upagraf terhubung dari G yang lebih besar. Ini berarti setiap komponen terhubung di dalam graf G saling lepas (*disjoint*). Pada Gambar 8.17 di bawah ini, graf G mempunyai 3 buah komponen terhubung, yaitu G_1, G_2, dan G_3. Catatlah bahwa graf terhubung hanya terdiri dari satu komponen, yaitu graf itu sendiri.



Gambar 8.17 Graf G yang mempunyai 4 buah komponen, yaitu G_1, G_2, dan G_3

Contoh 8.12

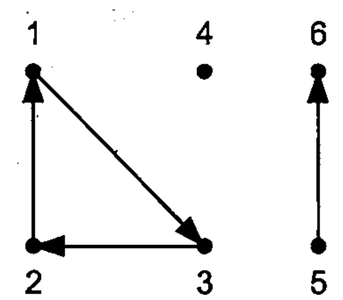
Tanpa menggambar grafnya, tentukan komponen terhubung dari $G = (V, E)$ yang dalam hal ini $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan $E = \{(a, d), (c, d)\}$.

Penyelesaian:
Simpul a bertetangga dengan d, sedangkan simpul d bertetangga dengan c, ini berarti a juga terhubung dengan c. Simpul-simpul lainnya, b, e, dan f merupakan simpul terpencil. Dengan demikian, ada 4 buah komponen terhubung di dalam G, yaitu

$G_1 = (V_1, E_1)$ dengan $V_1 = \{a, c, d\}$ dan $E_1 = \{(a, d), (c, d)\}$
$G_2 = (V_2, E_2)$ dengan $V_2 = \{b\}$ dan $E_2 = \{\}$
$G_3 = (V_3, E_3)$ dengan $V_3 = \{e\}$ dan $E_3 = \{\}$
$G_4 = (V_4, E_4)$ dengan $V_4 = \{f\}$ dan $E_4 = \{\}$

dan $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 = V$, $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 = E$, $G_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4 = \varnothing$. ■

Pada graf berarah, **komponen terhubung kuat** (*strongly connected component*) adalah upagraf terhubung-kuat dari graf G yang tidak terdapat di dalam upagraf terhubung-kuat dari G yang lebih besar. Graf pada Gambar 8.18 di bawah ini mempunyai dua buah komponen terhubung kuat, yaitu upagraf dengan simpul 1, 2, 3 dan upagraf yang hanya mempunyai satu simpul, 4.



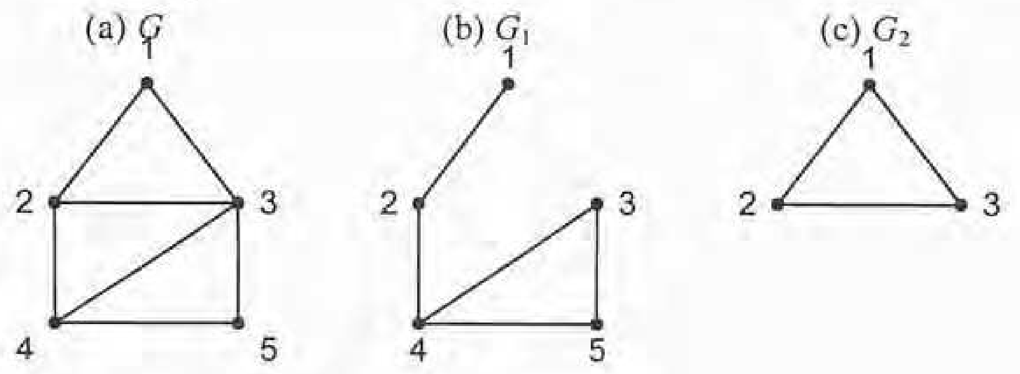
Gambar 8.18 Graf berarah G yang mempunyai 2 buah komponen terhubung kuat

10. Upagraf Merentang (*Spanning Subgraph*)

DEFINISI 8.14. Upagraf $G_1 = (V_1, E_1)$ dari $G = (V, E)$ dikatakan **upagraf merentang** jika $V_1 = V$ (yaitu G_1 mengandung semua simpul dari G).

Contoh 8.13

Pada Gambar 8.19, G_1 adalah upagraf merentang dari G, tetapi G_2 bukan upagraf merentang dari G karena G_2 tidak mengandung semua simpul G. ■



Gambar 8.19 (a) graf *G*,
(b) upagraf merentang dari *G*, dan
(c) bukan upagraf merentang dari *G*

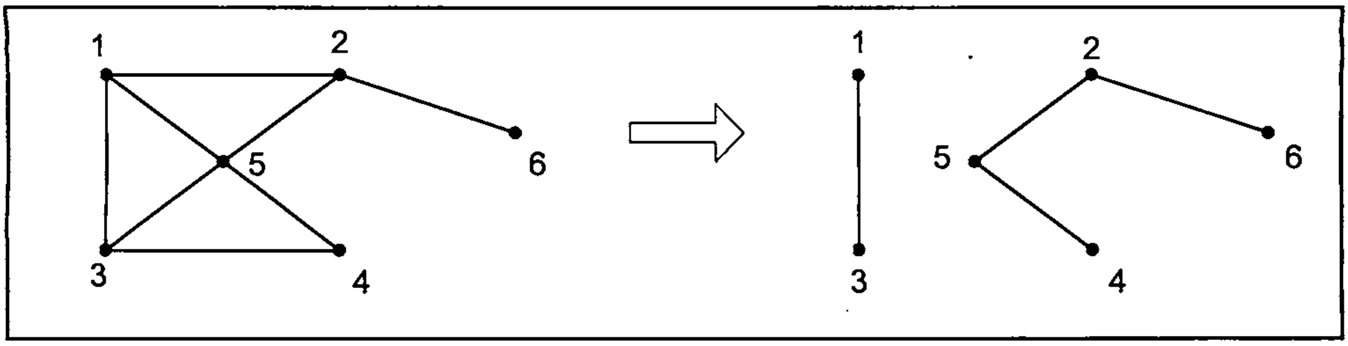
11. *Cut-Set*

DEFINISI 8.14. *Cut-set* dari graf terhubung *G* adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari *G* menyebabkan *G* tidak terhubung. Jadi, *cut-set* selalu menghasilkan dua buah komponen terhubung.

Nama lain untuk *cut-set* adalah jembatan (*bridge*). Jembatan adalah himpunan sisi yang apabila dibuang dari graf menyebabkan graf tersebut tidak terhubung (menjadi dua buah komponen terhubung). Yang harus diingat, di dalam *cut-set* tidak boleh mengandung himpunan bagian yang juga *cut set*, sehingga *cut-set* yang dimaksudkan adalah *fundamental cut-set*.

Contoh 8.14

Pada Gambar 8.20, jika kita membuang sisi (1, 2), graf masih tetap terhubung. Jika yang kita buang adalah (1, 2) dan (1, 5) graf masih tetap terhubung. Tetapi, jika kita buang sisi-sisi di dalam himpunan {(1,2), (1,5), (3,5), (3,4)} barulah graf menjadi tidak terhubung. Jadi, {(1,2), (1,5), (3,5), (3,4)} adalah *cut-set*. Terdapat banyak *cut-set* di dalam sebuah graf terhubung. Himpunan {(1,2), (2,5)} juga adalah *cut-set*, {(1,3), (1,5), (1,2)} adalah *cut-set*, {(2,6)} juga *cut-set*, tetapi {(1,2), (2,5), (4,5)} bukan *cut-set* sebab himpunan bagiannya, {(1,2), (2,5)} adalah *cut-set*. ■



Gambar 8.20 {(1,2), (1,5), (3,5), (3,4)} adalah *cut-set.*

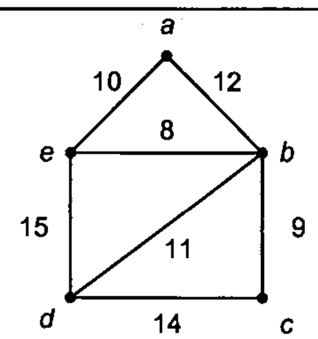
Cut-set berperanan besar dalam jaringan komunikasi dan jaringan transportasi. Misalkan keenam simpul pada Gambar 8.20(a) menyatakan enam kota yang dihubungkan dengan saluran telepon (sisi). Kita ingin menemukan apakah terdapat titik-titik lemah dalam jaringan yang memerlukan penguatan dengan alat saluran telepon tambahan. Kita lihat semua *cut-set* dari graf dan *cut-set* yang memiliki jumlah sisi paling sedikit adalah saluran yang mudah diserang/dipatahkan [DEO74].

12. Graf Berbobot (*Weighted Graph*)

DEFINISI 8.15. Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).

Bobot pada tiap sisi dapat berbeda-beda bergantung pada masalah yang dimodelkan dengan graf. Bobot dapat menyatakan jarak antara dua buah kota, biaya perjalanan antara dua buah kota, waktu tempuh pesan (*message*) dari sebuah simpul komunikasi ke simpul komunikasi lain (dalam jaringan komputer), ongkos produksi, dan sebagainya. Gambar 8.21 adalah contoh graf berbobot.

Istilah lain yang sering dikaitkan dengan graf berbobot adalah **graf berlabel.** Namun graf berlabel sesungguhnya lebih luas lagi definisinya. Label tidak hanya diberikan pada sisi, tetapi juga pada simpul. Sisi diberi label berupa bilangan tak-negatif, sedangkan simpul diberi label berupa data lain. Misalnya pada graf yang memodelkan kota-kota, simpul diberi nama kota-kota, sedangkan label pada sisi menyatakan jarak antara kota-kota.



Gambar 8.21 Graf berbobot

8.6 Beberapa Graf Sederhana Khusus

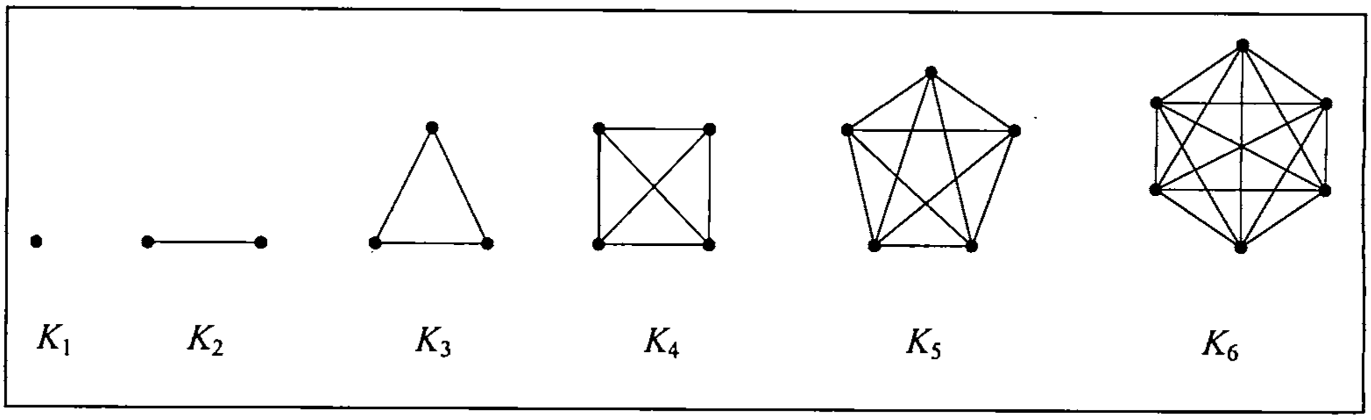
Ada beberapa graf sederhana khusus yang dijumpai pada banyak aplikasi. Beberapa di antaranya diperkenalkan di bawah ini.

a. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Graf lengkap ialah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n. Setiap simpul pada K_n berderajat $n - 1$.

Contoh 8.15

Enam buah graf lengkap, K_1 sampai K_6, diperagakan pada Gambar 8.22. ■



Gambar 8.22 Graf lengkap K_n, $1 \leq n \leq 6$

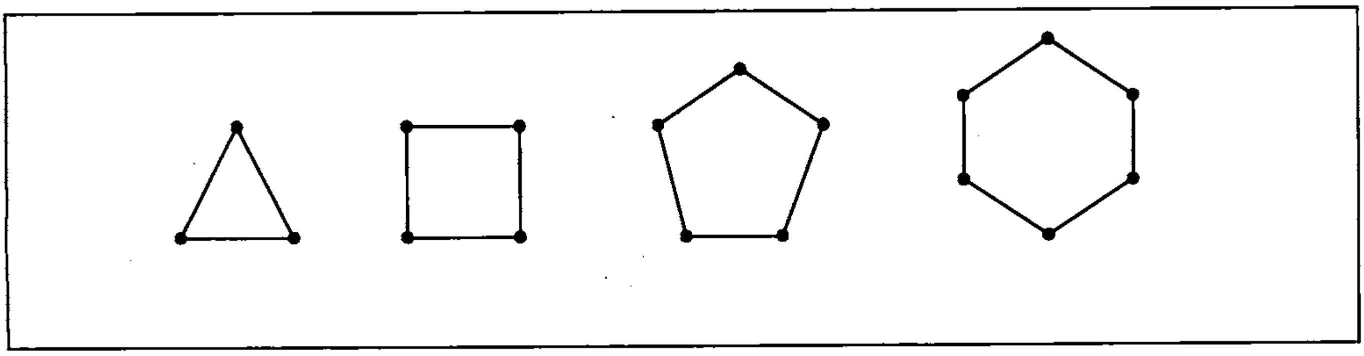
Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah $n(n - 1)/2$. Rumus ini diperoleh sbb: untuk 1 buah simpul terdapat $(n - 1)$ buah sisi ke $(n - 1)$ simpul lainnya, maka untuk n buah simpul terdapat $n(n - 1)$ buah sisi. Karena setiap sisi terhitung dua kali untuk pasangan simpul yang bersisisian dengannya, maka jumlah sisi seluruhnya dibagi dua, yaitu $n(n - 1)/2$.

b. Graf Lingkaran

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n. Jika simpul-simpul pada C_n adalah $v_1, v_2, \ldots, v_n$, maka sisi-sisinya adalah (v_1, v_2), (v_2, v_3), …, (v_{n-1}, v_n), dan (v_n, v_1). Dengan kata lain, ada sisi dari simpul terakhir, v_n, ke simpul pertama, v_1.

Contoh 8.16

Gambar 8.23 adalah empat buah graf lingkaran. Salah satu topologi jaringan komputer area lokal (LAN) adalah topologi cincin (*ring topology*) yang direpresentasikan sebagai graf lingkaran. ■



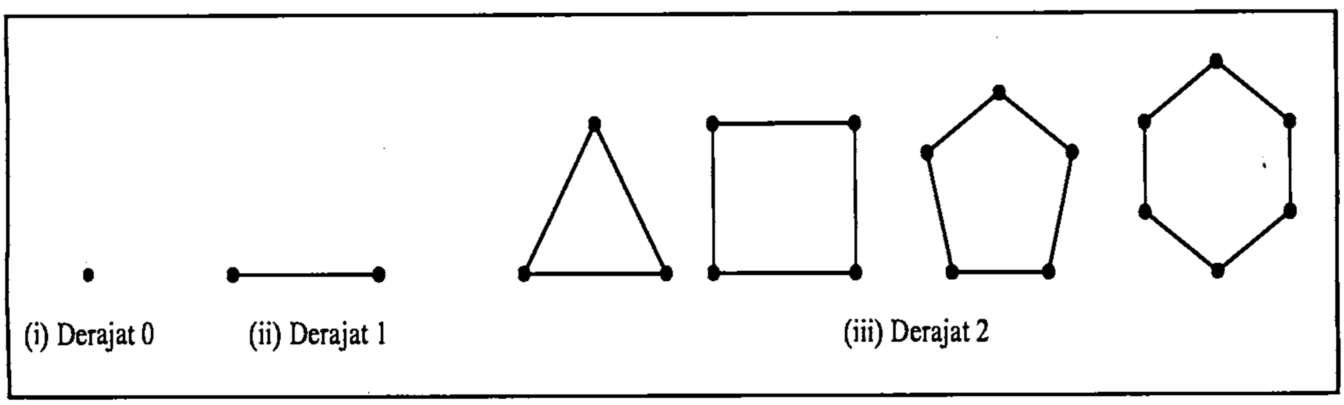
Gambar 8.23 Graf lingkaran C_n, $3 \leq n \leq 6$

c. Graf Teratur (*Regular Graphs*)

Graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama disebut **graf teratur**. Apabila derajat setiap simpul adalah r, maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat r.

Contoh 8.17

Gambar 8.24 adalah graf teratur berderajat 0, 1, dan 2. ■

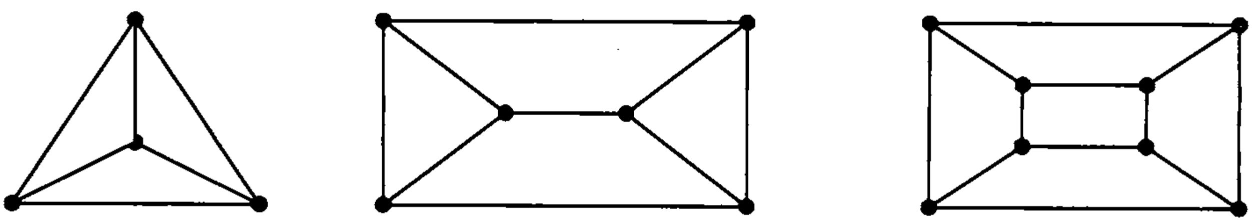


Gambar 8.24 Graf teratur derajat 0, 1, dan 2

Catatlah bahwa graf lengkap K_n juga adalah graf teratur berderajat $(n - 1)$. Demikian pula graf lingkaran C_n juga graf teratur berferajat 2. Mudah dihitung bahwa jumlah sisi pada graf teratur derajat r dengan n buah simpul adalah $nr/2$ (periksa!).

Contoh 8.18

Graf (i) pada gambar 8.25 adalah graf teratur berderajat 3 dengan 4 buah simpul, (ii) graf teratur derajat 3 dengan 6 buah simpul, dan (iii) adalah graf teratur derajat 3 dengan 8 buah simpul. ■



(i) $n = 4, r = 3$ (ii) $n = 6, r = 3$ (iii) $n = 8, r = 3$

Gambar 8.25 Graf teratur berderajat 3, masing-masing dengan 4 , 6, dan 8 simpul

Contoh 8.19

Berapa jumlah maksimum dan jumlah minimum simpul pada graf sederhana yang mempunyai 12 buah sisi dan setiap simpul berderajat sama yang ≥ 3?

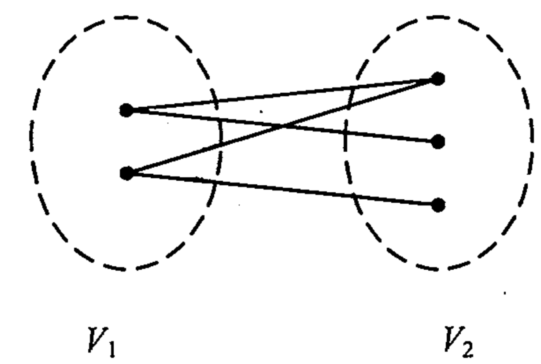
Penyelesaian:
Tiap simpul berderajat sama, berarti graf teratur.
Jumlah sisi pada graf teratur berderajat r adalah $e = nr/2$. Jadi, $n = 2e/r = (2)(12)/r = 24/r$
Untuk $r = 3$, jumlah simpul yang dapat dibuat adalah maksimum, yaitu $n = 24/3 = 8$
Untuk r yang lain ($r > 3$ dan r merupakan pembagi bilangan bulat dari 24),

$r = 4 \rightarrow n = 24/4 = 6$
$r = 6 \rightarrow n = 24/6 = 4 \rightarrow$ tidak mungkin membentuk graf sederhana
$r = 8 \rightarrow n = 24/8 = 3 \rightarrow$ tidak mungkin membentuk graf sederhana
$r = 12 \rightarrow n = 24/12 = 2 \rightarrow$ tidak mungkin membentuk graf sederhana
$r = 24 \rightarrow n = 24/24 = 1 \rightarrow$ tidak mungkin membentuk graf sederhana

Jadi, jumlah simpul paling sedikit 6 buah dan paling banyak 8 buah. ■

d. Graf Bipartit (*Bipartite Graph*)

Graf G yang himpunan simpulnya dapat dikelompokkan menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2, sedemikian sehingga setiap sisi di dalam G menghubungkan sebuah simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2 disebut **graf bipartit** dan dinyatakan sebagai $G(V_1, V_2)$. Dengan kata lain, setiap pasang simpul di V_1 (demikian pula dengan simpul-simpul di V_2) tidak bertetangga (lihat Gambar 8.26). Apabila setiap simpul di V_1 bertetangga dengan semua simpul di V_2, maka $G(V_1, V_2)$ disebut sebagai **graf bipartit lengkap** (*complete bipartite graph*), dilambangkan dengan $K_{m,n}$. Jumlah sisi pada graf bipartit lengkap adalah mn.

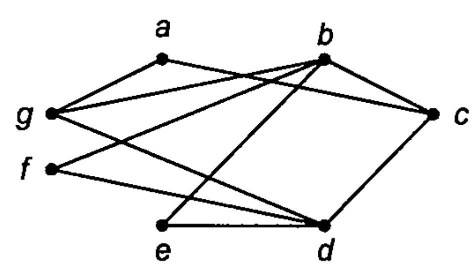


Gambar 8.26 Graf bipartit $G(V_1, V_2)$

Graf lengkap K_2 adalah graf bipartit, tetapi graf lengkap K_3 bukan graf bipartit. Untuk menunjukkan K_3 bukan graf bipartit, bagilah simpul-simpulnya menjadi dua bagian V_1 dan V_2, yang dalam hal ini V_1 berisi satu buah simpul dan V_2 mengandung dua buah simpul. Ternyata, dua simpul di V_2 terhubung oleh sebuah sisi. Hal ini jelas tidak sesuai dengan definisi graf bipartit.

Contoh 8.20

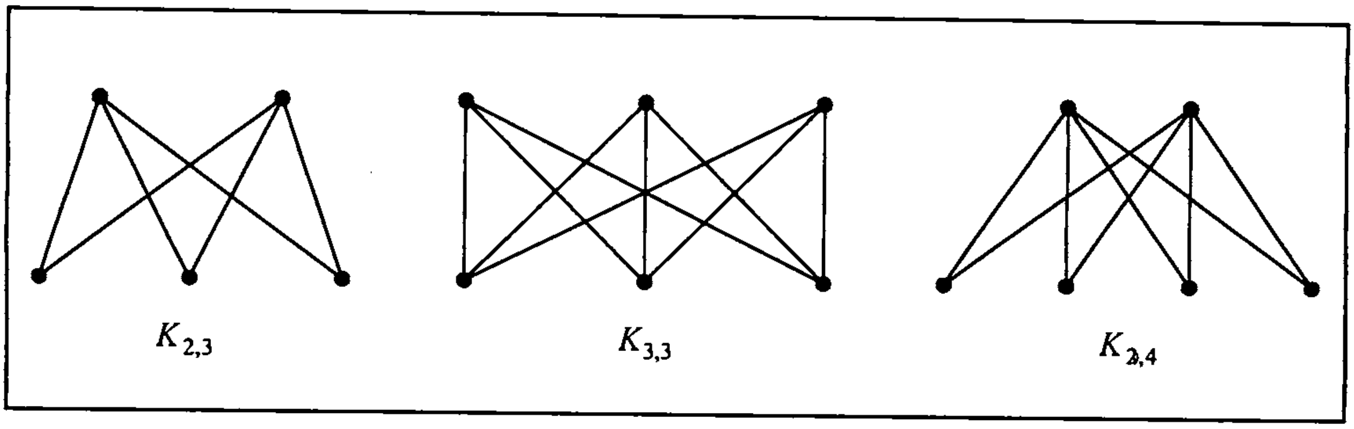
Graf G pada Gambar 8.27 adalah graf bipartit, karena simpul-simpunya dapat dibagi menjadi $V_1 = \{a, b, d\}$ dan $V_2 = \{c, e, f, g\}$ dan setiap sisi menghubungkan simpul di V_1 ke simpul di V_2. Dengan cara yang sama, perlihatkan bahwa C_6 adalah graf bipartit. ■



Gambar 8.27 Graf bipartit

Contoh 8.21

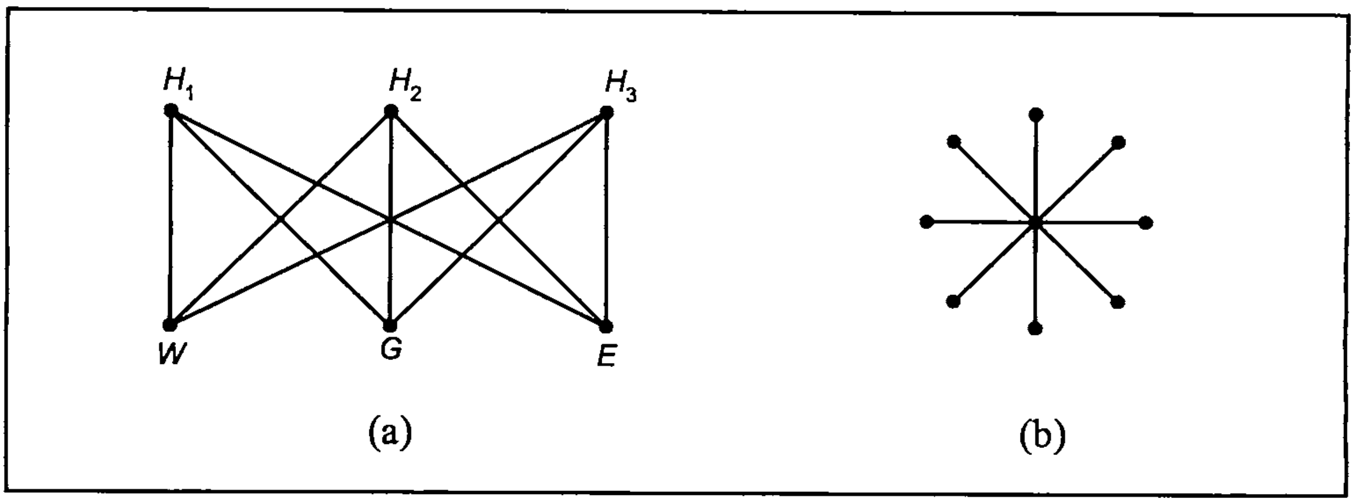
Graf G pada Gambar 8.28 adalah graf bipartit lengkap $K_{2,3}$, $K_{3,3}$, $K_{2,4}$. ■



Gambar 8.28 Graf bipartit lengkap $K_{2,3}$, $K_{3,3}$ dan $K_{2,4}$.

Contoh persoalan yang dinyatakan sebagai graf bipartit adalah persoalan utilitas: misalkan ada tiga buah rumah (Gambar 8.29(a)), H_1, H_2, dan H_3, masing-masing rumah dihubungkan dengan tiga buah utilitas – air (W), gas (G), dan listrik (E) – dengan alat pengantar berupa pipa, kabel, dsb. Graf pada Gambar 8.29(a) adalah graf bipartit lengkap, $K_{3,3}$.

Contoh graf bipartit yang lain adalah topologi bintang (*star topology*) pada jaringan komputer *LAN* (Gambar 8.29(b)). Di sini V_1 berisi sebuah simpul di pusat, sedangkan V_2 berisi simpul-simpul sisanya. Catatlah bahwa graf topologi bintang dengan n simpul (n terminal komputer) adalah graf $K_{1,n}$.



Gambar 8.29 (a) Graf persoalan utilitas dan (b) topologi bintang keduanya adalah graf bipartit.

8.7 Representasi Graf

Bila graf akan diproses dengan program komputer, maka graf harus direpresentasikan di dalam memori. Terdapat beberapa represesentasi yang mungkin untuk graf. Di sini hanya diberikan tiga macam representasi yang sering digunakan, yaitu matriks ketetanggaan, matriks bersisian, dan senarai ketetanggaan.

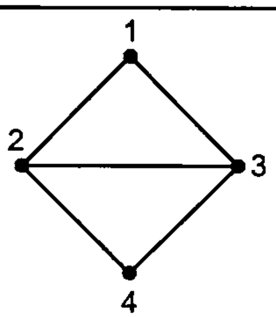
1. Matriks Ketetanggaan (*adjacency matrix*)

Matriks ketetanggaan adalah representasi graf yang paling umum. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dengan n simpul, $n \geq 1$. Matriks ketetanggaan G adalah matriks dwimatra yang berukuran $n \times n$. Bila matriks tersebut dinamakan $A = [a_{ij}]$, maka $a_{ij} = 1$ jika simpul i dan j bertetangga, sebaliknya $a_{ij} = 0$ jika simpul i dan j tidak bertetangga.

Karena matriks ketetanggaan hanya berisi 0 dan 1, maka matriks tersebut dinamakan juga **matriks nol-satu** (*zero-one*). Selain dengan angka 0 dan 1, elemen matriks dapat juga dinyatakaan dengan nilai *false* (menyatakan 0) dan *true* (menyatakan 1). Perhatikanlah bahwa matriks ketetanggaan didasarkan pada pengurutan nomor simpul. Di sini, terdapat $n!$ cara pengurutan nomor simpul, yang berarti ada $n!$ matriks ketetanggaan berbeda untuk graf dengan n simpul.

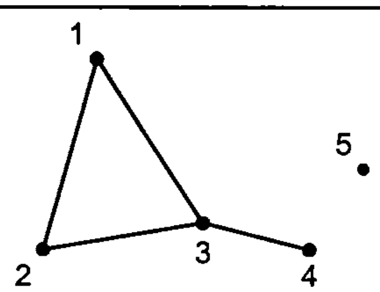
Contoh 8.23

Gambar 8.30 memperlihatkan graf sederhana dengan matriks ketetanggaannya, masing-masing graf terhubung, graf tak-terhubung, dan graf berarah. ■



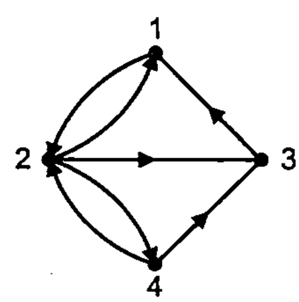
$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(a)



$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(b)



$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(c)

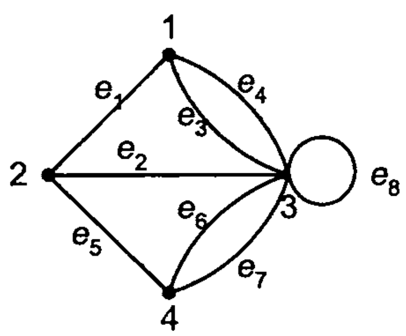
Gambar 8.30 Tiga buah graf dengan matriks ketetanggaannya masing-masing.

Matriks ketetanggaan untuk graf sederhana dan tidak berarah selalu simetri, sedangkan untuk graf berarah matriks ketetanggaannya belum tentu simetri (akan simetri jika berupa graf berarah lengkap). Selain itu, diagonal utamanya selalu nol karena tidak ada sisi gelang.

Sayangnya, matriks ketetanggaan nol-satu tidak dapat digunakan untuk merepresentasikan graf yang mempunyai sisi ganda (graf ganda). Untuk menyiasatinya, maka elemen a_{ij} pada matriks ketetanggaan sama dengan jumlah sisi yang berasosiasi dengan (v_i, v_j). Matriks ketetanggaannya tentu bukan lagi matriks nol-satu. Untuk graf semu, gelang pada simpul v_i dinyatakan dengan nilai 1 pada posisi (i, i) di matriks ketetanggaannya.

Contoh 8.24

Gambar 8.31 memperlihatkan matriks ketetanggaan untuk graf yang mengandung sisi ganda dan gelang. ■



$$
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Gambar 8.31 Matriks ketetanggaan untuk graf yang mengandung sisi ganda dan gelang.

Jumlah elemen matris ketetanggan untuk graf dengan n simpul adalah adalah n^2. Jika tiap elemen membutuhkan ruang memori sebesar p, maka ruang memori yang diperlukan seluruhnya adalah pn^2. Pada matriks ketetanggan untuk graf tak-berarah sederhana simetri, kita cukup menyimpan elemen segitiga atas saja, karena matriksnya simetri, sehingga ruang memori yang dibutuhkan dapat dihemat menjadi $pn^2/2$.

Keuntungan representasi dengan matriks ketetanggaan adalah elemen matriksnya dapat dakses langsung melalui indeks. Selain itu, kita juga dapat menentukan dengan langsung apakah simpul i dan simpul j bertetangga.

Derajat tiap simpul i dapat dihitung dari matriks ketetanggaan. Untuk graf tak-berarah,

$$d(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \qquad (8.5)$$

sedangkan untuk graf berarah,

$$d_{in}(v_j) = \text{jumlah nilai pada kolom } j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

$$d_{out}(v_i) = \text{jumlah nilai pada baris } i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

Contoh 8.23

Tinjau matriks ketetanggaan pada Gambar 8.30.

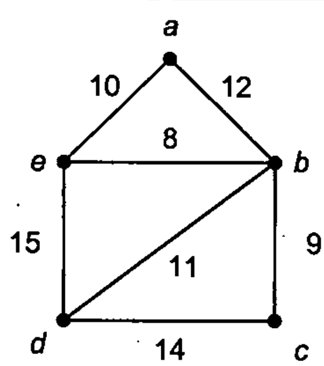
(a) derajat simpul 2 pada Gambar 8.30(a) adalah 1 + 0 + 1 + 1 = 3
derajat simpul 4 pada Gambar 8.30(a) adalah 0 + 1 + 1 + 0 = 2

(b) derajat simpul 4 pada Gambar 8.30(b) adalah 0 + 0 + 1 + 0 + 0 = 1
derajat simpul 5 pada Gambar 8.30(b) adalah 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0

(c) derajat-masuk simpul 2 pada Gambar 8.30(c) adalah 1 + 0 + 0 + 1 = 2
derajat-keluar simpul 2 pada Gambar 8.30(c) adalah 1 + 0 + 1 + 1 = 3 ■

Contoh 8.25

Untuk graf berbobot, a_{ij} menyatakan bobot tiap sisi yang menghubungkan simpul i dengan simpul j. Gambar 8.32 adalah graf berbobot beserta matriks ketetanggaannya. ■



$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{bmatrix} \infty & 12 & \infty & \infty & 10 \\ 12 & \infty & 9 & 11 & 8 \\ \infty & 9 & \infty & 14 & \infty \\ \infty & 11 & 14 & \infty & 15 \\ 10 & 8 & \infty & 15 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

Gambar 8.32 Graf berbobot (kiri) dan (b) matriks ketetanggaannya.

Tanda "∞" menyatakan bahwa tidak ada sisi dari simpul i ke simpul j atau dari simpul i ke simpul i itu sendiri, sehingga a_{ij} dapat diberi nilai tak berhingga.

2. Matriks Bersisian (*incidency matrix*)

Bila matriks ketetanggaan menyatakan ketetanggaan simpul-simpul di dalam graf, maka matriks bersisian menyatakan kebersisian simpul dengan sisi. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dengan n simpul dan m buah sisi. Matriks bersisian G adalah matriks dwimatra yang berukuran $n \times m$. Baris menunjukkan label simpul, sedangkan kolom menunjukkan label sisinya. Bila matriks tersebut dinamakan $A = [a_{ij}]$, maka $a_{ij} = 1$ jika simpul i berseisian dengan sisi j, sebaliknya $a_{ij} = 0$ jika simpul i tidak bersisian dengan sisi j.

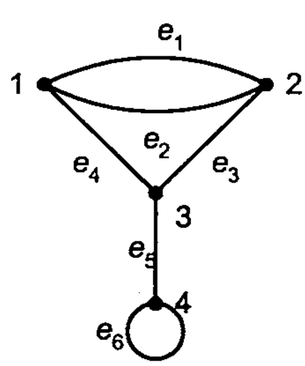
Matriks bersisian dapat digunakan untuk merepresentasikan graf yang mengandung sisi ganda atau sisi gelang.

Derajat setiap simpul i dapat dihitung dengan menghitung jumlah seluruh elemen pada baris i (kecuali pada graf yang mengandung gelang).

Jumlah elemen matriks bersisian adalah nm. Jika tiap elemen membutuhkan ruang memori sebesar p, maka ruang memori yang diperlukan seluruhnya adalah pnm.

Contoh 8.26.

Gambar 8.33 memperlihatkan matriks bersisian untuk graf yang direpresentasikannya. Jumlah elemen matriks adalah $4 \times 6 = 24$. ■



$$
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

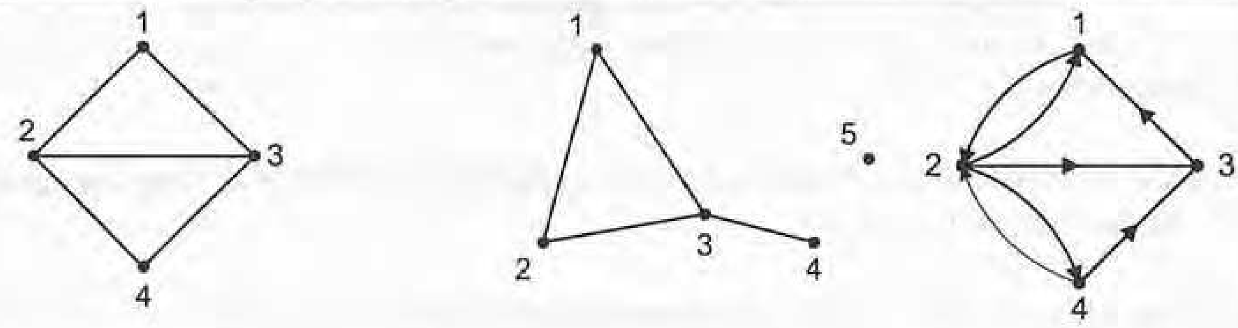
Gambar 8.33 Graf (kiri) dan matriks bersisiannya (kanan)

3. Senarai Ketetanggaan (*adjacency list*)

Kelemahan matriks ketetanggaan adalah bila graf memiliki jumlah sisi relatif sedikit, karena matriksnya bersifat jarang (*sparse*), yaitu mengandung banyak elemen nol, sedangkan elemen yang bukan nol sedikit. Ditinjau dari implementasinya di dalam komputer, kebutuhan ruang memori untuk matriks jarang boros karena komputer menyimpan elemen 0 yang tidak perlu. Untuk mengatasi masalah ini, kita menggunakan representasi yang ketiga, yaitu senarai ketetanggaan. Senarai ketetanggaan mengenumerasi simpul-simpul yang bertetangga dengan setiap simpul di dalam graf.

Contoh 8.27

Gambar 8.34 memperlihatkan graf tak-berarah dan graf berarah beserta senarai ketetanggaannya masing-masing. ■



Senarai ketetanggaan:	Senarai ketetanggaan:	Senarai ketetanggaan:
1: 2, 3	1: 2, 3	1: 2
2: 1, 3, 4	2: 1, 3	2: 1, 3, 4
3: 1, 2, 4	3: 1, 2, 4	3: 1
4: 2, 3	4: 3	4: 2, 3
	5: -	
(a)	(b)	(c)

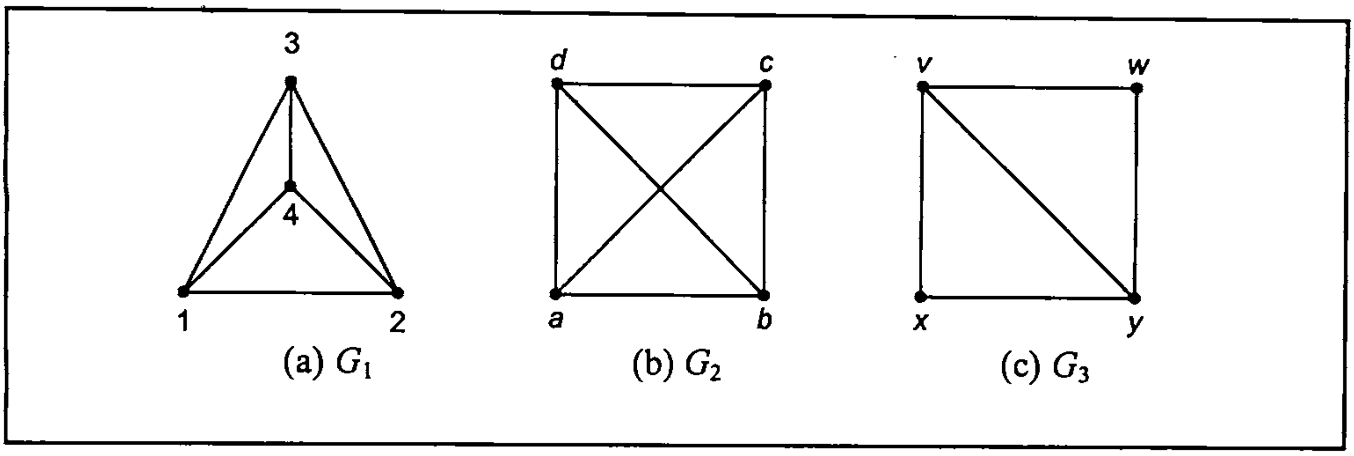
Gambar 8.34 Tiga buah graf dengan matriks ketetanggaannya masing-masing.

8.8 Graf Isomorfik (*Isomorphic Graph*)

Misalkan kepada dua orang mahasiswa diminta menggambarkan sebuah graf dengan empat buah simpul, masing-masing simpul berderajat tiga. Graf yang digambar bisa beragam bentuknya, dua diantaranya ditunjukkan pada Gambar 8.35(a) dan 8.35(b). Meskipun kedua graf tersebut terlihat berbeda bentuknya, dengan penamaan simpul yang berbeda pula, namun sebenarnya keduanya merupakan graf yang sama. Dua buah graf yang sama tetapi secara geometri berbeda disebut graf yang saling **isomorfik**.

DEFINISI 8.16. Dua buah graf, G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan antara sisi-sisi keduanya sedemikian sehingga jika sisi e bersisian dengan simpul u dan v di G_1, maka sisi e' yang berkorespon di G_2 juga harus bersisian dengan simpul u' dan v' di G_2.

Dua buah graf yang isomorfik adalah graf yang sama, kecuali penamaan simpul dan sisinya saja yang berbeda. Ini benar karena sebuah graf dapat digambarkan dalam banyak cara [DEO74].

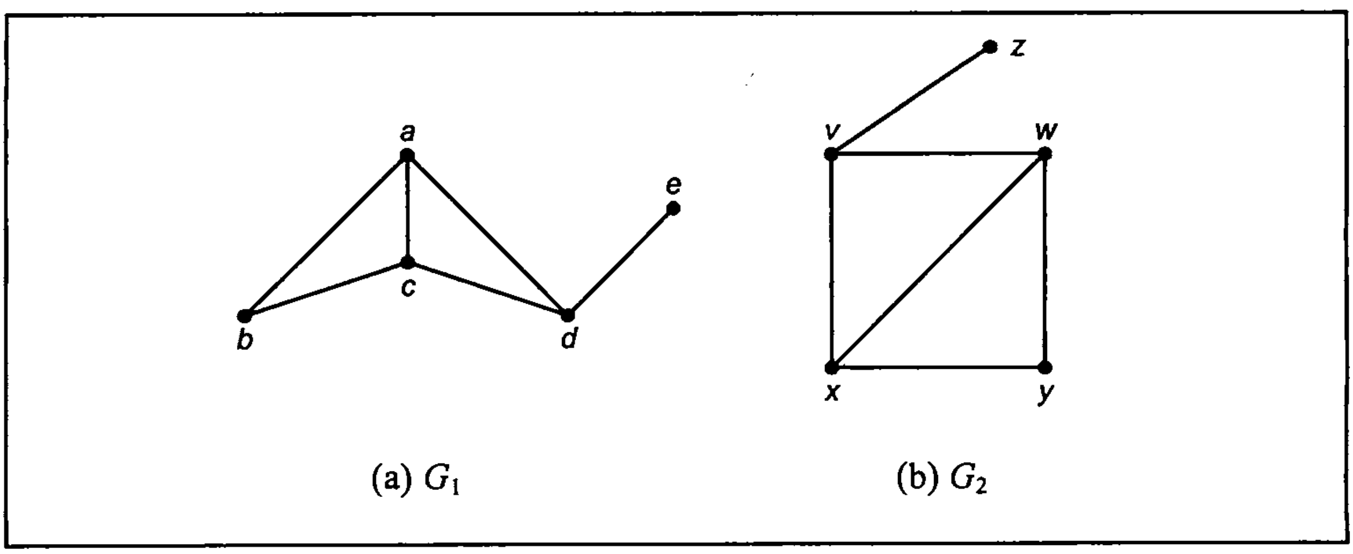


Gambar 8.35 G_1 isomorfik dengan G_2, tetapi G_1 tidak isomorfik dengan G_3

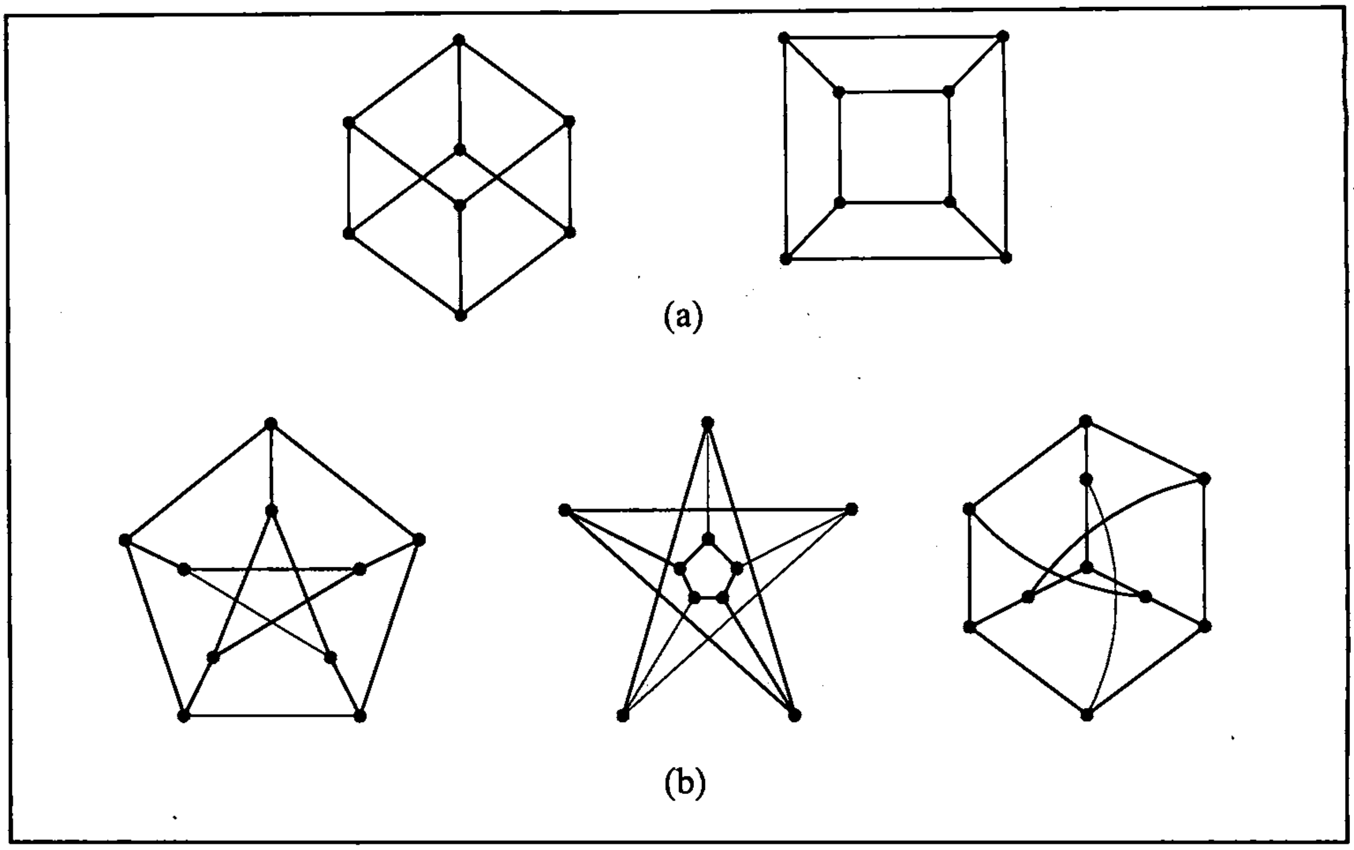
Pada Gambar 8.35, G_1 isomorfik dengan G_2. Simpul 1, 2, 3, dan 4 di G_1 berkoresponden dengan simpul *a*, *b*, *c*, dan *d* di G_2. Sisi (1, 2), (2,3), (3,1), (3,4), (1,4), dan (2,4) berkoresponden dengan sisi (*a*, *b*), (*b*, *c*), (*c*, *d*), (*a*, *d*), (*a*, *c*), dan (*b*, *d*). Semua simpul di G_1 dan G_2 berderajat 3. G_1 maupun G_2 tidak isomorfik dengan G_3, karena simpul-simpul di G_3 dua buah berderajat dua dan dua buah lagi berderajat tiga, sedangkan simpul-simpul di G_1 dan G_2 semuanya berderajat tiga.

Dua buah graf pada Gambar 8.36 di bawah ini juga isomorfik. Simpul *a*, *b*, *c*, *d*, dan *e* di G_1 masing-masing berkoresponden dengan simpul *x*, *y*, *w*, *v*, dan *z* di G_2. Masing-masing simpul yang disebutkan itu berderajat 3, 2, 3, 3, dan 1. Periksa pula bahwa sisi-sisi di G_1 berkoresponden dengan sisi-sisi di G_2.

Contoh-contoh graf lain yang isomorfik diperlihatkan pada Gambar 8.37.



Gambar 8.36 Graf (a) dan graf (b) isomorfik [DEO74]

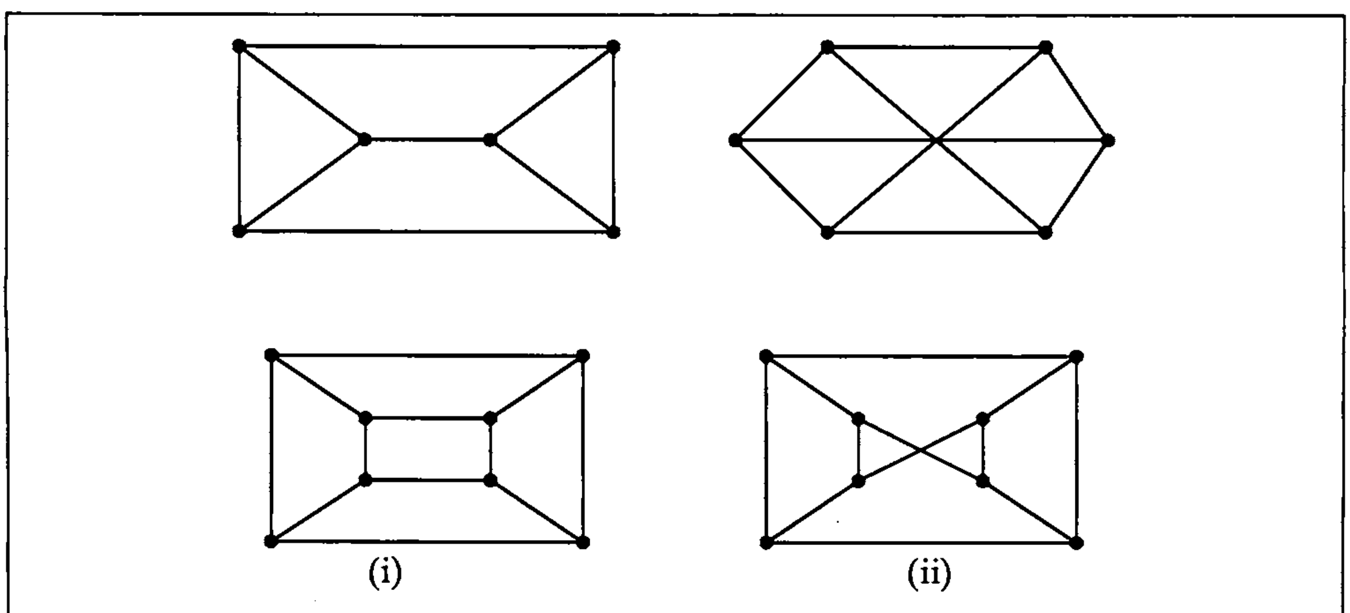


Gambar 8.37 (a) Dua buah graf isomorfik, (b) tiga buah graf isomorfik [DEO74]

Contoh 8.28

Gambarkan graf yang isomorfik dengan masing-masing graf teratur pada Gambar 8.38(i).

Penyelesaian:
Solusi untuk persoalan ini tidak tunggal, sebab banyak cara untuk menggambarkan graf isomorfiknya. Salah satunya ditunjukkan pada Gambar 8.38 (ii). ■

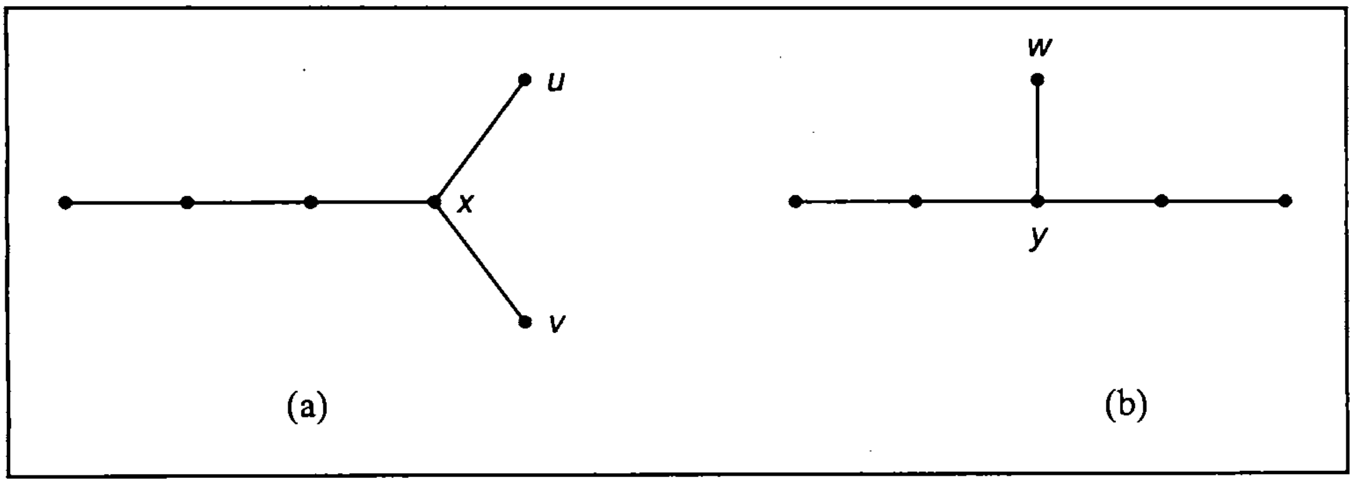


Gambar 8.38 (i) Dua buah graf teratur, (ii) graf isomorfiknya [LIP92]

Tidak mudah menentukan apakah dua buah graf isomorfik hanya dengan melihat gambarnya saja. Dari definisi isomorfik kita menyimpulkan dua buah graf isomorfik memenuhi ketiga syarat berikut [DEO74]:

1. Mempunyai jumlah simpul yang sama.
2. Mempunyai jumlah sisi yang sama
3. Mempunyai jumlah simpul yang sama berderajat tertentu

Namun, ketiga syarat ini ternyata belum cukup menjamin keisomorfikan. Pemeriksaan secara visual masih tetap diperlukan. Contohnya, dua buah graf pada Gambar 8.39 memenuhi ketiga syarat yang disebutkan di atas, padahal keduanya tidak isomorfik. Di (a) terdapat dua simpul anting-anting (berderajat 1) yang bertetangga dengan simpul x, sedangkan di (b) hanya terdapat satu buah simpul anting-anting yang bertetangga dengan y.



Gambar 8.39 Dua buah graf yang tidak isomorfik [DEO74]

Contoh 8.29

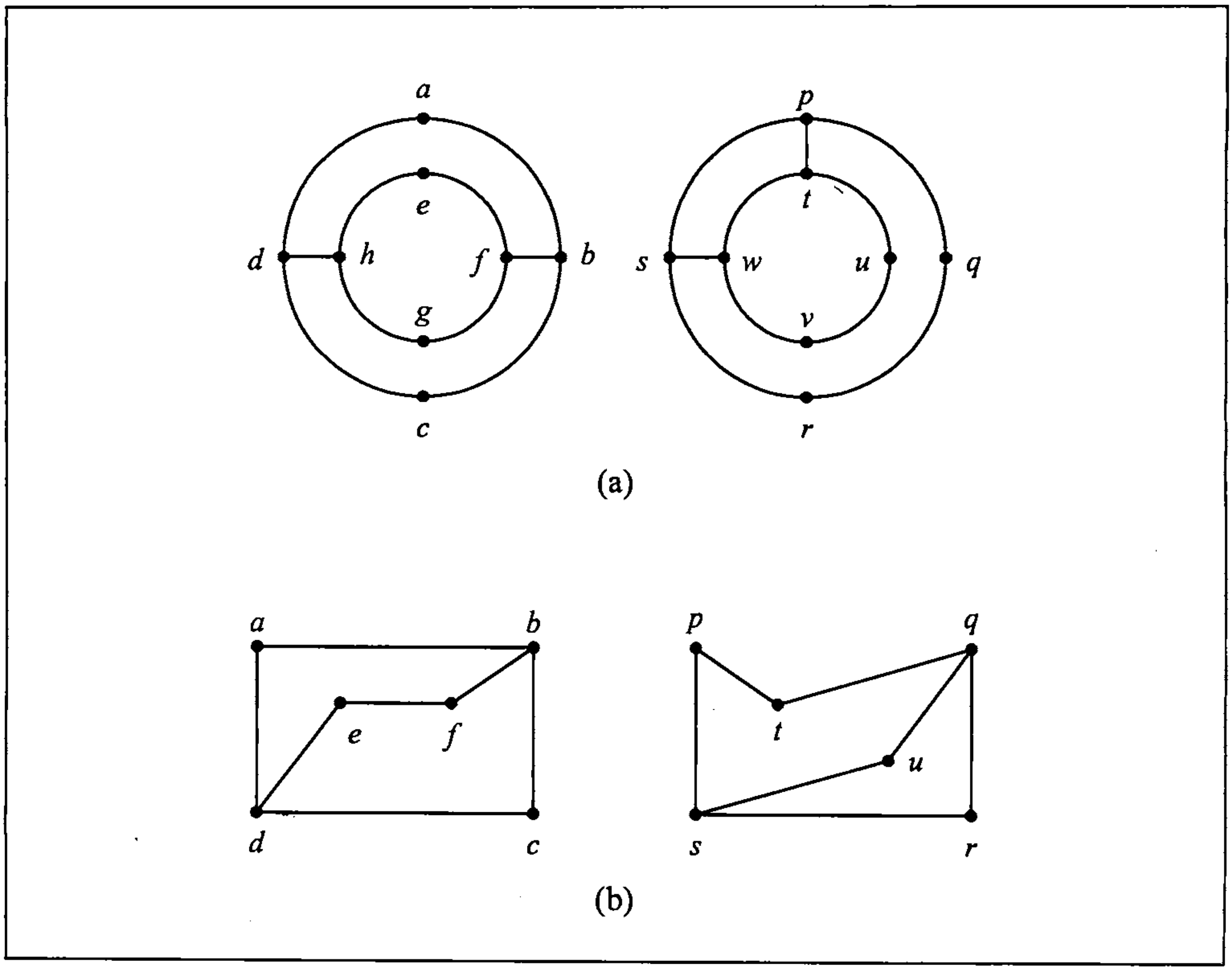
Manakah di antara pasangan graf pada Gambar 8.40(a) isomorfik?

Penyelesaian:

(a) Kedua graf pada Gambar 8.40(a) tidak isomorfik karena tidak ada korespondensi satu-satu antara simpul-simpul pada kedua graf. bertetangga. Tinjau misalnya simpul d; simpul d bertetangga dengan dua buah simpul berderajat 2 (a dan c) dan sebuah simpul berderajat 3 (h). Graf di sebelah kanannya tidak mempunyai simpul yang berkoresponden dengan d (jika s dianggap sebagi simpul yang berkoresponden dengan d, maka ini jelas tidak benar, sebab s bertetangga dengan sebuah simpul berderajat 2 (r) dan dua buah simpul berderajat 3 (p dan w).

(b) Kedua graf pada Gambar 8.40(a) isomorfik sebab terdapat koresponden satu-satu antara simpul pada graf sebelah kiri dengan simpul-simpul pada graf sebelah kanan, yaitu

a berkoresponden dengan u;
b berkoresponden dengan q;
c berkoresponden dengan r;
d berkoresponden dengan s;
e berkoresponden dengan p;
f berkoresponden dengan t. ■



Gambar 8.40 (a) kedua graf tidak isomorfik, (b) kedua graf isomorfik

Untuk memperlihatkan bahwa dua buah graf isomorfik, kita dapat menunjukkan bahwa matriks ketetanggaannya kedua graf itu sama. Matriks ketetanggaan untuk dua buah graf yang isomorfik pada Gambar 8.36 adalah seperti di bawah ini.

$$A_{G1} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A_{G2} = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ w \\ v \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & w & v & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Terlihat bahwa matriks ketetanggaan G_1 dan G_2 keduanya sama, yang berarti kedua graf tersebut isomorfik.

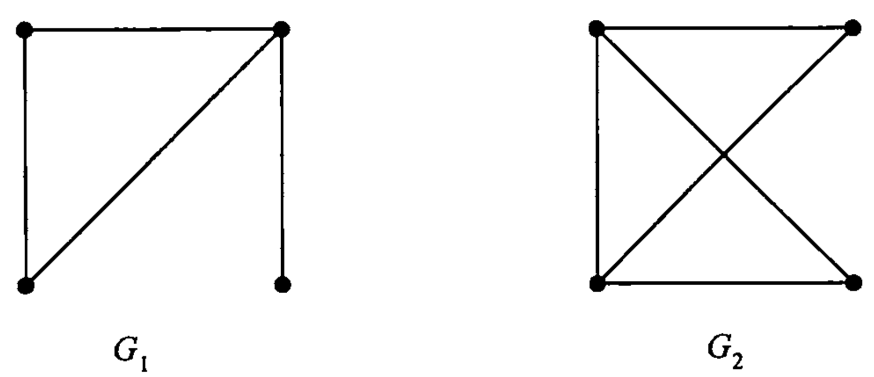
Contoh 8.30

Apakah graf sederhana yang disajikan oleh pasangan matriks ketetanggaan di bawah ini isomorfik? Jelaskan jawaban, lalu gambarkan grafnya!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Keduanya tidak isomorfik karena jumlah sisi pada graf pertama dan graf kedua tidak sama. Graf pertama (G_1) mempunyai 4 buah sisi (hitung jumlah elemen 1 di atas digaonal utama), sedangkan graf kedua (G_2) mempunyai 5 buah sisi (hitung jumlah elemen 1 di atas diagonal utama). Gambar 8.41 memperlihatkan kedua graf yang bersesuaian dengan masing-masing matriks ketetanggaan di atas. ■



Gambar 8.41 Graf yang merepresentasikan masing-masing matriks ketetanggaan pada Contoh 8.30

Sampai saat ini belum ada algoritma yang mangkus untuk memeriksa apakah dua buah graf isomorfik. Algoritma terbaik untuk memeriksa apakah dua buah graf isomorfik mempunyai kompleksitas waktu eksponensial (bergantung pada jumlah simpul di dalam graf) pada kasus terburuk [ROS99]. Semakin banyak simpul graf, kebutuhan waktu algoritma meningkat sangat drastis.

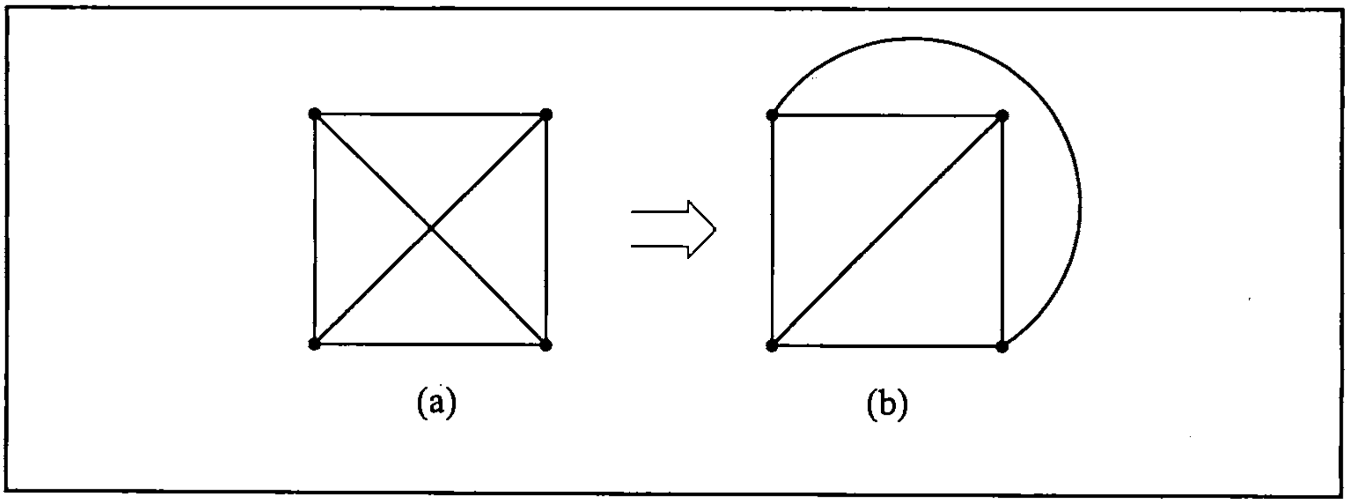
8.9 Graf Planar dan Graf Bidang

DEFINISI 8.17. Graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi yang tidak saling memotong (bersilangan) disebut sebagai **graf planar**, jika tidak, maka ia disebut **graf tak-planar**.

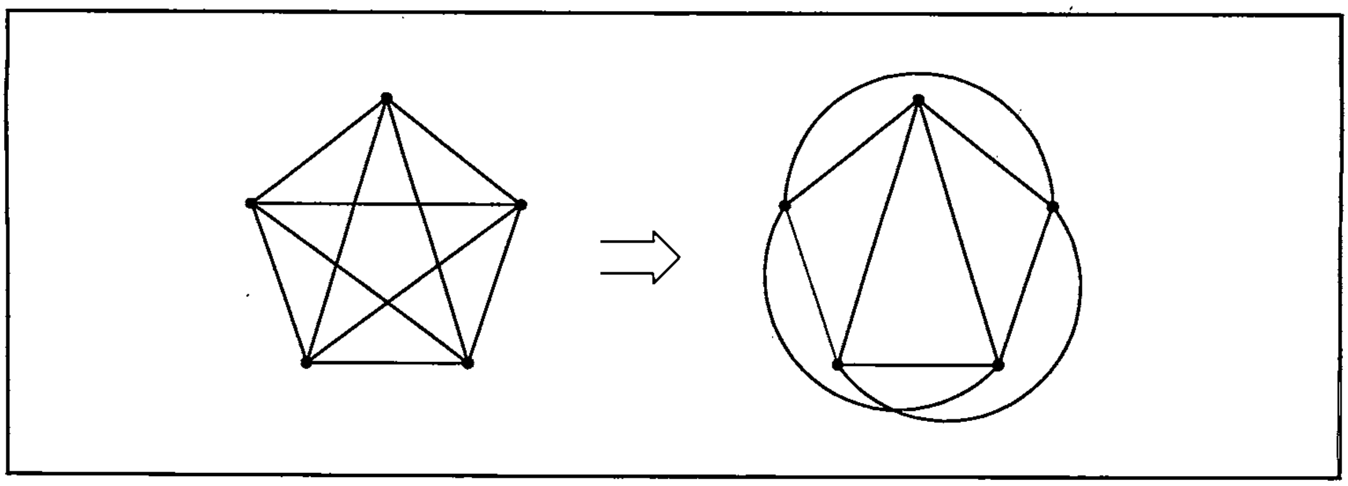
Perlu diperhatikan bahwa belum tentu suatu graf yang secara kasat mata terlihat sisi-sisinya saling berpotongan tidak planar. Graf tersebut mungkin saja panar, karena graf tersebut dapat digambarkan kembali dengan cara berbeda yang sisi-sisinya tidak saling berpotongan.

Contoh 8.31

Graf K_4 adalah graf planar, biasanya digambarkan dengan sisi yang bersilangan seperti ditinjukkan pada Gambar 8.42(a). Kita dapat menggambarkan graf itu kembali tanpa ada sisi-sisi yang berpotongan, seperti pada Gambar 8.42(b). K_5 pada Gambar 8.43 bukan graf planar. ■



Gambar 8.42 K_4 adalah graf planar

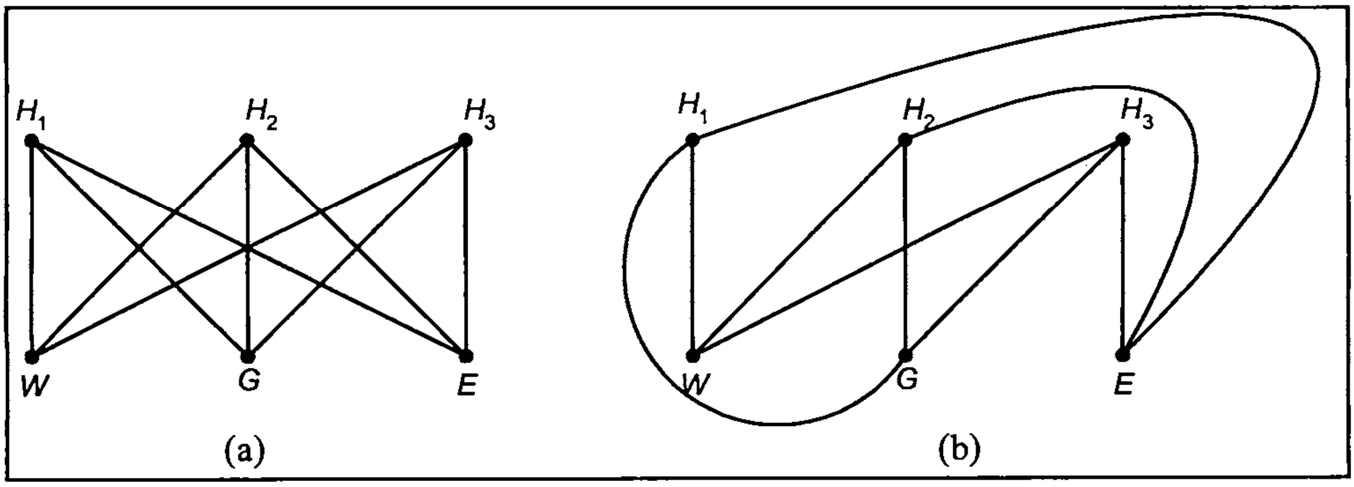


Gambar 8.43 K_5 bukan graf planar

Contoh 8.32

Tinjau kembali persoalan utilitas: terdapat tiga buah rumah (Gambar 8.44(a)), H_1, H_2, dan H_3, masing-masingnya dihubungkan tiga buah utilitas –air (W), gas (G), dan listrik (E)- dengan alat pengantar (pipa, kabel, dsb). Graf pada Gambar 8.44(a) tersebut juga graf bipartit lengkap, $K_{3,3}$. Mungkinkah membangun jaringan utilitas sehingga tidak ada pengantar yang saling berpotongan? (sebab kalau saling berpotongan, dikhawatirkan timbul masalah yang serius, misalnya bila kabel listrik berpotongan dengan pipa gas dapat terjadi ledakan). Jika graf pada Gambar 8.44(a) digambar ulang, ternyata tidak mungkin menggambar sisi yang tidak saling berpotongan (Gambar 8.44(b)). Dengan kata lain, graf persoalan utilitas tidak planar.

■

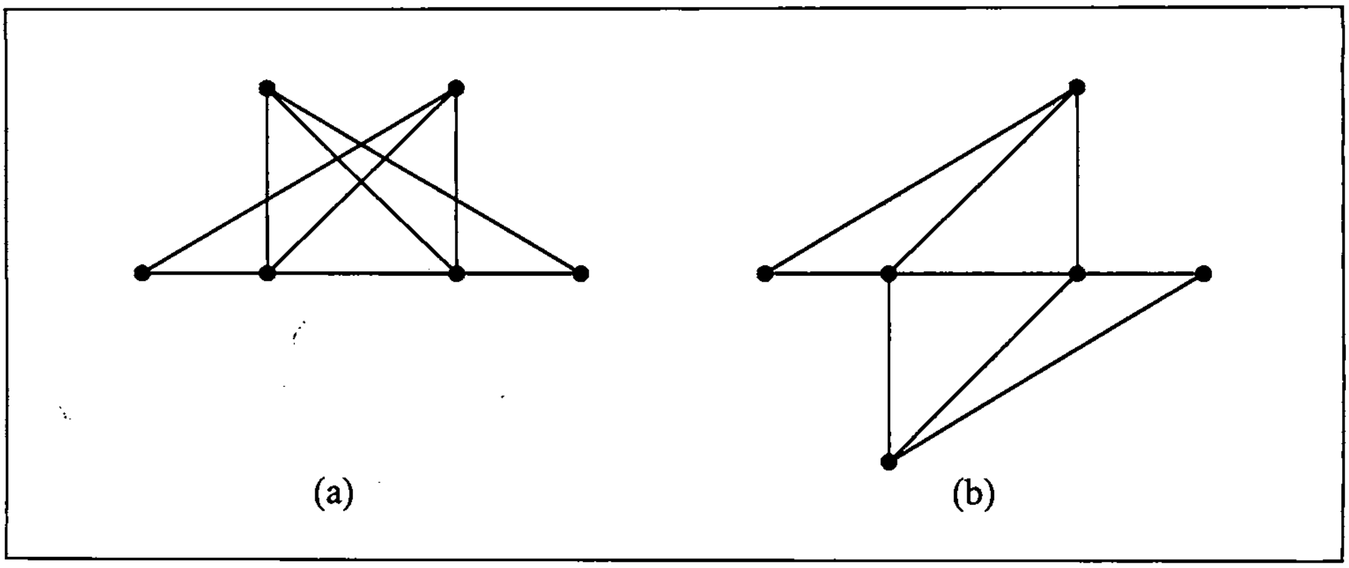


Gambar 8.44 (a) Graf persoalan utilitas ($K_{3,3}$), (b) graf persoalan utilitas bukan graf planar.

Contoh 8.33

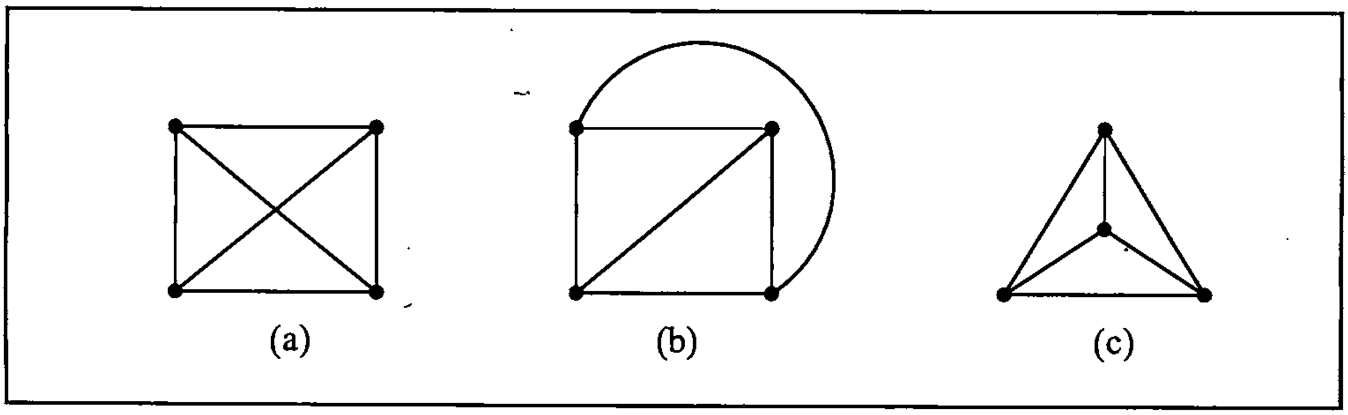
[LIP92] Gambarkan graf planar pada Gambar 8.45(a) sehingga tidak ada sisi-sisi yang berpotongan (menjadi graf bidang).

Penyelesaian:
Susun kembali posisi salah satu simpul untuk mendapatkan sebuah solusi yang ditunjukkan pada Gambar 8.45(b). ■



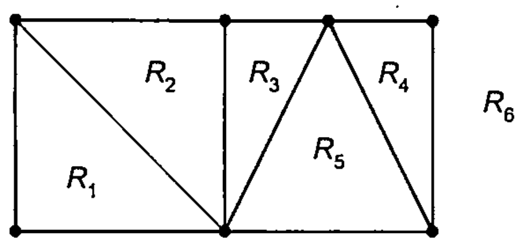
Gambar 8.45 (a) Graf dengan sisi-sisi yang berpotongan,
(b) setelah digambar ulang tanpa sisi yang berpotongan

Representasi graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan disebut **graf bidang** (*plane graph*). Pada Gambar 8.46, ketiga buah graf adalah graf planar, tetapi graf (a) bukan graf bidang, sedangkan graf (b) dan (c) adalah graf bidang. Ketiga graf ini isomorfik. Untuk selanjutnya, kita tetap menggunakan istilah graf planar baik untuk graf yang dapat digambar (ulang) pada bidang datar tanpa ada sisi-sisi yang berpotongan maupun graf yang memang sudah tergambar tanpa sisi-sisi yang berpotongan (graf bidang).



Gambar 8.46 Tiga buah graf planar. Graf (b) dan (c) adalah graf bidang

Sisi-sisi pada graf bidang membagi bidang datar menjadi beberapa wilayah (*region*) atau muka (*face*). Jumlah wilayah pada graf bidang dapat dihitung dengan mudah. Graf bidang pada Gambar 8.47 terdiri atas 6 wilayah (termasuk wilayah terluar):



Gambar 8.47 Graf planar yang terdiri atas 6 wilayah

Rumus Euler

Jumlah wilayah (f) pada graf planar sederhana juga dapat dihitung dengan rumus Euler sebagai berikut:

$$n - e + f = 2 \qquad (8.5)$$

atau

$$f = e - n + 2 \qquad (8.6)$$

yang dalam hal ini,

e = jumlah sisi
n = jumlah simpul

Contoh 8.34

Pada Gambar 8.47 di atas, $e = 11$ dan $n = 7$, maka $f = 11 - 7 + 2 = 6$. ■

Contoh 8.35

Misalkan graf sederhana planar dan terhubung memiliki 24 buah simpul, masing-masing simpul berderajat 4. Representasi planar dari graf tersebut membagi bidang datar menjadi sejumlah wilayah atau muka. Berapa banyak wilayah yang terbentuk?

Penyelesaian:
Diketahui n = jumlah simpul = 24, maka jumlah derajat seluruh simpul = 24 × 4 = 96. Menurut *lemma* jabat tangan, jumlah derajat = 2 × jumlah sisi, sehingga

jumlah sisi = e = jumlah derajat/2 = 96/2 = 48

Dari rumus Euler, $n - e + f = 2$, sehingga f = jumlah wilayah = $2 - n + e = 2 - 24 + 48$ = 26 buah. ■

Pada graf planar sederhana terhubung dengan f wilayah, n buah simpul, dan e buah sisi (dengan $e > 2$) selalu berlaku ketidaksamaan berikut:

$$e \geq 3f/2$$

dan

$$e \leq 3n - 6$$

Dua ketidaksamaan yang terakhir ini dapat kita buktikan sebagai berikut: setiap daerah pada graf planar dibatasi oleh tiga atau lebih sisi. Jadi, total banyaknya sisi lebih besar atau sama dengan $3f$. Tetapi, karena suatu sisi berada pada batas paling banyak dua wilayah, maka total banyaknya sisi lebih kecil atau sama dengan $2e$. Jadi,

$$2e \geq 3f$$

atau

$$2e/3 \geq f$$

Berdasarkan rumus Euler, kita memperoleh

$$n - e + 2e/3 \geq 2$$

atau

$$e \leq 3n - 6$$

Ketidaksamaan yang terakhir dinamakan **ketidaksamaan Euler**, yang dapat digunakan untuk menunjukkan keplanaran suatu graf sederhana (kalau graf planar, maka ia memenuhi ketidaksamaan Euler, sebaliknya jika tidak planar maka ketidaksamaan tersebut tidak dipenuhi). Ini dinyatakan dengan *corollary* berikut:

COROLLARY 8.1 Jika G adalah graf sederhana terhubung dengan e adalah jumlah sisi dan v adalah jumlah simpul, yang dalam hal ini $v \geq 3$, maka berlaku ketidaksamaan Euler $e \leq 3v - 6$.

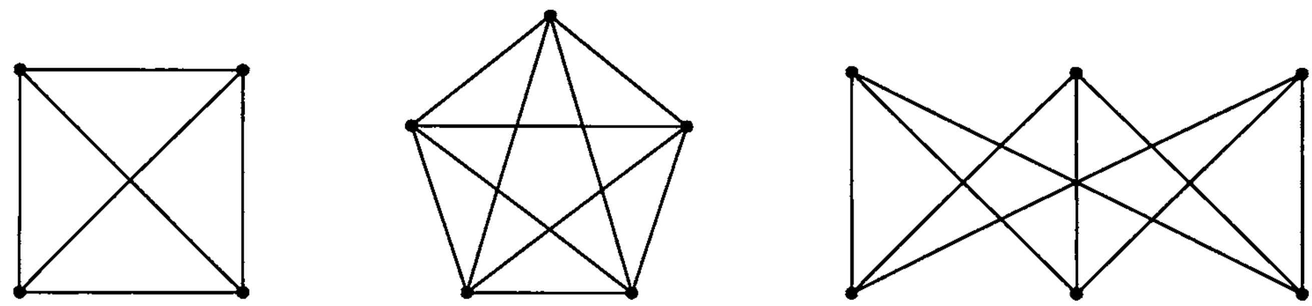
Contoh 8.36

Pada graf K_4 (Gambar 8.48a), $n = 4$, $e = 6$, memenuhi $6 \leq 3(4) - 6$. Dengan kata lain, K_4 adalah graf planar. ■

Contoh 8.37

Perlihatkan bahwa K_5 (Gambar 8.48b), tidak planar dengan ketidaksamaan Euler.

Penyelesaian:
Pada graf K_5, $n = 5$ dan $e = 10$. K_5 tidak memenuhi ketidaksamaan Euler sebab $10 \geq 3(5) - 6$. Hal ini menunjukkan bahwa K_5 tidak planar. ■



Gambar 8.48 (a) Graf lengkap K_3, (b) K_5 , dan (c) graf bipartit $K_{3,3}$

Sayangnya, ketidaksaamaan Euler hanyalah syarat *perlu* agar suatu graf dikatakan planar, tetapi bukan syarat *cukup* (ingat kembali mengenai makna syarat cukup dan syarat perlu pada pembahasan implikasi di dalam Bab 1). Artinya, meskipun suatu graf planar sederhana memenuhi kedua ketidaksamaan itu, tetapi tidak selalu menjamin keplanaran suatu graf. Misalnya graf $K_{3,3}$ (Gambar 8.48c) memenuhi ketidaksamaan Euler tersebut,

$$e = 9, n = 6$$
$$9 \leq (3)(6) - 6 = 12 \qquad \text{(jadi, } e \leq 3n - 6\text{)}$$

padahal graf $K_{3,3}$ bukan graf planar! Untuk menunjukkan bahwa $K_{3,3}$ bukan graf planar, kita membuat asumsi baru bahwa setiap wilayah pada graf bidang dibatasi oleh paling sedikit empat buah sisi (jadi, bukan 3 sisi seperti pembuktian ketidaksamaan di atas. Dengan demikian, total banyaknya sisi lebih besar atau sama dengan $4f$. Tetapi, karena suatu sisi berada pada batas paling banyak dua wilayah, maka total banyaknya sisi lebih kecil atau sama dengan $2e$. Jadi,

$$2e \geq 4f$$

atau

$$e/2 \geq f$$

Berdasarkan rumus Euler, kita memperoleh

$$n - e + e/2 \geq 2$$

atau

$$e \le 2n - 4$$

Hal ini dinyatakan dengan *corollary* berikut:

***COROLLARY* 8.2** Jika G adalah graf sederhana terhubung dengan e adalah jumlah sisi dan v adalah jumlah simpul, yang dalam hal ini $v \ge 3$ dan tidak ada sirkuit yang panjangnya 3, maka berlaku $e \le 2v - 4$.

Contoh 8.38

Graf $K_{3,3}$ tidak memenuhi ketidaksamaan $e \le 2n - 4$, karena

$$e = 9,\ n = 6$$
$$9 \le (2)(6) - 4 = 8 \qquad \text{(salah)}$$

yang berarti $K_{3,3}$ bukan graf planar. ■

Teorema Kuratowski

Berikut ini diberikan teorema dari Kuratowski yang memungkinkan kita menentukan dengan tegas keplanaran suat graf.

Dalam literatur tentang graf, dikenal dua buah graf tidak-planar yang khusus, yaitu graf Kuratowski, setelah matematikawan Polandia, Kasimir Kuratowski, menemukan sifatnya yang unik [DEO74].

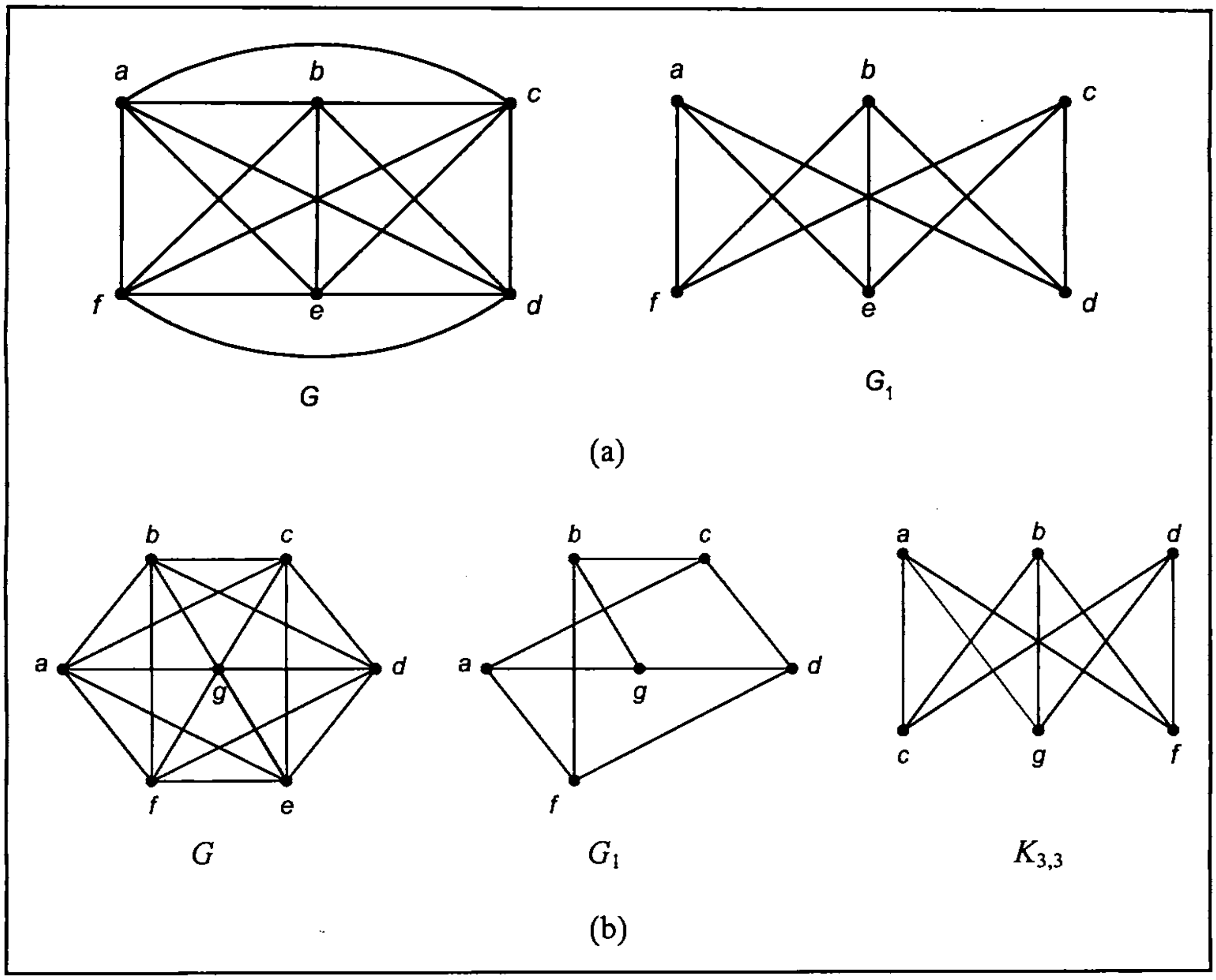
1. Graf Kuratowski pertama, yaitu graf lengkap yang mempunyai lima buah simpul (K_5), adalah graf tidak-planar.
2. Graf Kuratowski kedua, yaitu graf terhubung teratur dengan 6 buah simpul dan 9 buah sisi ($K_{3,3}$) adalah graf tidak-planar.

Sifat graf Kuratowski adalah:

1. Kedua graf Kuratowski adalah graf teratur.
2. Kedua graf Kuratowski adalah graf tidak-planar
3. Penghapusan sisi atau simpul dari graf Kuratowski menyebabkannya menjadi graf planar.
4. Graf Kuratowski pertama adalah graf tidak-planar dengan jumlah simpul minimum, dan graf Kuratowski kedua adalah graf tidak-planar dengan jumlah sisi minimum. Keduanya adalah graf tidak planar paling sederhana.

TEOREMA 8.2. (Teorema Kuratowski) Graf G adalah tidak planar jika dan hanya jika ia mengandung upagraf yang isomorfik dengan K_5 atau $K_{3,3}$ atau homeomorfik (*homeomorphic*) dengan salah satu dari keduanya.

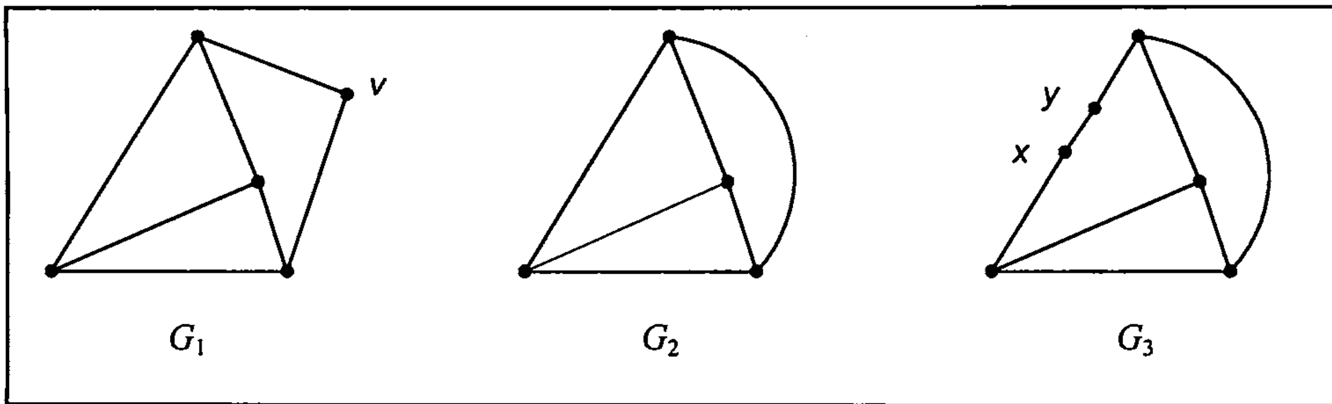
Isommorfisma graf sudah kita pahami dengan baik. Bila dua graf, G_1 dan G_2, isomorfik berarti kedua graf tersebut sama, hanya penggambarannya saja yang berbeda. Tinjau graf G pada Gambar 8.49(a). Sangat jelas G mengandung upagraf G_1 yang sama dengan $K_{3,3}$, karena itu G tidak planar. Sekarang tinjau graf G pada Gambar 8.49(b). G mengandung upagraf G_1 yang isomorfik dengan $K_{3,3}$. Jadi, G juga tidak planar.



Gambar 8.49 (a) Graf G tidak planar karena ia mengandung upagraf, G_1, yang sama dengan $K_{3,3}$.
(b) Graf G tidak planar karena upagrafnya, G_1, isomorfik dengan $K_{3,3}$.

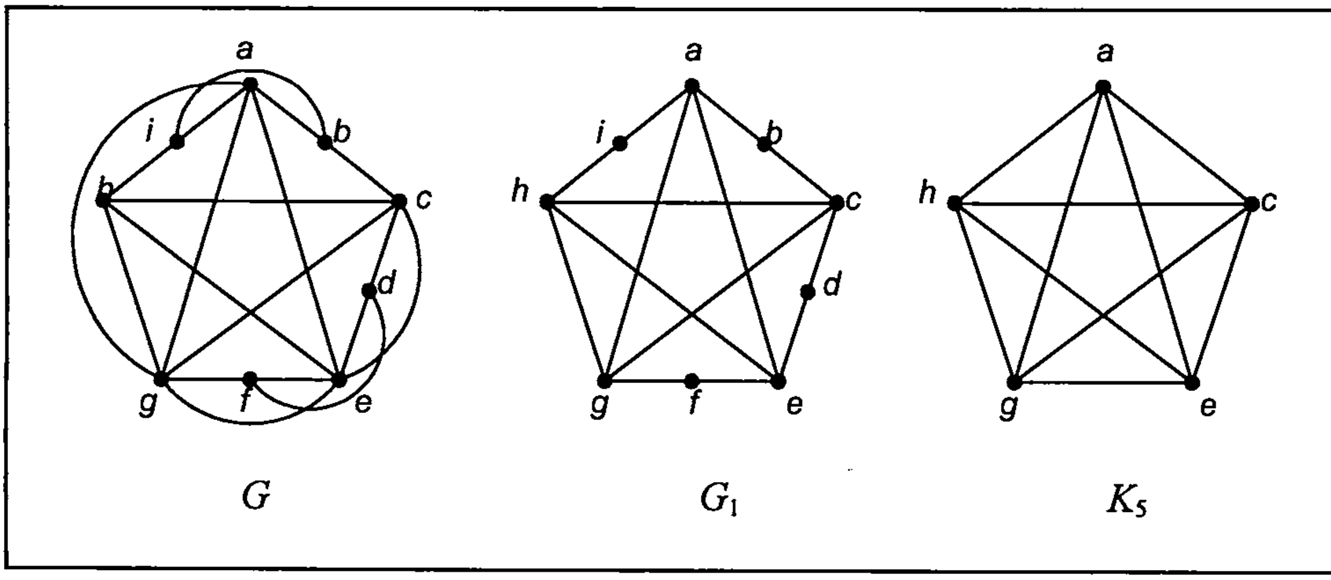
Apa yang dimaksud dengan homeomorfik?

Dua graf G_1 dan G_2 dikatakan homeomorfik jika salah satu dari kedua graf dapat diperoleh dari graf yang lain dengan cara menyisipkan dan/atau membuang secara berulang-ulang simpul berdererajat 2, seperti yang diilustrasikan pada Gambar 8.50. Ketiga graf pada Gambar 8.50 homeomorfik satu sama lain. G_2 diperoleh dengan membuang simpul v (yang berderajat 2) dari G_1, sedangkan G_3 diperoleh dari G_2 dengan berturut-turut menambahkan simpul x dan y (yang masing-masing berderajat 2). Catatlah bahwa penambahan dan penghapusan simpul hanya dilakukan terhadap simpul berderajat dua saja.



Gambar 8.50 Tiga buah graf yang homeomorfik satu sama lain.

Tinjau Gambar 8.51. Graf G tidak planar karena ia mengandung upagraf (G_1) yang homeomorfik dengan K_5 (dengan membuang simpul-simpul yang berderajat 2 dari G_1, diperoleh K_5).



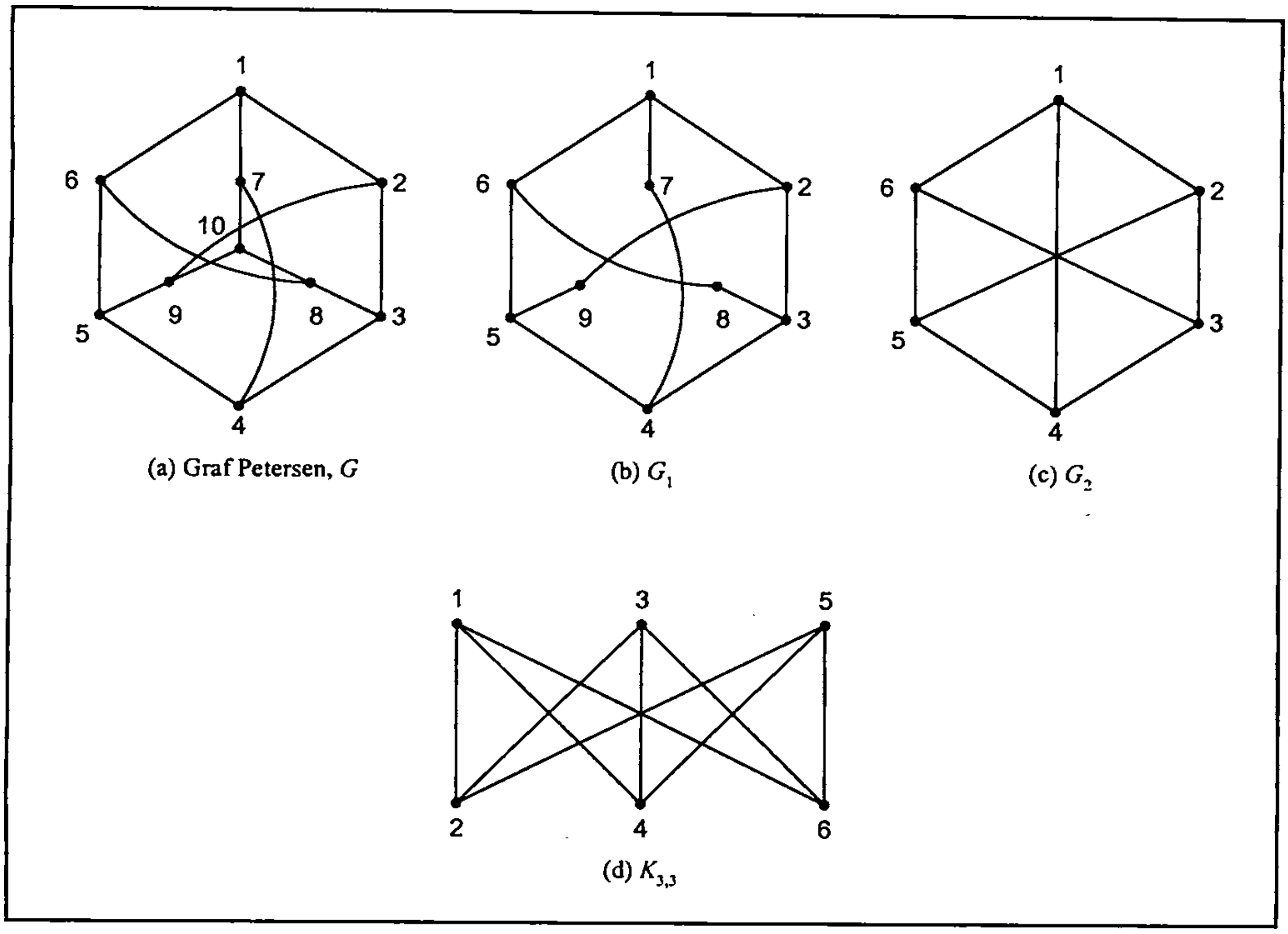
Gambar 8.51 Graf G tidak planar karena upagrafnya, G_1, homeomorfik dengan K_5.

Contoh 8.39

Perlihatkan dengan teorema Kuratowski bahwa graf Petersen (Gambar 8.52(a)) tidak planar.

Penyelesaian:

Dari graf Petersen (Gambar 8.52(a)).,buatlah sebuah upagrafnya, misalkan G_1 (Gambar 8.52(b)). Dengan membuang simpul-simpul berderajat 2 dari G_1, kita dapatkan G_2 (Gambar 8.52(c)) yang homeomorfik dengan G_1. Jika G_2 digambar ulang, kita dapatkan bahwa G_2 isomorfik dengan $K_{3,3}$ (Gambar 8.52(d)). Rangkaian proses ini menunjukkan bahwa graf Petersen tidak planar. ■



Gambar 8.52 (a) Graf Petersen
(b) G_1 adalah upagraf dari G
(c) G_2 homeomorfik dengan G_1
(d) G_2 isomorfik dengan $K_{3,3}$

Perhatikanlah bahwa teorema Kuratowski lebih mudah digunakan untuk menentukan bahwa sebuah graf tidak planar. Untuk membuktikan bahwa suatu graf planar relatif lebih sulit, karena kita harus mencoba semua kemungkinan upagraf yang memiliki 5 simpul dengan 10 sisi atau upagraf yang memiliki 6 simpul dan 9 sisi, dan memeriksa apakah upagraf tersebut sama atau sama atau homeomorfik dengan K_5 atau $K_{3,3}$.

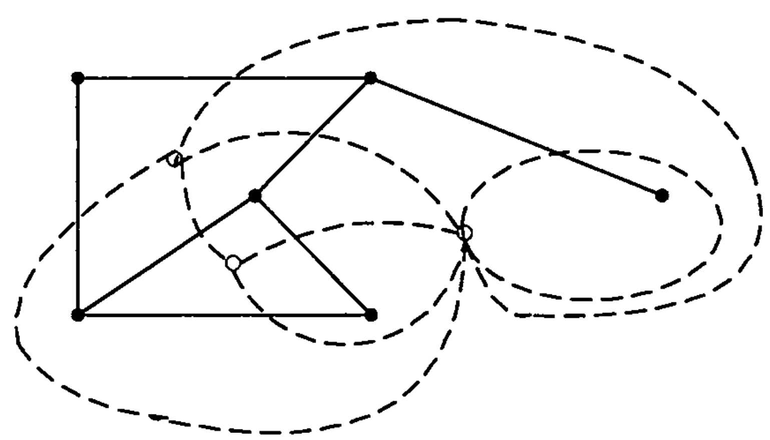
Terapan graf planar sudah kita sebutkan sebelum.ini, yaitu persoalan utilitas dalam merancang jaringan pipa air, pipa gas, dan kabel listrik bawah tanah agar ketiganya tidak saling bersilangan. Terapan graf planar lainnya adalah pada perancangan *integrated circuit* (*IC*) pada sebauh papan. Kawat-kawat yang menghubungkan simpul-simpul *IC* harus dirancang sedemikian rupa agar tidak bersilangan, sebab persilangan dua buah kawat yang beraliran listrik dapat menimbulkan interferensi arus, yang mengakibatkan terganggunya fungsi *IC* tersebut.

8.10 Graf Dual *(Dual Graph)*

Misalkan kita mempunyai sebuah graf planar *G* yang direpresentasikan sebagai graf bidang. Kita dapat membuat suatu graf *G** yang secara geometri merupakan dual dari graf planar tersebut dengan cara sebagai berikut:

1. Pada setiap wilayah atau muka (*face*) *f* di *G*, buatlah sebuah simpul *v** yang merupakan simpul untuk *G**.
2. Untuk setiap sisi *e* di *G*, tariklah sisi *e** (yang menjadi sisi untuk *G**) yang memotong sisi *e* tersebut. Sisi *e** menghubungkan dua buah simpul v_1* dan v_2* (simpul-simpul di *G**) yang berada di dalam muka f_1 dan f_2 yang dipisahkan oleh sisi *e* di *G*. Untuk sisi *e* yang salah satu simpulnya merupakan simpul berderajat 1 (jadi, sisi *e* seluruhnya terdapat di dalam sebuah muka), maka sisi *e** adalah berupa sisi gelang .

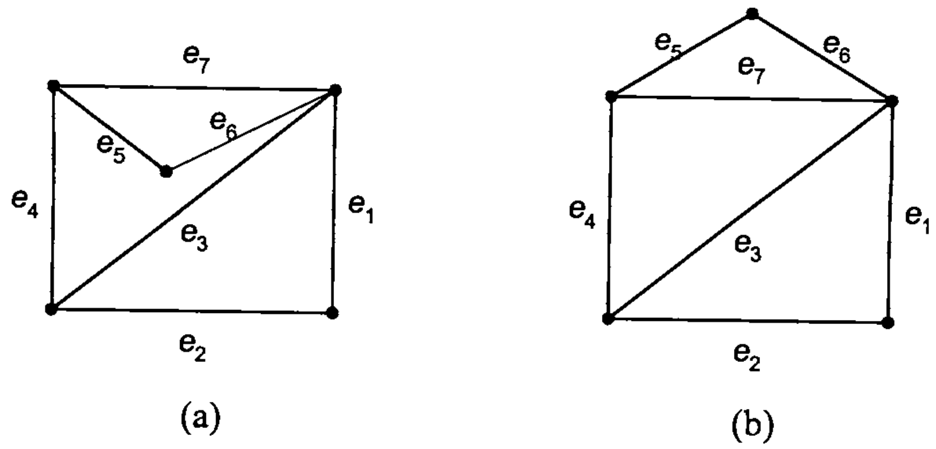
Graf *G** yang terbentuk dengan cara penggambaran demikian disebut **graf dual** (atau tepatnya **dual geometri**) dari graf *G*. Pada Gambar 8.53 digambarkan graf dual *G** dari graf planar *G*. Sisi-sisi graf *G** digambarkan dengan garis putus-putus.



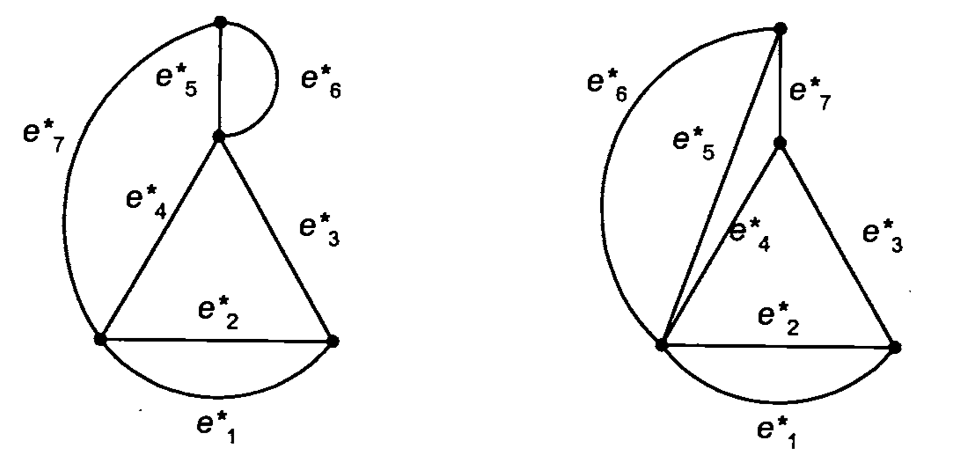
Gambar 8.53 Pembentukan graf dual *G** dari graf *G*

Berapakah banyak sisi, simpul, dan muka (wilayah) dari graf *G**? Jika *G* adalah graf planar dalam representasi bidang dengan *n* buah simpul, *e* buah sisi dan *f* buah muka, maka graf *G** memiliki $n^* = f$ buah simpul, e^* = e buah sisi dan $f^* = n$ buah muka.

Sebuah graf mempunyai dual hanya jika graf tersebut planar. Pertanyaanya, apakah dual dari sebuah graf adalah unik? Dengan kata lain, apakah dual-dual dari sebuah graf planar isomorfik? Jawabannya adalah bahwa sebuah graf planar *G* mempunyai dual yang unik hanya jika representasi bidangnya unik. Sebagai contoh, pada Gambar 8.54, kedua graf adalah sama (isomorfik), tetapi mempunyai representasi bidang yang berbeda. Akibatnya, dual dari kedua graf yang isomorfik tersebut tidak isomorfik (ditunjukkan pada Gambar 8.55).

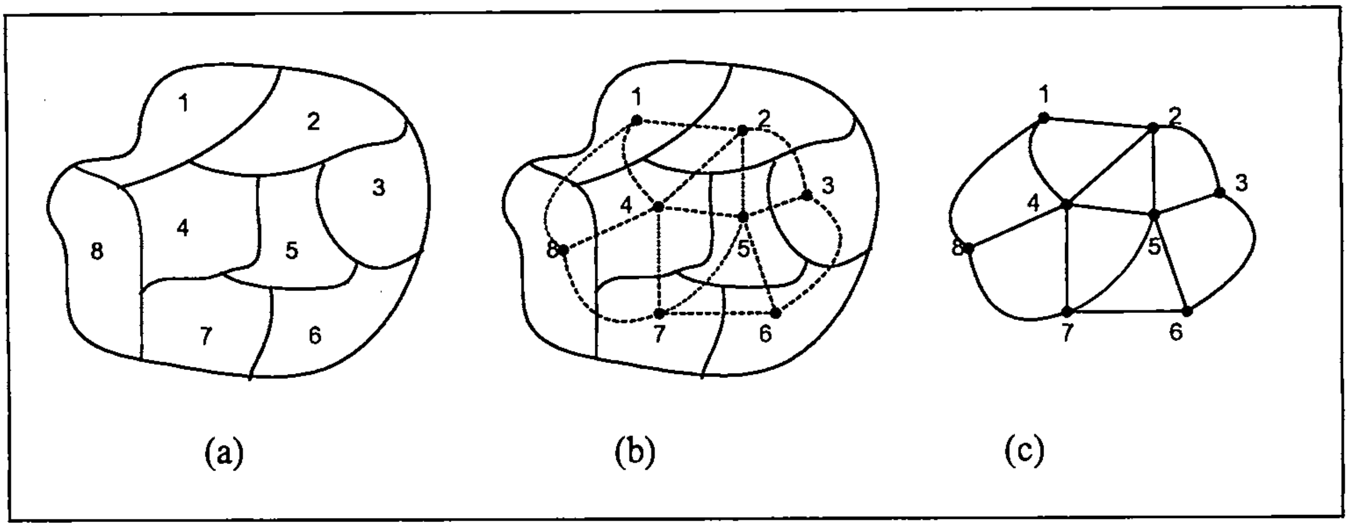


Gambar 8.54 Dua buah representasi bidang yang berbeda dari graf yang sama



Gambar 8.55 Dual dari graf di Gambar 8.54

Salah satu aplikasi graf dual yang penting adalah untuk merepresentasikan peta (*map*). Setiap peta pada bidang datar terdiri dari sejumlah wilayah (*region*). Wilayah pada peta dapat menyatakan suatu negara, provinsi, atau kabupaten. Tiap wilayah pada peta dinyatakan sebagai sebuah simpul, sedangkan sisi menyatakan bahwa dua wilayah berbatasan langsung (bertetangga). Gambar 8.56 adalah contoh sebuah peta dan graf yang merepresentasikannya. Sedikit perbedaan dengan graf dual yang telah disebutkan sebelum ini, pada graf yang merepresentasikan peta bidang luar tidak dinyatakan sebagai sebuah simpul. Kita akan membahas kembali penggunaan graf yang merepresentasikan peta pada pewarnaan graf.



Gambar 8.56 (a) Peta, (b) Peta dan graf yang merepresentasikannya, (c) Graf yang merepresentasikan peta

8.11 Lintasan dan Sirkuit Euler

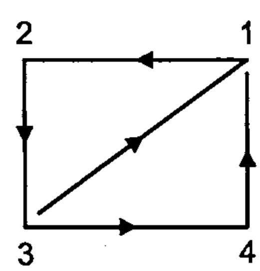
Pada bagian awal bab ini sudah diceritakan sejarah teori graf yang dimulai dengan masalah jembatan Königsberg. Seluruh jembatan hanya boleh dilalui sekali dan kembali lagi ke titik awal keberangkatan. Perjalanan melewati jembatan itu membentuk lintasan tertutup yang diberi nama sirkuit Euler. Jika perjalanan melewati ketujuh jembatan itu tidak harus kembali ke titik awal keberangkatan, maka lintasannya membentuk lintasan terbuka yang diberi nama lintasan Euler. Di dalam upabab ini akan kita pelajari apa yang menjadi syarat keberadaan lintasan atau sirkuit Euler.

DEFINISI 8.18. Lintasan Euler ialah lintasan yang melalui masing-masing sisi di dalam graf tepat satu kali. Bila lintasan tersebut kembali ke simpul asal, membentuk lintasan tertutup (sirkuit), maka lintasan tertutup itu dinamakan **sirkuit Euler**. Jadi, sirkuit Euler ialah sirkuit yang melewati masing-masing sisi tepat satu kali.

Graf yang mempunyai sirkuit Euler disebut **graf Euler** (*Eulerian graph*). Graf yang mempunyai lintasan Euler dinamakan juga graf **semi-Euler** (*semi-Eulerian graph*).

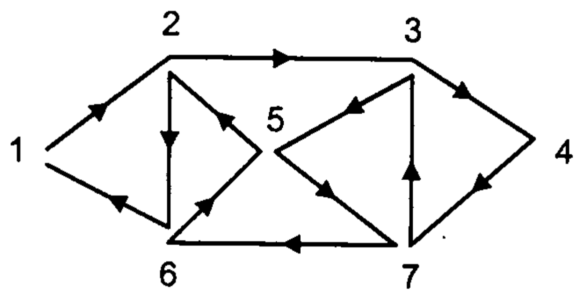
Contoh 8.40

Lintasan Euler pada graf Gambar 8.57(a) : 3, 1, 2, 3, 4, 1.
Gambar lintasannya (dimulai dari 3):

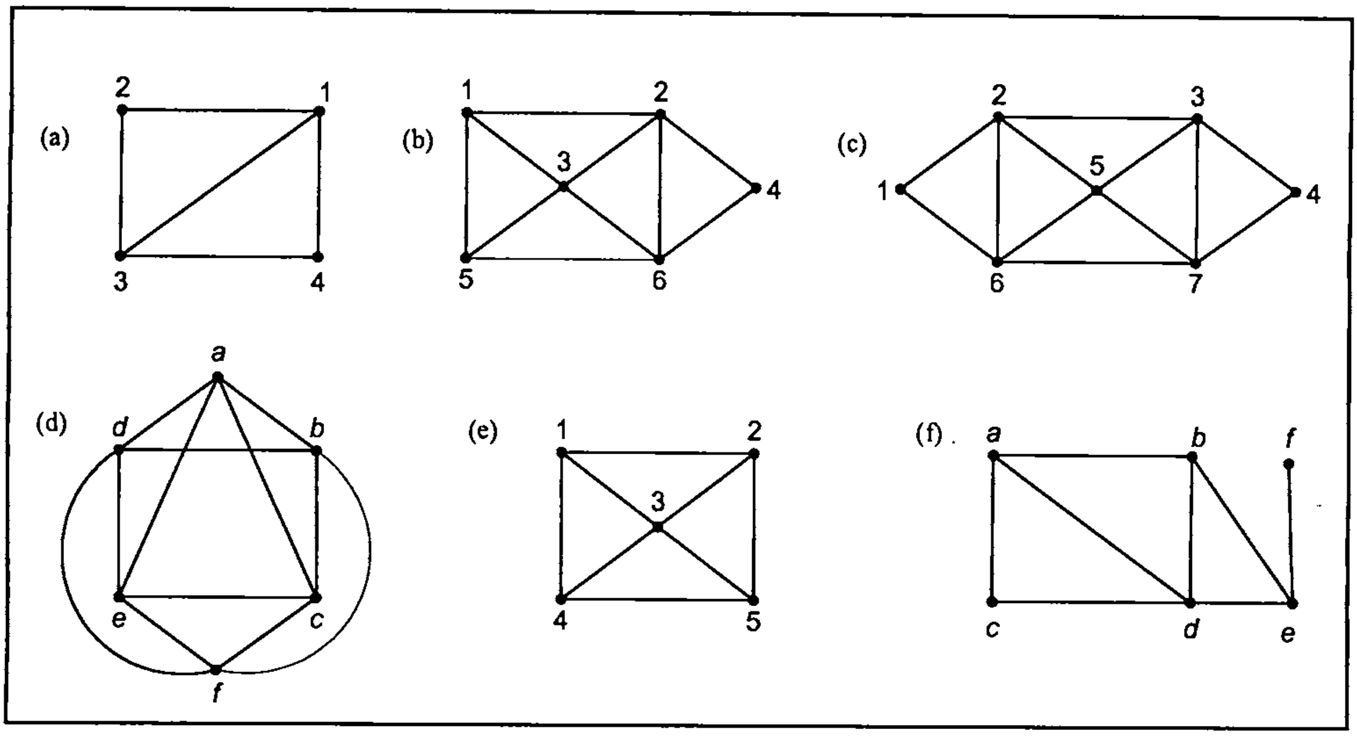


Lintasan Euler pada graf Gambar 8.57(b) : 1, 2, 4, 6, 2, 3, 6, 5, 1, 3 (periksa!)

Sirkuit Euler pada graf Gambar 8.57(c) : 1, 2, 3, 4, 7, 3, 5, 7, 6, 5, 2, 6, 1. Gambar sirkuitnya adalah (dimulai dari 1):



Sirkuit Euler pada graf Gambar 8.57(d) : *a*, *c*, *f*, *e*, *c*, *b*, *d*, *e*, *a*, *d*, *f*, *b*, *a* (periksa!). Graf (e) dan (f) tidak mempunyai lintasan maupun sirkuit Euler



Gambar 8.57 (a) dan (b) Graf yang mempunyai lintasan Euler (graf semi-Euler)
(c) dan (d) Graf yang mempunyai sirkuit Euler (graf Euler)
(e) dan (f) Graf yang tidak memiliki lintasan dan sirkuit Euler

Syarat cukup dan perlu mengenai keberadaan lintasan Euler maupun sirkuit Euler di dalam suatu graf ternyata sangat sederhana. Euler menemukan syarat tersebut ketika memecahkan masalah jembatan Königsberg, yang dinyatakan dengan biimpliksi di dalam Teorema 8.3.

TEOREMA 8.3. Graf terhubung tak-berarah *G* adalah graf Euler (memiliki sirkuit Euler) jika dan hanya jika setiap simpul di dalam graf tersebut berderajat genap.

Bukti untuk Teorema 8.3 sangat mudah ditunjukkan. Ketika mulai berangkat dari simpul awal, *a*, ke simpul selanjutnya, *b*, sisi (*a*, *b*) menyumbangkan 1 untuk derajat simpul *a*. Jika sirkuit Euler dilalui, maka pada setiap simpul terdapat dua buah sisi yang bersisian, yang berarti setiap simpul berderajat 2 (genap). Ketika kembali ke simpul awal, a, sisi dari simpul terakhir ke simpul a menyumbangkan 1 lagi untuk derajat simpul a, sehingga derajat simpul asal adalah 2 (genap). Kita menyimpulkan bahwa graf terhubung tak-berarah memiliki sirkuit Euler jika setiap simpul di dalam graf berderajat genap. Dengan menggunakan teorema yang terakhir ini jelaslah masalah jembatan Königsberg tidak memiliki sirkuit Euler karena semua simpul berderajat ganjil.

Jika kita ingin membuat graf yang mempunyai sirkuit Euler, maka harus dipenuhi kondisi berikut: (1) graf tersebut harus terhubung, dan (2) semua simpul pada graf berderajat genap.

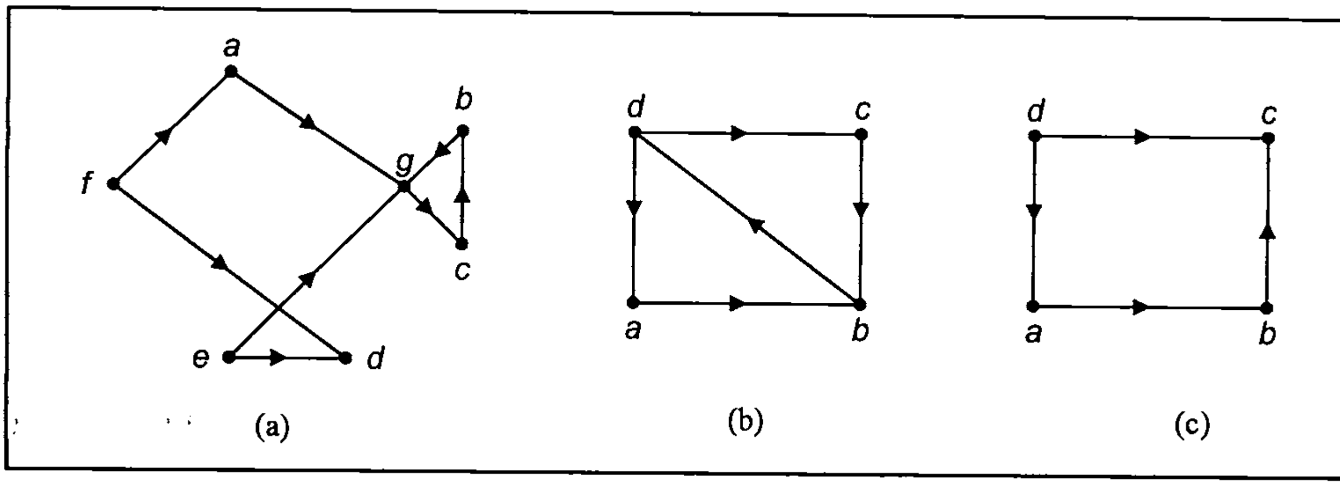
Jika lintasan yang dilalui tidak membentuk sirkuit, maka lintasan yang terbentuk adalah lintasan terbuka yang disebut lintasan Euler. Di sini simpul awal tidak sama dengan simpul terakhir. Baik simpul awal maupun simpul akhir di dalam lintasan Euler berderajat 1 (ganjil). Karena itu, agar sebuah graf mempunyai lintasan Euler (tapi bukan sirkuit Euler), maka graf tersebut harus memiliki tepat dua buah simpul berderajat ganjil. Persyaratan ini dinyatakan dalam Teorema 8.4 berikut.

TEOREMA 8.4. Graf terhubung tak-berarah G adalah graf semi-Euler (memiliki lintasant Euler) jika dan hanya jika di dalam graf tersebut terdapat tepat dua simpul berderajat ganjil.

Catatlah bahwa graf yang memiliki sirkuit Euler pasti mempunyai lintasan Euler, tetapi tidak sebaliknya. Jika kita ingin membuat graf yang mempunyai lintasan Euler (tanpa membentuk sirkuit), maka harus dipenuhi kondisi berikut: (1) graf tersebut harus terhubung, dan (2) graf memiliki tepat dua buah simpul berderajat ganjil.

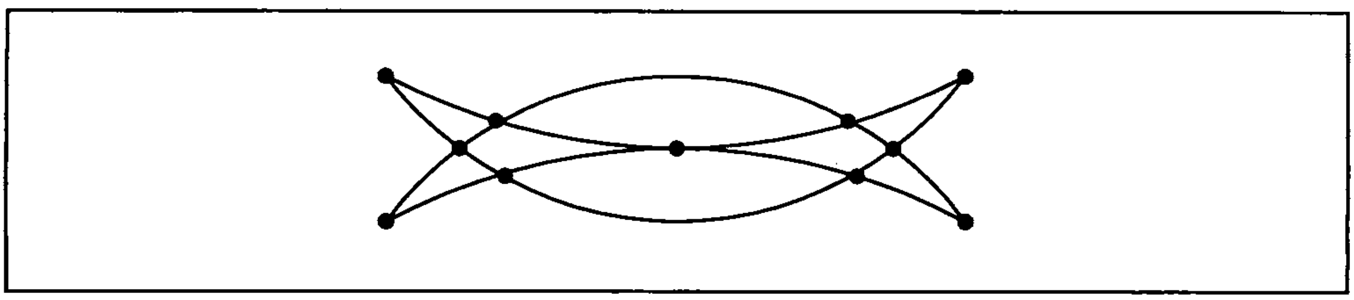
Lintasan dan sirkuit Euler juga terdapat pada graf berarah. Teorema yang menyatakan syarat keberadaan lintasan dan sirkuit Euler pada graf berarah dinyatakan dengan Teorema 8.5, sedangkan contoh graf berarah yang mengandung lintasan dan sirkuit Euler ditunjukkan pada Gambar 8.58.

TEOREMA 8.5. Graf terhubung berarah G memiliki sirkuit Euler jika dan hanya jika G terhubung dan setiap simpul memiliki derajat-masuk dan derajat-keluar sama. G memiliki lintasan Euler jika dan hanya jika G terhubung dan setiap simpul memiliki derajat-masuk dan derajat-keluar sama kecuali dua simpul, yang pertama memiliki derajat-keluar satu lebih besar derajat-masuk, dan yang kedua memiliki derajat-masuk satu lebih besar dari derajat-keluar.



Gambar 8.58 (a) Graf berarah yang mempunyai sirkuit Euler (*a, g, c, b, g, e, d, f, a*)
(b) Graf berarah yang mempunyai lintasan Euler (*d, a, b, d, c, b*)
(c) Graf berarah yang tidak memiliki lintasan dan sirkuit Euler

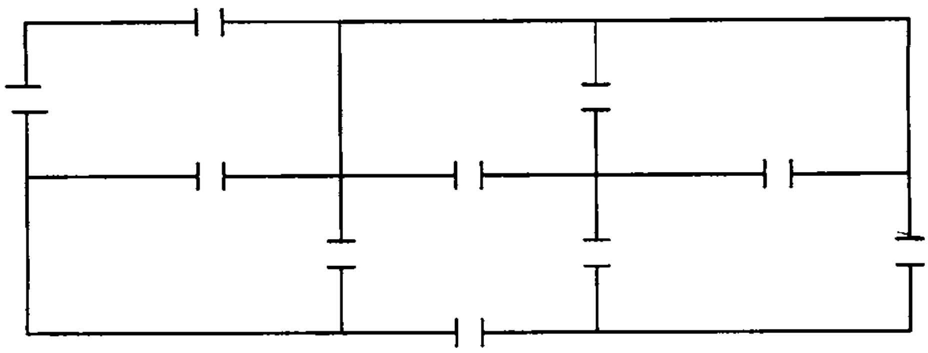
Ada satu permainan sederhana yang sering dimainkan dikala senggang. Permainan itu adalah menggambarkan sesuatu dengan gerakan pensil secara menerus tanpa mengangkat pensil dan tidak menggambar ulang garis-garisnya. Sebagai contoh, dapatkah graf bulan sabit (di dalam literatur graf dikenal dengan nama *Mohammed's scimitars*) pada Gambar 8.59 dilukis tanpa mengangkat pensil dan tanpa menggambar ulang garis-garisnya? Karena kita tidak boleh melukis garis lebih dari sekali, maka kita harus memeriksa apakah grafnya mengandung lintasan atau sirkuit Euler. Ternyata setiap simpul di dalam graf itu berderajat genap yang berarti terdapat sirkuit Euler di dalamnya. Dengan demikian kita dapat melukis graf tanpa mengangkat pensil dan tidak menggambar ulang garis-garisnya.



Gambar 8.59 Bulan sabit Muhammad [ROS99]

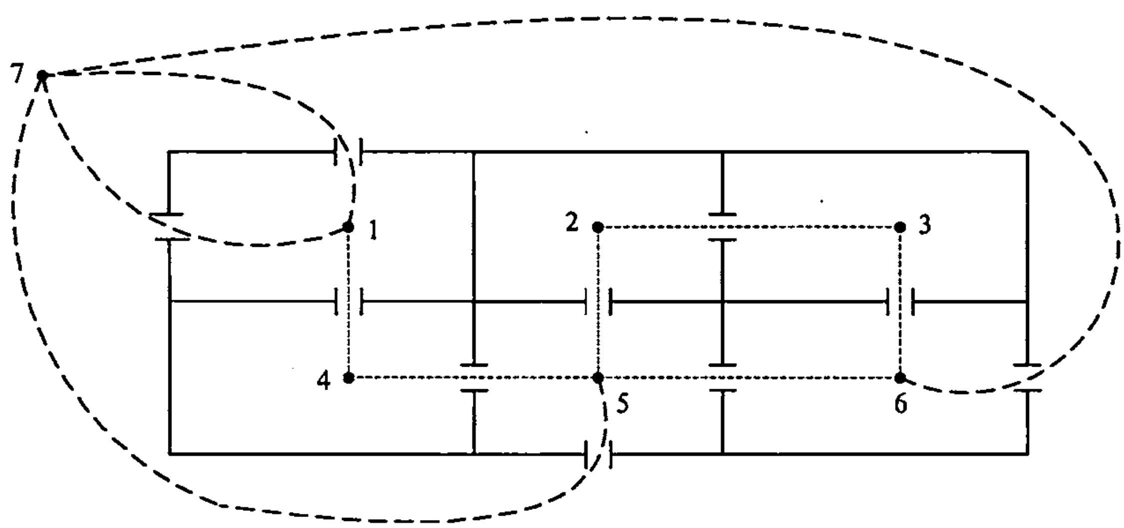
Contoh 8.41

Gambar di bawah ini adalah denah lantai dasar sebuah gedung. Apakah dimungkinkan berjalan melalui setiap pintu di lantai itu hanya satu kali saja jika kita boleh mulai memasuki pintu yang mana saja?



Penyelesaian:

Nyatakan setiap ruangan (termasuk ruang luar) sebagai simpul dan pintu-pintu yang menghubungkan antar ruangan sebagai sisi. Graf yang dihasilkan ditunjukkan dengan garis putus-putus di bawah ini. Setiap pintu hanya boleh dilalui sekali dipandang sebagai melalui setiap sisi di dalam graf hanya sekali. Karena kita tidak diharuskan harus kembali ke titik asal keberangkatan, maka persoalan ini sebenarnya adalah menentukan apakah di dalam graf tersebut terdapat lintasan Euler. Agar graf mempunyai lintasan Euler, maka harus terdapat dua simpul berderajat ganjil, simpul lainnya berderajat genap. Dari representasi graf yang diperoleh, terdapat dua simpul berderajat ganjil, yaitu simpul 1 dan 6, sedangkan simpul lainnya berderajat genap. Menurut Teorema 8.4, pasti terdapat lintasan Euler di dalam graf tersebut. Kesimpulannya, kita dapat melalui setiap pintu di lantai itu tepat sekali. ■

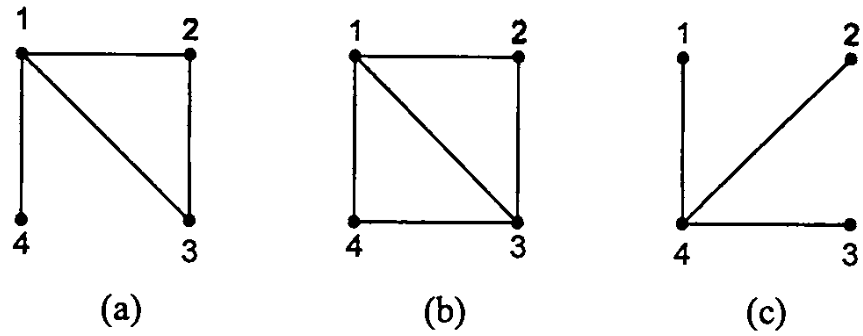


8.12 Lintasan dan Sirkuit Hamilton

Jika lintasan dan sirkuit Euler melalui sisi-sisi graf tepat sekali, maka lintasan dan sirkuit Hamilton melalui simpul-simpul graf tepat sekali.

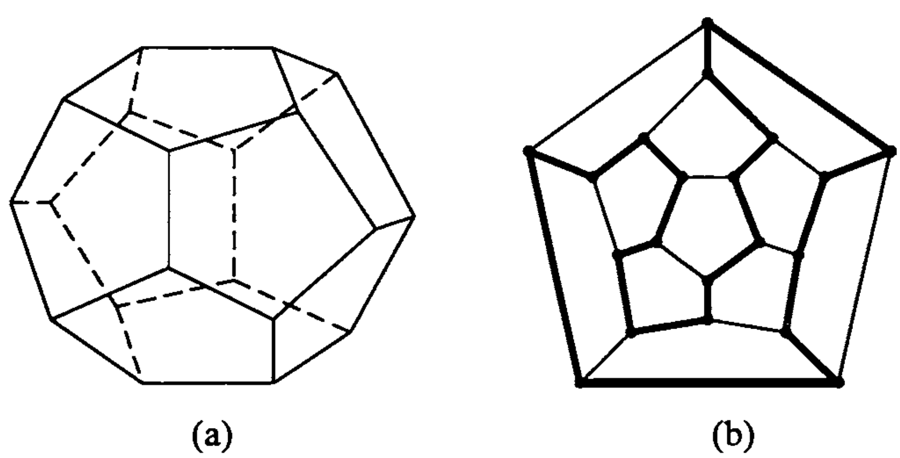
DEFINISI 8.19. Lintasan Hamilton ialah lintasan yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali. Bila lintasan itu kembali ke simpul asal membentuk lintasan tertutup (sirkuit), maka lintasan tertutup itu dinamakan **sirkuit Hamilton**. Dengan kata lain, sirkuit Hamilton ialah sirkuit yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali, kecuali simpul asal (sekaligus simpul akhir) yang dilalui dua kali.

Graf yang memiliki sirkuit Hamilton dinamakan **graf Hamilton**, sedangkan graf yang hanya memiliki lintasan Hamilton disebut **graf semi-Hamilton**. Gambar 8.60 memperlihat contoh graf yang mengandung lintasan atau sirkuit Euler.



Gambar 8.60 (a) graf yang memiliki lintasan Hamilton (misal: 3, 2, 1, 4)
(b) graf yang memiliki sirkuit Hamilton (1, 2, 3, 4, 1)
(c) graf yang tidak memiliki lintasan maupun sirkuit Hamilton

Nama sirkuit Hamilton muncul ketika Sir William Hamilton membuat permainan *dodecahedron*. Pada tahun 1859 Sir William Hamilton menawarkan mainan teka-teki ke pabrik alat mainan Dublin. Mainan itu terdiri dari *dodecahedron* (yaitu benda yang disusun oleh 12 buah pentagonal dan di sini ada 20 buah titik sudut) dan tiap titik sudut diberi nama ibukota negara (Gambar 8.61(a)). Permainan yang dapat dilakukan adalah membentuk perjalanan keliling dunia, yang mengunjungi setiap ibukota tepat satu kali dan kembali lagi ke kota asal. Persoalan ini dinamakan mencari sirkuit Hamilton. Gambar 8.61(b) adalah graf yang memodelkan *dodecahedron* dengan sebuah sirkuit Hamilton (garis tebal)



Gambar 8.61 (a) *Dodecahedron* Hamilton, dan (b) graf yang mengandung sirkuit Hamilton

Walaupun masalah penentuan lintasan atau sirkuit Hamilton mempunyai kemiripan dengan masalah lintasan/sirkuit Euler, namun sayangnya belum ditemukan syarat cukup dan syarat perlu yang sederhana. Untuk menunjukkan bahwa suatu graf tertentu mempunyai lintasan atau sirkuit Hamilton, kita terpaksa menggunakan cara pembuatan eksplisit lintasan atau sirkuit yang demikian [LIU85].

Di sini diberikan beberapa hasil umum tentang keberadaan lintasan atau sirkuit Hamilton dengan mengunakan beberapa syarat cukup (bukan syarat perlu) berupa Teorema Dirac dan Teorema Ore.

TEOREMA 8.6. **(Teorema Dirac)** Jika G adalah graf sederhana dengan n buah simpul ($n \geq 3$) sedemikian sehingga derajat tiap simpul paling sedikit $n/2$ (yaitu, $d(v) \geq n/2$ untuk setiap simpul v di G), maka G adalah graf Hamilton.

TEOREMA 8.7. **(Teorema Ore)** Jika G adalah graf sederhana dengan n buah simpul ($n \geq 3$) sedemikian sehingga $d(v) + d(u) \geq n$ untuk setiap pasang simpul tidak-bertetangga u dan v, maka G adalah graf Hamilton.

TEOREMA 8.8. Setiap graf lengkap adalah graf Hamilton.

TEOREMA 8.9. Di dalam graf lengkap G dengan n buah simpul ($n \geq 3$) terdapat sebanyak $(n - 1)!/2$ buah sirkuit Hamilton.

TEOREMA 8.10. Di dalam graf lengkap G dengan n buah simpul ($n \geq 3$ dan n ganjil), terdapat $(n - 1)/2$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas (tidak ada sisi yang beririsan). Jika n genap dan $n \geq 4$, maka di dalam G terdapat $(n - 2)/2$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas.

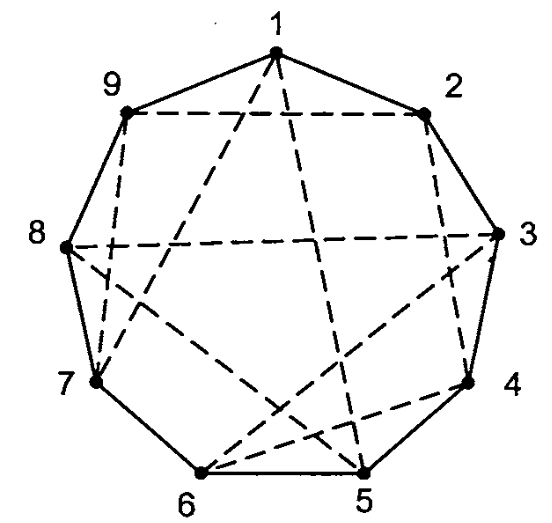
Contoh 8.42

(Persoalan pengaturan tempat duduk). Sembilan anggota sebuah klub bertemu tiap hari untuk makan siang pada sebuah meja bundar. Mereka memutuskan duduk sedemikian sehingga setiap anggota mempunyai tetangga duduk berbeda pada setiap makan siang. Berapa hari pengaturan tersebut dapat dilaksanakan?

Penyelesaian:
Persoalan di atas dapat direpresentasikan oleh sebuah graf dengan sembilan buah simpul sedemikian sehingga setiap simpul menyatakan anggota klub, dan sisi yang menghubungkan dua buah simpul menyatakan kedua simpul tersebut bertetangga tempat duduk (Gambar 8.62).

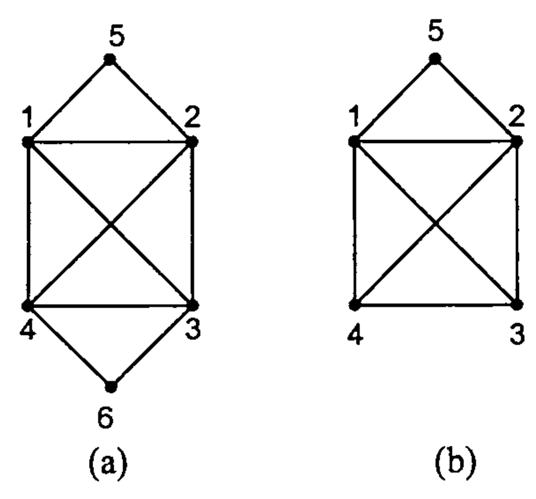
Contoh pengaturan tempat duduk adalah 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1 (garis tebal), dan 1, 3, 5, 2, 7, 4, 9, 6, 8, 1 (garis putus-putus). Ini adalah dua buah sirkuit Hamilton yang saling lepas. Jumlah pengaturan tempat duduk yang berbeda adalah $(9 - 1)/2 = 4$. Jadi, pengaturan tempat duduk yang berbeda itu dapat diterapkan selama 4 hari, yang setiap harinya setiap peserta mempunyai tetangga duduk yang berbeda dengan hari sebelumnya.

■



Gambar 8.62 Graf yang merepresentasikan persoalan pengaturan tempat duduk.

Beberapa graf dapat mengandung (i) sirkuit Euler dan sirkuit Hamilton sekaligus, (ii) mengandung sirkuit Euler tetapi tidak mengandung sirkuit Hamilton, (iii) mengandung sirkuit Euler dan lintasan Hamilton, (iv) mengandung lintsan Euler maupun lintasan Hamilton, (v) tidak mengandung lintasan Euler namun mengandung sirkuit Hamilton, dan sebagainya. Graf pada Gambar 8.63(a) mengandung sirkuit Hamilton maunpun sirkuit Euler, sedangkan graf pada Gambar 8.63(b) mengandung sirkuit Hamilton dan lintasan Euler (periksa!).



Gambar 8.63 (a) Graf Hamilton sekaligus graf Euler
(b) Graf Hamilton sekaligus graf semi-Euler

Terdapat banyak aplikasi yang berkaitan dengan graf. Di dalam aplikasi itu, graf digunakan sebagai alat untuk merepresentasikan atau memodelkan persoalan. Berdasarkan graf yang dibentuk, barulah persoalan tersebut diselesaikan. Di bawah ini diberikan beberapa aplikasi yang berkaitan dengan lintasan/sirkuit di dalam graf, yaitu menentukan **lintasan terpendek** (*shortest path*), **persoalan pedagang keliling** (*travelling salesperson problem*), **persoalan tukang pos Cina**, dan **pewarnaan graf** (*graph colouring*).

8.13 Lintasan Terpendek (*Shortest Path*)

Persoalan mencari lintasan terpendek di dalam graf merupakan salah satu persoalan optimasi. Graf yang digunakan dalam pencarian lintasan terpendek adalah graf berbobot (*weighted graph*), yaitu graf yang setiap sisinya diberikan suatu nilai atau bobot. Bobot pada sisi graf dapat menyatakan jarak antar kota, waktu pengiriman pesan, ongkos pembangunan, dan sebagainya. Asumsi yang kita gunakan di sini adalah bahwa semua bobot bernilai positif. Kata "terpendek" jangan selalu diartikan secara fisik sebagai panjang minimum, sebab kata "terpendek" berbeda-beda maknanya bergantung pada tipikal persoalan yang akan diselesaikan. Namun, secara umum "terpendek " berarti meminimisasi bobot pada suatu lintasan di dalam graf.

Contoh-contoh terapan pencarian lintasan terpendek misalnya:

1. Misalkan simpul pada graf dapat merupakan kota, sedangkan sisi menyatakan jalan yang menghubungkan dua buah kota. Bobot sisi graf dapat menyatakan jarak antara dua buah kota atau rata-rata waktu tempuh antara dua buah kota. Apabila terdapat lebih dari satu lintasan dari kota A ke kota B, maka persoalan lintasan terpendek di sini adalah menentukan jarak terpendek atau waktu tersingkat dari kota A ke kota B.

2. Misalkan simpul pada graf dapat merupakan terminal komputer atau simpul komunikasi dalam suatu jaringan, sedangkan sisi menyatakan saluran komunikasi yang menghubungkan dua buah terminal. Bobot pada graf dapat menyatakan biaya pemakaian saluran komunikasi antara dua buah terminal, jarak antara dua buah terminal, atau waktu pengiriman pesan (*message*) antara dua buah terminal. Persoalan lintasan terpendek di sini adalah menentukan jalur komunikasi terpendek antara dua buah terminal komputer. Lintasan terpendek akan menghemat waktu pengiriman pesan dan biaya komunikasi.

Ada beberapa macam persoalan lintasan terpendek, antara lain:

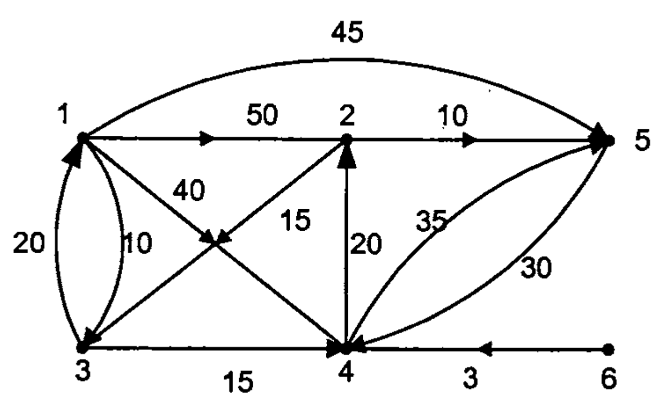
a. Lintasan terpendek antara dua buah simpul tertentu.
b. Lintasan terpendek antara semua pasangan simpul.
c. Lintasan terpendek dari simpul tertentu ke semua simpul yang lain.
d. Lintasan terpendek antara dua buah simpul yang melalui beberapa simpul tertentu.

Pada dasarnya, jenis persoalan a mirip dengan jenis persoalan c, karena pencarian lintasan terpendek pada jenis persoalan c dapat dihentikan bila simpul tujuan yang dikehendaki sudah ditemukan lintasan terpendeknya. Di dalam buku ini kita hanya akan membahas jenis persoalan c.

Deskripsi persoalan lintasan terpendek pada jenis persoalan c adalah sebagai berikut: diberikan graf berbobot $G = (V, E)$ dan sebuah simpul awal a. Tentukan lintasan terpendek dari a ke setiap simpul lainnya di dalam G.

Sebagai ilustrasi, tinjau graf berarah pada Gambar 8.64. Lintasan terpendek dari simpul 1 ke semua simpul lain diberikan pada tabel di bawah ini (diurut dari lintasan terpendek pertama, kedua, ketiga dst.)

Simpul asal	Simpul tujuan	Lintasan terpendek	Jarak
1	3	1, 3	10
1	4	1, 3, 4	25
1	2	1, 3, 4, 2	45
1	5	1, 5	45
1	6	tidak ada	-



Gambar 8.64 Graf yang digunakan sebagai contoh untuk persoalan lintasan terpendek

Perhatikan dari tabel di atas, bahwa lintasan terpendek dari 1 ke 2 berarti juga melalui lintasan terpendek dari 1 ke 3 dan dari 1 ke 4.

Sampai saat ini, sudah banyak algoritma mencari lintasan terpendek yang pernah ditulis orang. Algoritma lintasan terpendek yang paling terkenal adalah **algoritma Dijkstra** (sesuai dengan nama penemunya, Edsger W. Dijkstra). Dalam naskah aslinya, algoritma Dijsktra diterapkan pada untuk mencari lintasan terpendek pada graf berarah. Namun, algoritma ini juga benar untuk graf tak-berarah.

Algoritma Dijkstra mencari lintasan terpendek dalam sejumlah langkah. Algoritma ini menggunakan prinsip *greedy*. Prinsip *greedy* pada algoritma Disjkstra menyatakan ketetanggaan $M = [m_{ij}]$, yang dalam hal ini,

m_{ij} = bobot sisi (i, j) (pada graf tak-berarah $m_{ij} = m_{ji}$)
$m_{ii} = 0$
$m_{ij} = \infty$, jika tidak ada sisi dari simpul i ke simpul j

Selain matriks M, kita juga menggunakan tabel $S = [s_i]$ yang dalam hal ini,

dan tabel $D = [d_i]$ yang dalam hal ini,

d_i = panjang lintasan dari simpul awal a ke simpul i

```
        { perbarui tabel d }
        for semua simpul i dengan si = 0 do
            if dj + mji < di then
               di ← dj + mji
            endif
        endfor
    endfor
```

Algoritma 8.1 Algoritma Dijkstra untuk mencari lintasan terpendek

Tinjau kembali graf berarah pada Gambar 8.66, dengan matriks ketetanggaan M sebagai berikut:

	$j = 1$	2	3	4	5	6
$i = 1$	0	50	10	40	45	∞
2	∞	0	15	∞	10	∞
3	20	∞	0	15	∞	∞
4	∞	20	∞	0	35	∞
5	∞	∞	∞	30	0	∞
6	∞	∞	∞	3	∞	0

Perhitungan lintasan terpendek dari simpul awal $a = 1$ ke semua simpul lainnya ditabulasikan sebagai berikut.

Lelaran	Simpul yang dipilih	Lintasan	*S*						*D*					
			1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
Inisial	-	-	0	0	0	0	0	0	0	50 (1,2)	10 (1,3)	40 (1,4)	45 (1,5)	∞ (1,6)
1	1	1	1	0	0	0	0	0	∞	50 (1,2)	10 (1,3)	40 (1,4)	45 (1,5)	∞ (1,6)
2	3	1, 3	1	0	1	0	0	0	∞	50 (1,2)	10 (1,3)	25 (1,3,4)	45 (1,5)	∞ (1,6)
3	4	1, 3, 4	1	0	1	1	0	0	∞	45 (1,3,4,2)	10 (1,3)	25 (1,3,4)	45 (1,5)	∞ (1,6)
4	2	1, 3, 4, 2	1	1	1	1	0	0	∞	45 (1,3,4,2)	10 (1,3)	25 (1,3,4)	45 (1,5)	∞ (1,6)
5	5	1, 5	1	1	1	1	1	0	∞	45 (1,3,4,2)	10 (1,3)	25 (1,3,4)	45 (1,5)	∞ (1,6)

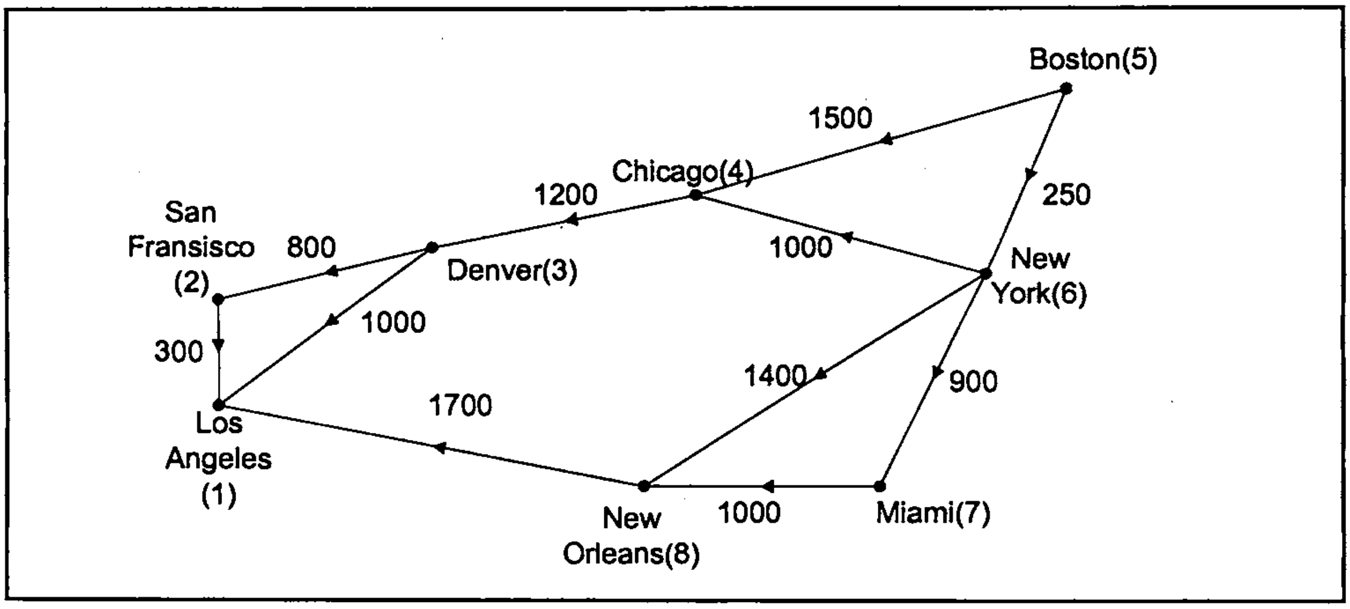
(Keterangan: Angka-angka di dalam tanda kurung menyatakan lintasan terpendek dari 1 ke simpul tersebut)

Jadi, lintasan terpendek dari:

1 ke 3 adalah 1, 3 dengan panjang = 10
1 ke 4 adalah 1, 3, 4 dengan jarak = 25
1 ke 2 adalah 1, 3, 4, 2 dengan jarak = 45
1 ke 5 adalah 1, 5 dengan jarak = 45
1 ke 6 tidak ada lintasan

Contoh 8.43

Tinjau graf berarah pada Gambar 8.65 yang menyatakan jarak beberapa kota di Amerika Serikat.



Gambar 8.65 Graf berarah dari sebuah peta AS

Penyelesaian:
Matriks ketetanggaan M sebagai berikut:

	$j = 1$	2	3	4	5	6	7	8
$i = 1$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	300	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
3	1000	800	0	∞	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	1200	0	∞	∞	∞	∞
5	∞	∞	∞	1500	0	250	∞	∞
6	∞	∞	∞	1000	∞	0	900	1400
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	1000
8	1700	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

Perhitungan lintasan terpendek dari simpul awal a = 5 ke semua simpul lainnya ditabulasikan sebagai berikut.

Lelaran	Simpul yang dipilih	Lintasan	*S* 1 2 3 4 5 6 7 8	*D* 1	2	3	4	5	6	7	8
Inisial	-	-	0 0 0 0 0 0 0 0	∞	∞	∞	1500	0	250	∞	∞
1	5	5	0 0 0 0 1 0 0 0	∞	∞	∞	1500	∞	250	∞	∞
2	6	5, 6	0 0 0 0 1 1 0 0	∞	∞	∞	1250	∞	250	1150	1650
3	7	5, 6, 7	0 0 0 0 1 1 1 0	∞	∞	∞	1250	∞	250	1150	1650
4	4	5, 6, 4	0 0 0 1 1 1 1 0	∞	∞	2450	1250	∞	250	1150	1650
5	8	5, 6, 8	0 0 0 1 1 1 1 1	3350	∞	2450	1250	∞	250	1150	1650
6	3	5, 6, 4, 3	0 0 1 1 1 1 1 1	3350	∞	2450	1250	∞	250	1150	1650
7	2	5, 6, 4, 3, 2	0 1 1 1 1 1 1 1	3350	3250	2450	1250	∞	250	1150	1650

Jadi, lintasan terpendek dari:

5 ke 6 adalah 5, 6 dengan panjang = 250
5 ke 7 adalah 5, 6, 7 dengan jarak = 1150
5 ke 4 adalah 5, 6, 4 dengan jarak = 1250
5 ke 8 adalah 5, 6, 8 dengan jarak = 1650
5 ke 3 adalah 5, 6, 4, 3 dengan jarak = 2450
5 ke 2 adalah 5, 6, 4, 3, 2 dengan jarak = 3250
5 ke 1 adalah 5, 6, 8, 1 dengan jarak = 3350

Perhatikan bahwa jumlah lelaran hanya 7 (atau $n - 1$). Jarak dari simpul 5 ke 1 (Los Angeles) sudah benar karena satu-satunya nilai s_i yang nol adalah s_i, sehingga nilai di dalam d_1 sudah otomatis menjadi jarak terpendek dari simpul 5 ke 1. ■

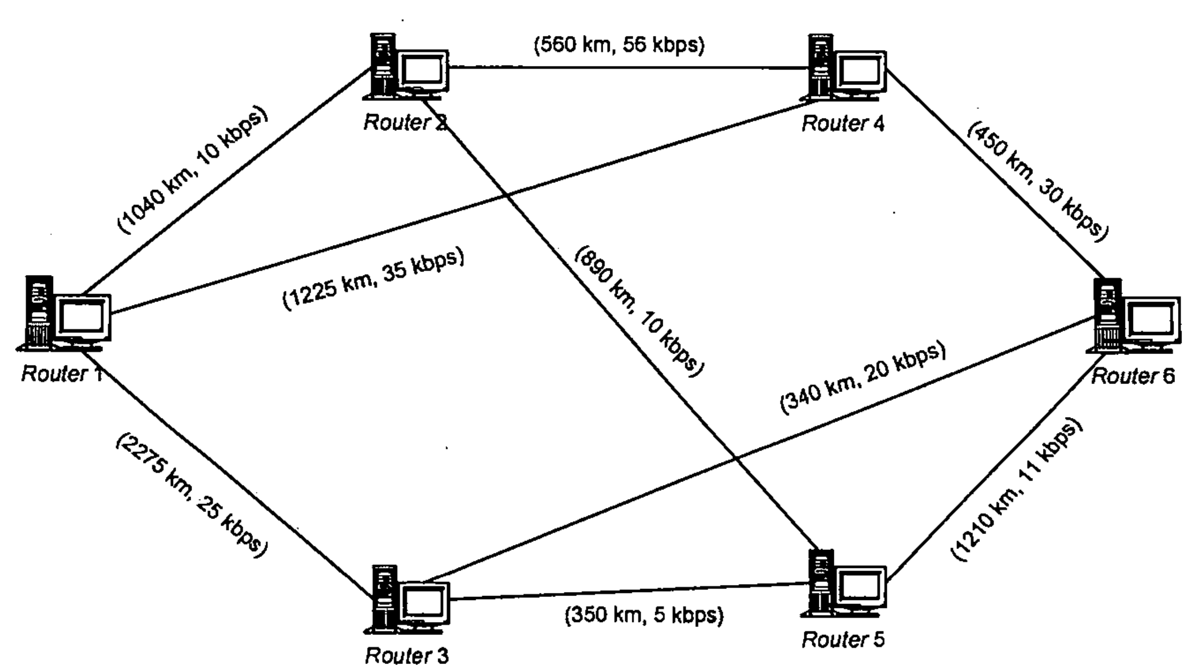
Penerapan Algoritma Dijkstra pada Jaringan Komputer

Jaringan komputer terdiri dari sejumlah komputer yang terhubung satu sama lain melalui saluran komunikasi (misalnya kabel, serat optik, gelombang mikro, gelombang radio). Antara satu komputer dengan komputer lain seringkali terpisah jauh secara geografis (antar kota atau antar negara), atau berada dalam wilayah geografis yang sama (dalam satu gedung, dalam satu area, dsb). Pesan yang dikirim dari satu komputer ke komputer lainnya umumnya dipecah menjadi sejumlah paket (*packet*) data yang berukuran lebih kecil. Saluran komunikasi yang digunakan untuk menghantarkan paket mempunyai keterbatasan dalam hal kecepatan transmisi (umumnya kecepatan transmisi dinyatakan dalam satuan *kbps – kilobit per second*). Untuk menyampaikan paket data dari dari satu komputer ke komputer lainnya, sistem jaringan komputer harus dapat melakukan pemilihan rute yang tepat agar paket dapat sampai ke komputer tujuan dalam waktu yang cepat. Yang dimaksud dengan **perutean** (*routing*) adalah menentukan lintasan yang dilalui oleh paket dari komputer pengirim (asal) ke komputer penerima (tujuan).

Permasalahannya adalah bagaimana menentukan rute yang tepat sehingga paket data dapat sampai ke komputer penerima dalam waktu yang sesingkat mungkin. Dengan menggunakan rute tersebut, paket data yang sampai ke suatu komputer dapat diarahkan ke komputer tetangga yang tepat sehingga paket menuju komputer penerima dengan delai (*delay*) waktu yang minimum. Dengan kata lain, kita harus menentukan lintasan terpendek yang akan dilalui oleh paket tersebut dari komputer pengirim ke komputer penerima.

Perutean yang diharapkan adalah **perutean adaptif** (*adaptive routing*). Perutean adaptif berarti sistem jaringan komputer dapat menentukan rute baru apabila terjadi perubahan topologi jaringan (misalnya ada penambahan *router* baru, kerusakan pada suatu *router* sehingga *router* tersebut tidak bisa dilalui, atau perubahan kecepatan transmisi antar *router*).

Jaringan komputer dapat dimodelkan sebagai sebuah graf terhubung, dengan setiap simpul menyatakan sebuah komputer (bisa berupa terminal komputer atau sebuah *router*. *Router* adalah komputer yang didedikasikan untuk mengarahkan pesan. Di dalam tugas ini, kita mengasumsikan simpul menyatakan *router*, sedangkan terminal komputer – yang merupakan komputer *end user* - dianggap cabang dari *router*). Sisi di dalam graf menyatakan saluran komunikasi (sering disebut *link*). Setiap sisi di-*assign* dengan sebuah label nilai (yang disebut bobot atau *weight*). Bobot tersebut dapat menyatakan jarak geografis (dalam kilometer), kecepatan transfer data, atau delai transmisi (waktu pengiriman) (lihat Gambar 8.66). Setiap *router* memelihara sebuah tabel yang disebut tabel rute (*routing table*). Tabel rute berisi *router* asal, *router* tujuan, dan simpul antara (via) yang dilalui (lihat Gambar 8.67).

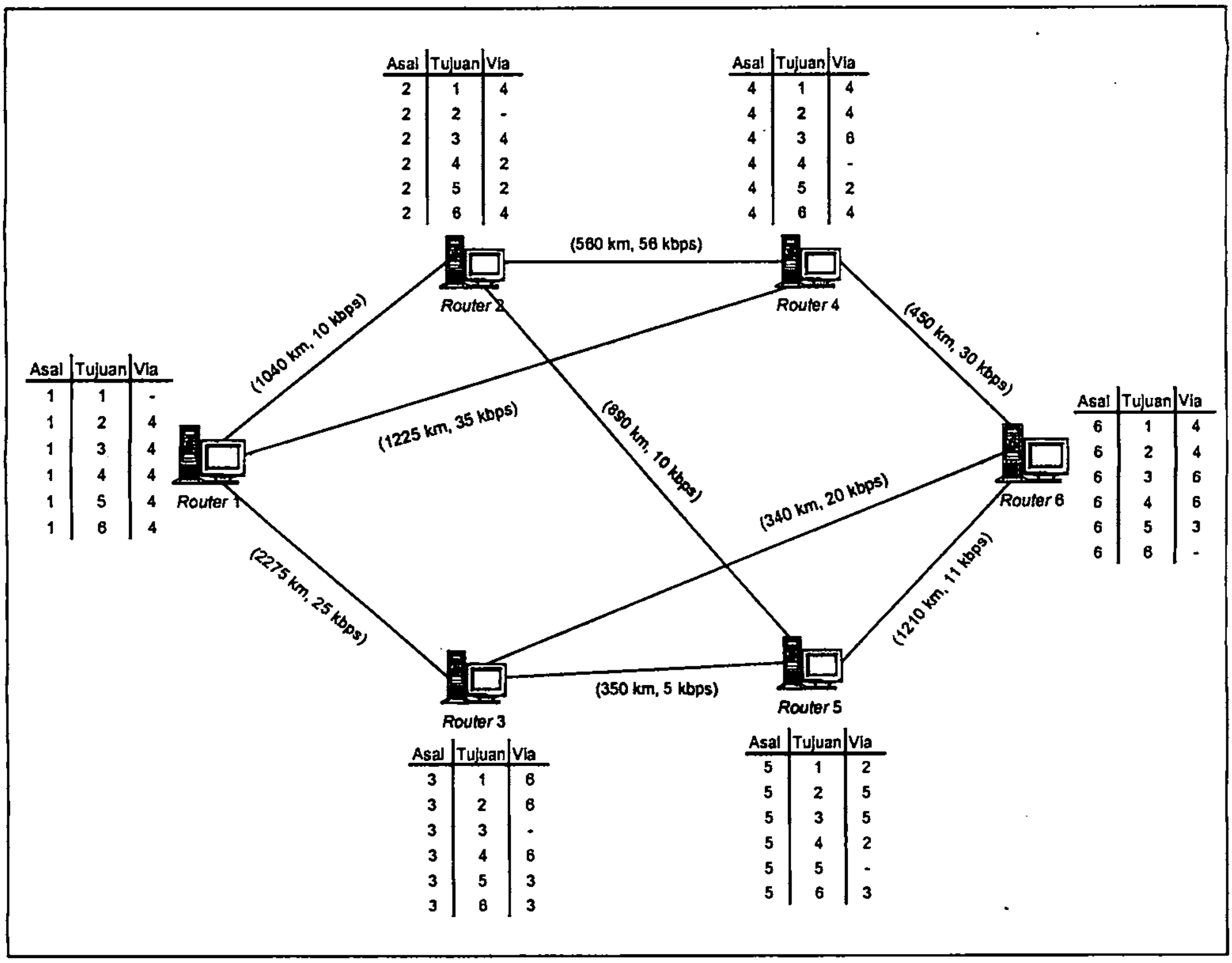


Gambar 8.66 Jaringan komputer (simpul-simpul terminal komputer *end user* tidak digambarkan):

Mencari lintasan terpendek dari *router* asal ke *router* tujuan dapat diartikan sebagai menentukan lintasan terpendek dari simpul asal ke simpul tujuan di dalam graf yang merepresentasikan jaringan komputer tersebut. Algoritma Dijkstra adalah algoritma yang banyak digunakan untuk mencari lintasan terpendek. Lintasan terpendek yang dihasilkan dari algoritma Dijkstra (berdasarkan delai) untuk jaringan komputer pada Gambar 8.66 ditabulasikan di dalam Tabel 8.1. Hasil pembentukan tabel rute (berdasarkan hasil algoritam Dijkstra) diperlihatkan pada Gambar 8.67.

Tabel 8.1 Lintasan terpendek yang dihasilkan dengan Algoritam Dijkstra untuk jaringan komputer pada Gambar 8.66.

Router Asal	*Router* Tujuan	Lintasan Terpendek
1	1	-
	2	1, 4, 2
	3	1, 4, 6, 3
	4	1, 4
	5	1, 4, 2, 5
	6	1, 4, 6
2	1	2, 4, 1
	2	-
	3	2, 4, 6, 3
	4	2, 4
	5	2, 5
	6	2, 4, 6
3	1	3, 6, 4, 1
	2	3, 6, 4, 2
	3	-
	4	3, 6, 4
	5	3, 5
	6	3, 6
4	1	4, 1
	2	4, 2
	3	4, 6, 2
	4	4, 6, 3
	5	4, 2, 5
	6	4, 6
5	1	5, 2, 4, 1
	2	5, 2
	3	5, 3
	4	5, 2, 4
	5	-
	6	5, 3, 6
6	1	6, 4, 1
	2	6, 4, 2
	3	6, 3
	4	6, 4
	5	6, 3, 5
	6	-



Asal	Tujuan	Via
1	1	-
1	2	4
1	3	4
1	4	4
1	5	4
1	6	4

Asal	Tujuan	Via
2	1	4
2	2	-
2	3	4
2	4	2
2	5	2
2	6	4

Asal	Tujuan	Via
4	1	4
4	2	4
4	3	6
4	4	-
4	5	2
4	6	4

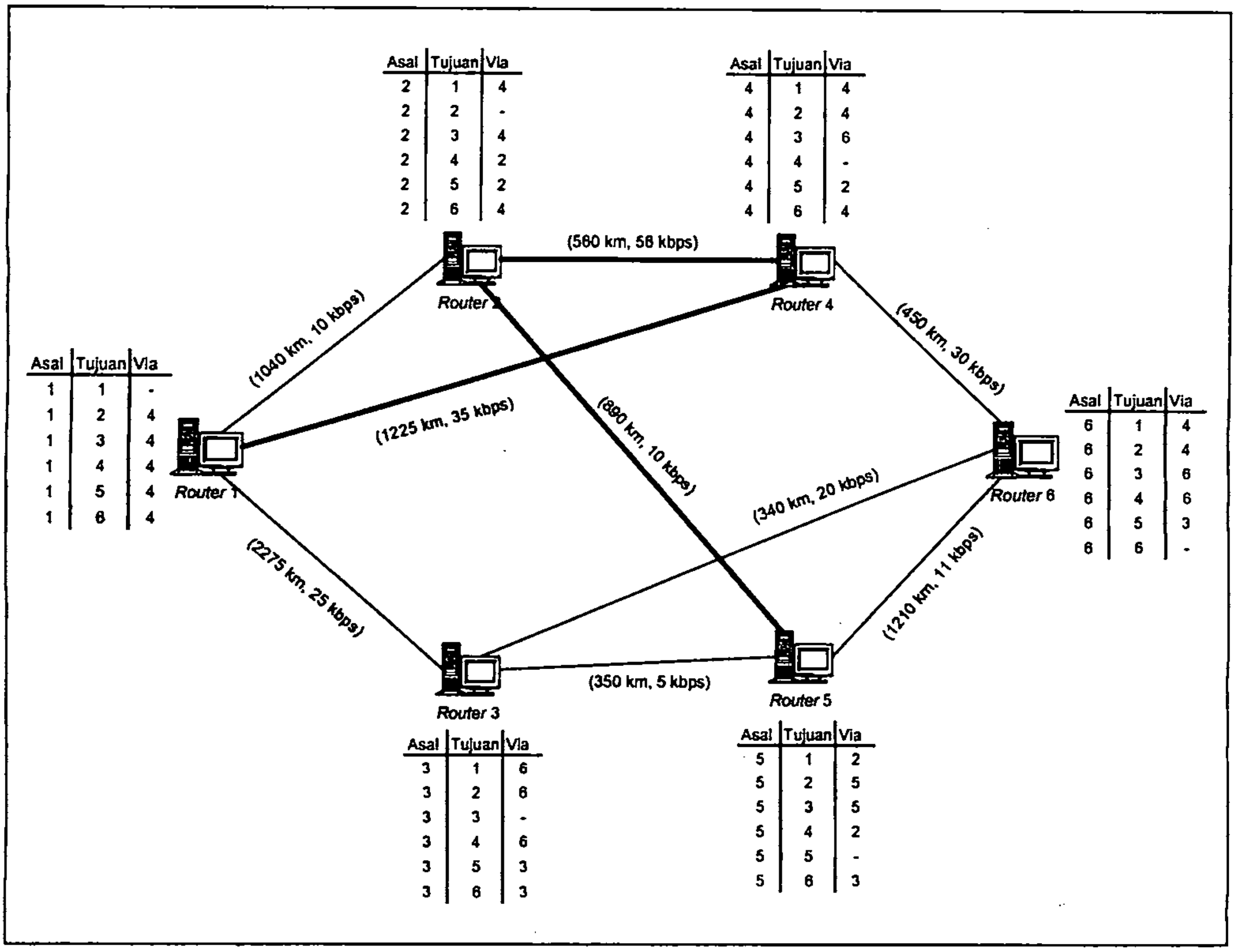
Asal	Tujuan	Via
6	1	4
6	2	4
6	3	6
6	4	6
6	5	3
6	6	-

Asal	Tujuan	Via
3	1	6
3	2	6
3	3	-
3	4	6
3	5	3
3	6	3

Asal	Tujuan	Via
5	1	2
5	2	5
5	3	5
5	4	2
5	5	-
5	6	3

Gambar 8.67 Jaringan komputer dengan tabel rute pada setiap *router*.

Sebuah pesan selalu mengandung informasi asal (*source*) dan tujuan (*destination*). Misalkan sebuah pesan dikirim dari *router* 1 ke *router* 5, maka router 1 membaca tujuan pesan (yaitu ke *router* 5), lalu berdasarkan tabel rute yang dipeliharanya, *router* 1 mengarahka pesan ke *router* 4. Setelah sampai di *router* 4, *router* 4 membaca tujua pesan (yaitu ke *router* 5), lalu berdasarkan tabel rute yang dipeliharanya, *router* 4 mengarahkan pesan ke *router* 2. Begitu seterusnya sehingga pesan sampai ke *router* tujuan. Lintasan terpendek yang dilalui oleh pesan diperlihatkan dengan garis tebal pada Gambar 8.68.



Asal	Tujuan	Via
1	1	-
1	2	4
1	3	4
1	4	4
1	5	4
1	6	4

Asal	Tujuan	Via
2	1	4
2	2	-
2	3	4
2	4	2
2	5	2
2	6	4

Asal	Tujuan	Via
3	1	6
3	2	6
3	3	-
3	4	6
3	5	3
3	6	3

Asal	Tujuan	Via
4	1	4
4	2	4
4	3	6
4	4	-
4	5	2
4	6	4

Asal	Tujuan	Via
5	1	2
5	2	5
5	3	5
5	4	2
5	5	-
5	6	3

Asal	Tujuan	Via
6	1	4
6	2	4
6	3	6
6	4	6
6	5	3
6	6	-

Gambar 8.68 Lintasan terpendek yang dilalui oleh pesan dari *router* 1 ke *router* 5.

8.14 Persoalan Pedagang Keliling

Persoalan Pedagang Keliling (*Travelling Salesperson Problem* - TSP) termasuk ke dalam persoalan yang sangat terkenal di dalam teori graf. Nama persoalan ini diilhami oleh masalah seorang pedagang yang berkeliling mengunjungi sejumlah kota. Deskripsi persoalannya adalah sebagai berikut: diberikan sejumlah kota dan jarak antar kota. Tentukan sirkuit terpendek yang harus dilalui oleh seorang pedagang bila pedagang itu berangkat dari sebuah kota asal dan menyinggahi setiap kota tepat satu kali dan kembali lagi ke kota asal keberangkatan.

Kota dapat dinyatakan sebagai simpul graf, sedangkan sisi menyatakan jalan yang menghubungkan antar dua buah kota. Bobot pada sisi menyatakan jarak antara dua buah kota. Persoalan perjalanan pedagang tidak lain adalah menentukan sirkuit Hamilton yang memiliki bobot minimum pada sebuah graf terhubung.

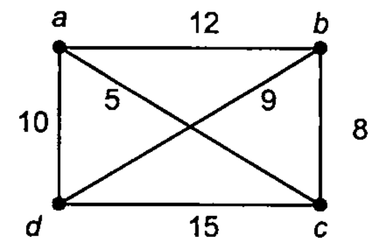
Meskipun persoalan ini bernama perjalanan pedagang, namun penerapannya tidak hanya pada kasus yang berhubungan dengan pedagang. Banyak terapan TSP yang muncul dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam bidang teknik, antara lain:

1. Misalkan sebuah mobil pos ditugaskan mengambil surat dari kotak pos yang tersebar pada n buah lokasi di berbagai sudut kota. Graf dengan $n + 1$ simpul dapat digunakan untuk menyajikan persoalan. Satu simpul menyatakan kantor pos tempat mobil pos mulai berangkat. Sisi (i, j) diberi bobot yang sama dengan jarak dari kotak pos i ke kotak pos j. Rute yang dilalui mobil pos adalah sebuah perjalanan (*tour*) yang mengunjungi setiap kotak pos hanya satu kali dan kembali lagi ke kantor pos asal. Kita harus menentukan rute perjalanan yang mempunyai total jarak terpendek.

2. Misalkan kita ingin menggunakan lengan robot untuk mengencangkan mur pada beberapa buah peralatan mesin dalam sebuah jalur perakitan. Lengan robot mulai berada dari posisi awalnya (yaitu di atas mur pertama, kemudian mengencangkannya), lalu berturut-turut pindah ke mur-mur berikutnya dan kembali lagi ke posisi awalnya. Siklus yang dibentuk jelaslah perjalanan mengunjungi simpul-simpul sebuah graf. Tiap simpul menyatakan mur, sisi menyatakan perpindahan, dan bobot setiap sisi menyatakan waktu yang diperlukan lengan robot untuk berpindah di antara dua simpul. Perjalanan dengan biaya minimum berarti meminimumkan waktu yang dibutuhkan robot untuk menyelesaikan tugasnya (yaitu total waktu perpindahan dari sebuah mur ke mur lainnya, sedangkan waktu pengencangan mur tidak dimasukkan dalam perhitungan).

3. Dalam lingkungan produksi terdapat beberapa komoditi yang dihasilkan oleh sekumpulan mesin. Proses fabrikasi merupakan sebuah siklus. Tiap-tiap siklus produksi menghasilkan n komoditi berbeda. Bila pekerjaan mesin diubah dari produksi komoditas i ke komoditas j, perubahan tersebut mendatangkan biaya sebesar c_{ij}. Diiinginkan untuk menemukan runtunan produksi yang menghasilkan n komoditas ini. Runtunan tersebut harus meminimumkan total biaya akibat perubahan urutan produksi (biaya lainnya tidak bergantung pada runtunan). Karena komoditas diproses secara siklus, adalah perlu memasukkan biaya untuk memulai siklus berikutnya. Ini adalah biaya akibat perubahan produksi komoditi terakhir ke komoditi pertama. Masalah ini dapat dianggap sebagai TSP pada graf n simpul dengan sisi yang bobotnya c_{ij}.

Pada persoalan TSP ini, jika setiap simpul mempunyai sisi ke simpul yang lain, maka graf yang merepresentasikannya adalah graf lengkap berbobot. Pada sembarang graf lengkap dengan n buah simpul ($n > 2$), jumlah sirkuit Hamilton yang berbeda adalah $(n - 1)!/2$. Rumus ini dihasilkan dari kenyataan bahwa dimulai dari sembarang simpul kita mempunyai $n - 1$ buah sisi untuk dipilih dari simpul pertama, $n - 2$ sisi dari simpul kedua, $n - 3$ dari simpul ketiga, dan seterusnya. Ini adalah pilihan yang independen, sehingga kita memperoleh $(n - 1)!$ pilihan. Jumlah itu harus dibagi dengan 2, karena tiap sirkuit Hamilton terhitung dua kali, sehingga semuanya ada $(n - 1)!/2$ buah sirkuit Hamilton.

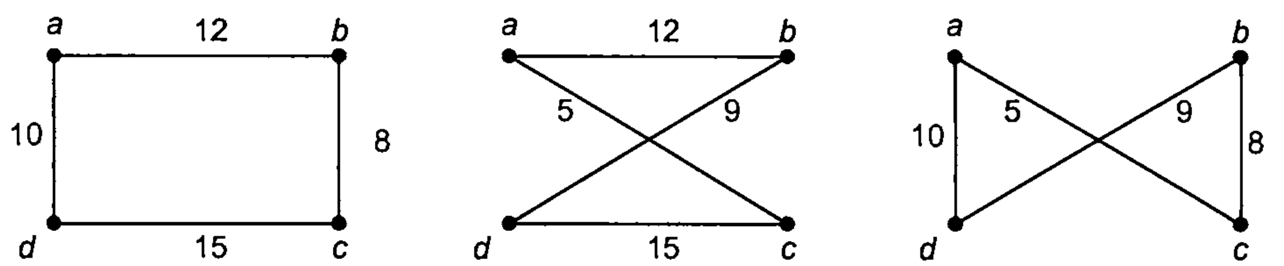


Gambar 8.69 Graf lengkap dengan 4 simpul. Tiap sisi diberi bobot

Tinjau graf lengkap dengan n = 4 simpul seperti yang ditunjukkan pada Gambar 8.69. Graf tersebut memiliki (4 – 1)!/2 = 3 sirkuit Hamilton, yaitu:

S_1 = (a, b, c, d, a) atau (a, d, c, b, a) dengan panjang rute = 10 + 12 + 8 + 15 = 45
S_2 = (a, c, d, b, a) atau (a, b, d, c, a) dengan panjang rute = 12 + 5 + 9 + 15 = 41
S_3 = (a, c, b, d, a) atau (a, d, b, c, a) dengan panjang sirkuit = 10 + 5 + 9 + 8 = 32

Gambar sirkuit Hamilton-nya diperlihatkan pada Gambar 8.70.



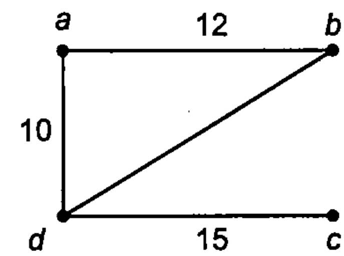
Gambar 8.70 Tiga buah sirkuit Hamilton berbeda dari graf lengkap pada Gambar 8.67.

Jadi, sirkuit Hamilton terpendek adalah S_3 = (a, c, b, d, a) atau (a, d, b, c, a) dengan panjang sirkuit = 10 + 5 + 9 + 8 = 32. Ini adalah solusi persoalan TSP untuk graf berbobot graf pada Gambar 8.69.

Persoalan TSP adalah persoalan yang sulit (*hard problem*) dipandang dari sudut komputasinya. Artinya, secara teoritis, TSP dapat dipecahkan dengan mengenumerasi (n – 1)!/2 buah sirkuit Hamilton, menghitung panjang rute masing-masing sirkuit, dan kemudian memilih sirkuit yang memiliki panjang ruter terpendek. Untuk n yang besar, jumlah sirkuit Hamilton yang harus diperiksa tentu saja sangat banyak. Misalnya untuk jumlah simpul n = 20 akan terdapat (19!)/2 sirkuit Hamilton atau sekitar 6×10^{16} penyelesaian.

Catatlah bahwa persoalan TSP tidak hanya berlaku pada graf lengkap, tetapi juga pada graf tidak lengkap sekalipun asalkan sirkuit Hamiltonnya ada. Graf pada Gambar 8.71 bukan graf lengkap namun memiliki sirkuit Hamilton.

Belum ada algoritma yang mangkus untuk memecahkan persoalan TSP untuk *n* sembarang, meskipun banyak usaha-usaha yang telah dibuat. Beberapa metode heuristik seperti *branch and bound* untuk memecahkan persoalan TSP dapat dibaca pada buku [HOR78].



Gambar 8.71 Graf tidak lengkap tetapi memiliki sirkuit Hamilton

8.15 Persoalan Tukang Pos Cina

Persoalan Tukang Pos Cina (*Chinese Postman Problem*) pertama kali dikemukakan oleh Mei Gan (berasal dari Cina) pada tahun 1962. Ia mengemukakan masalah yang disebut persoalan tukang pos Cina. Masalahnya tukang pos adalah sebagai berikut:

Seorang tukang pos akan mengantar surat ke alamat-alamat sepanjang jalan di suatu daerah. Bagaimana ia merencanakan rute perjalanannya supaya ia melewati setiap jalan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat awal keberangkatan.

Persoalan tukang pos Cina tidak lain menentukan sirkuit Euler di dalam graf. Jika peta jalan tempat tukang pos mengantarkan surat merupakan graf Euler, maka sirkuit Eulernya mudah ditemukan. Tetapi jika grafnya bukan graf Euler maka beberapa sisi di dalam graf harus dilalui lebih dari sekali. Karena itu, kita harus menemukan sirkuit yang terpendek yang harus dilalui oleh tukang pos yang mengunjungi setiap jalan paling sedikit satu kali. Oleh karena itu, masalah tukang pos Cina dirumuskan kembali sebagai berikut:

Seorang tukang pos akan mengantar surat ke alamat-alamat sepanjang jalan di suatu daerah. Bagaimana ia merencanakan rute perjalanannya yang mempunyai jarak terpendek supaya ia melewati setiap jalan paling sedikit sekali dan kembali lagi ke tempat awal keberangkatan.

Algoritma pemecahan masalah tukang pos Cina dapat dipelajari di dalam [GIB85].

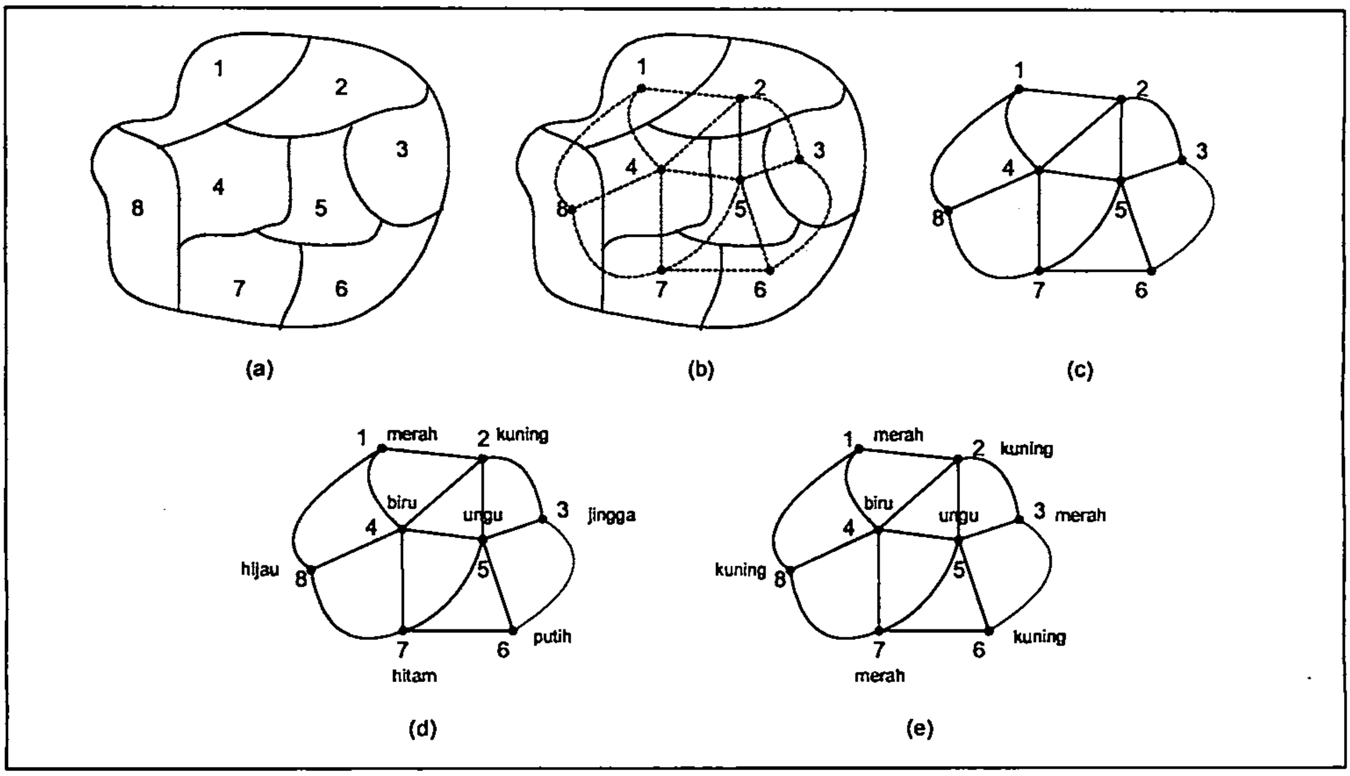
8.16 Pewarnaan Graf

Ada tiga macam persoalan pewarnaan graf (*graph colouring*), yaitu pewarnaan simpul, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah (*region*). Buku ini hanya membahas pewarnaan simpul saja.

DEFINISI 8.20. Pewarnaan simpul adalah memberi warna pada simpul-simpul di dalam graf sedemikian sehingga setiap dua simpul bertetangga mempunyai warna yang berbeda.

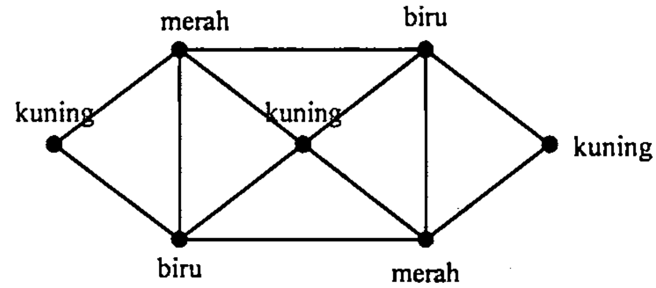
Salah satu terapan penting pewarnaan graf adalah mewarnai peta (*colouring of map*). Misalkan kita diminta mewarnai sebuah peta yang terdiri atas sejumlah wilayah Wilayah pada peta dapat menyatakan provinsi, kabupaten, negara, dan lain-lain (untuk mudahnya, perhatikanlah peta negara AS yang terdiri atas 50 buah negara bagian). Kita diminta mewarnai setiap wilayah di dalam peta sedemikian sehingga tidak ada dua wilayah bertetangga yang mempunyai warna sama. Satu cara untuk menjamin bahwa dua buah wilayah bertetangga tidak mempunyai warna yang sama adalah menggunakan warna yang berbeda untuk setiap wilayah.

Di dalam persoalan pewarnaan graf, kita tidak hanya sekedar mewarnai simpul-simpul dengan warna berbeda dari warna simpul tetangganya saja, namun kita juga menginginkan jumlah macam warna yang digunakan sesedikit mungkin. Dihubungkan dengan masalah pewarnaan peta di atas, 8 warna yang berbeda untuk setiap simpul di dalam Gambar 8.72 jelas tidak mangkus. Sebenarnya kita dapat menggunakan 4 warna saja untuk mewarnai peta tersebut (Gambar 8.72 (e)).



Gambar 8.72 (a) Peta, (b) Peta dan graf yang merepresentasikannya, (c) Graf yang merepresentasikan peta, (d) Pewarnaan simpul, setiap simpul mempunai warna berbeda, (e) Empat warna sudah cukup untuk mewarnai 8 simpul

Jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai simpul disebut **bilangan kromatik** graf G, disimbolkan dengan $\chi(G)$. Suatu graf G yang mempunyai bilangan kromatis k dilambangkan dengan $\chi(G) = k$. Jadi, graf pada Gambar 8.72(c) memiliki $\chi(G) = 4$, sedangkan graf pada Gambar 8.73 memiliki $\chi(G) = 3$.



Gambar 8.73 Tiga buah warna sudah cukup untuk mewarnai graf ini ($\chi(G) = 3$).

Beberapa graf tertentu dapat langsung ditentukan bilangan kromatiknya. Graf kosong N_n memiliki $\chi(G) = 1$, karena semua simpul tidak terhubung, jadi untuk mewarnai semua simpul cukup dibutuhkan satu warna saja. Graf lengkap K_n memiliki $\chi(G) = n$ sebab semua simpul saling terhubung sehingga diperlukan n buah warna. Graf bipartit $K_{m,n}$ mempunyai $\chi(G) = 2$, satu untuk simpul-simpul di himpunan V_1 dan satu lagi untuk simpul-simpul di V_2. Graf lingkaran dengan n ganjil memiliki $\chi(G) = 3$, sedangkan jika n genap maka $\chi(G) = 2$. Sembarang pohon T memiliki $\chi(T) = 2$. Untuk graf-graf yang lain tidak dapat dinyatakan secara umum bilangan kromatiknya.

Masalah menentukan bilangan kromatik graf planar yang direpresentasikan sebagai graf bidang sudah banyak diteliti oleh para ilmuwan. Perkembangan hasil penelitian untuk menemukan bilangan kromatik itu dapat disajikan dalam teorema yang beruntun di bawah ini (pembuktiannya tidak diberikan di sini).

Mula-mula, hasil penelitian tersebut dirangkum dalam teorema berikut:

TEOREMA 8.10. Bilangan kromatik graf planar tidak lebih dari 6.

Teorema 8.10 ini kemudian diperbaiki menjadi Teorema 8.11:

TEOREMA 8.11. Bilangan kromatik graf planar tidak lebih dari 5.

Puncak dari persoalan pewarnaan graf ini muncul pada tahun 1976 sebagai hasil dari pemecahan **persoalan 4-warna** (*four colour problem*), yaitu salah satu persoalan yang sangat terkenal dalam teori graf (persoalan 4-warna diajukan pada tahun 1852). Persoalan 4-warna berbunyi: dapatkah sembarang graf planar diwarnai hanya dengan 4 warna saja? Jawaban dari persoalan ini ditemukan oleh

Appel dan haken yang menggunakan komputer untuk menganalisis hampir 2000 graf yang melibatkan jutaan kasus [LIP92]. Jawaban ini dinyatakan dalam Teorema 8.12 berikut:

TEOREMA 8.12. Bilangan kromatik graf planar tidak lebih dari 4.

Pembuktian Teorema 8.12 ini sangat rumit dan menurut catatan sejarah pembuktiannya membutuhkan ratusan lembar kertas untuk menuliskannya.

Pemecahan persoalan pewarnaan graf sangat berjasa dalam menentukan jumlah miminum warna yang dibutuhkan untuk mewarnai sembarang peta. Selama bertahun-tahun, lima buah warna adalah jumlah yang cukup untuk mewarnai sembarang peta. Setelah beberapa ratus tahun, persoalan ini berhasil dipecahkan oleh K. Apple dan W. Haken seperti yang dikemukakan pada Teorema 8.12 di atas. Mereka berhasil memperlihatkan bahwa empat buah warna sudah cukup untuk mewarnai sembarang graf planar.

Contoh 8.44

Persoalan yang mempunyai karakteristik seperti pewarnaan graf adalah persoalan menentukan jadwal ujian. Misalkan terdapat delapan orang mahasiswa (1, 2, ..., 8) dan lima buah mata kuliah yang dapat dipilihnya (*A*, *B*, *C*, *D*, *E*). Tabel berikut memperlihatkan matriks lima mata kuliah dan delapan orang mahasiswa. Angka 1 pada elemen (i, j) berarti mahasiswa i memilih mata kuliah j, sedangkan angka 0 menyatakan mahasiswa i tidak memilih mata kuliah j.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
1	0	1	0	0	1
2	0	1	0	1	0
3	0	0	1	1	0
4	1	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	0	1	1	0
7	1	0	1	0	0
8	0	0	1	1	0

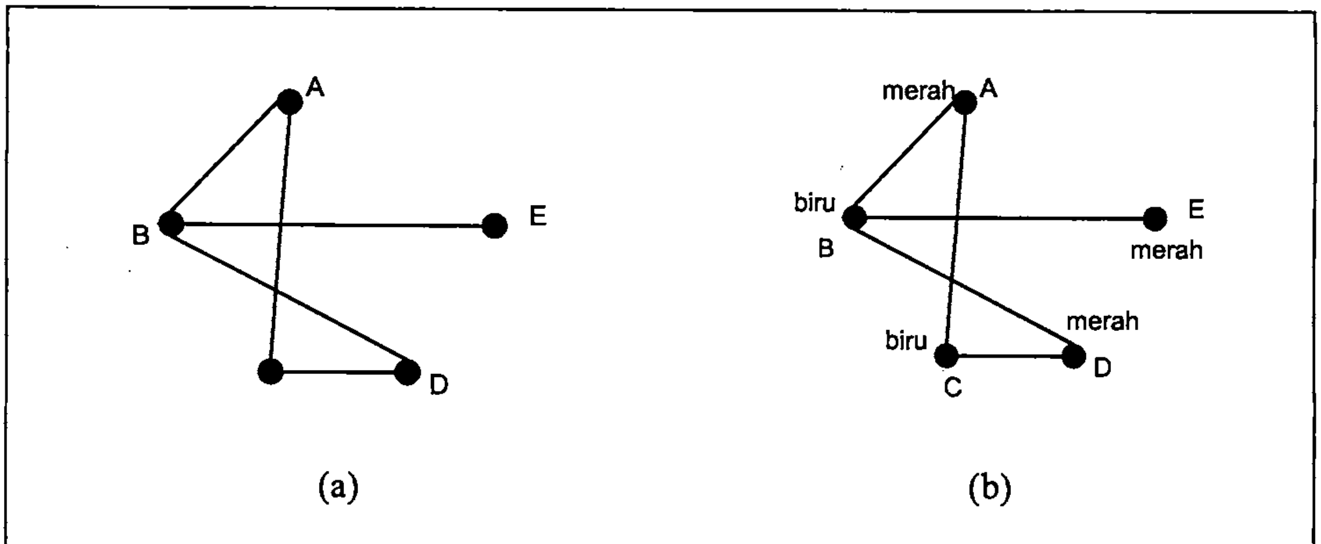
Berdasarkan tabel tadi, administratur mata kuliah ingin menentukan jadwal ujian sedemikian sehingga semua mahasiswa dapat mengikuti ujian mata kuliah yang diambilnya tanpa bertabrakan waktunya dengan jadwal ujian kuliah lain yang juga diambilnya. Pendek kata, jika ada mahasiswa yang mengambil dua buah mata kuliah atau lebih, jadwal ujian mata kuliah tersebut harus pada waktu yang tidak bersamaan. Ujian dua buah mata kuliah dapat dijadwalkan pada waktu yang sama jika tidak ada mahasiswa yang sama yang mengikuti ujian dua mata kuliah itu. Berapa paling sedikit jumlah hari yang dibutuhkan untuk jadwal ujian tersebut?

Penyelesaian:

Penyelesaian persoalan menentukan jadwal ujian semua mata kuliah sama dengan menentukan bilangan kromatis graf. Kita dapat menggambarkan graf yang menyatakan penjadwalan ujian. Simpul-simpul pada graf menyatakan mata kuliah. Sisi yang menghubungkan dua buah simpul menyatakan ada mahasiswa yang memilih kedua mata kuliah itu. Graf yang merepresentasikan persolan di atas dibuat ditunjukkan pada Gambar 8.74(a).

Berdasarkan graf tersebut kita menyimpulkan, bahwa apabila terdapat dua buah simpul dihubungkan oleh sisi, maka ujian kedua mata kuliah itu tidak dapat dibuat pada waktu yang sama. Warna-warna yang berbeda dapat diberikan pada simpul graf yang menunjukkan bahwa waktu ujiannya berbeda. Diinginkan jadwal ujiannya sesedikit mungkin untuk memudahkan pelaksanaanya. Jadi kita harus menentukan bilangan kromatis graf.

Bilangan kromatik graf pada Gambar 8.75 adalah 2. Jadi, ujian mata kuliah A, E, dan D dapat dilaksanakan bersamaan, sedangkan ujian mata kuliah B dan C dilakukan bersamaan tetapi pada waktu yang berbeda dengan mata kuliah A, E, dan D. Gambar 8.74(b) memperlihatkan graf yang telah diwarnai. ■



Gambar 8.74. (a) Graf persoalan penjadwalan ujian 5 mata kuliah untuk 8 orang mahasiswa
(b) Hasil pewaranan pada simpul-simpul graf

Untuk graf dengan jumlah simpul sedikit, kita dapat menentukan bilangan kromatiknya dengan mudah. Tetapi, untuk graf yang besar, kita perlu membuat program komputer untuk menentukan bilangan kromatik tersebut.

Algoritma Pewarnaan Graf

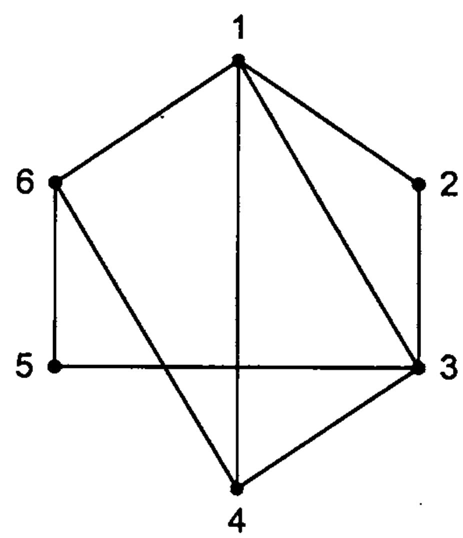
Algoritma Welch-Powell dapat digunakan untuk mewarnai sebuah graf G secara mangkus. Algoritma ini hanya memberikan batas atas untuk $\chi(G)$, yaitu bahwa algoritma tidak selalu memberikan jumlah warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai G [LIP92]. Algoritma Welch-Powell adalah sebagai berikut:

ALGORITMA Welch-Powell

1. Urutkan simpul-simpul dari G dalam derajat yang menurun (urutan seperti ini mungkin tidak unik karena beberapa simpul mungkin berderajat sama).
2. Gunakan satu warna untuk mewarnai simpul pertama (yang mempunyai derajat tertinggi) dan simpul-simpul lain (dalam urutan yang berurut) yang tidak bertetangga dengan simpul pertama ini.
3. Mulai lagi dengan simpul derajat tertinggi berikutnya di dalam daftar terurut yang belum diwarnai dan ulangi proses pewarnaan simpul dengan menggunakan warna kedua.
4. Ulangi penambahan warna-warna sampai semua simpul telah diwarnai.

Contoh 8.45

Gunakan algoritma Welch-Powell untuk mewarnai graf di bawah ini.



<u>Penyelesaian</u>:
Urutkan simpul-simpul di dalam graf berdasarkan derajat yang menurun. Warnai simpul 1 dengan warna a. Simpul yang tidak bertetangga dengan 1 adalah simpul 5, warnai simpul 5 ini dengan warna a. Simpul berikutnya di dalam daftar yang belum diwarnai adalah simpul 3. Warnai simpul 3 dengan warna b, dan simpul yang tidak bertetangga dengan 3 adalah simpul 6, warna simpul 6 ini juga dengan warna b. Simpul berikutnya yang belum diwarnai adalah simpul 4. Warnai simpul 4 dengan warna c, begitu juga simpul yang tidak bertetangga dengan simpul 4 diberi warna c. Sekarang semua simpul sudah diwarnai.

Simpul	1	3	6	4	2	5
Derajat	4	4	3	3	2	2
Warna	a	b	b	c	c	a

Perhatikan bahwa simpul 1, 2, dan 3 terhubung satu sama lain, sehingga paling sedikit dibutuhkan 3 warna berbeda untuk mewarnai graf G. Jadi, $\chi(G) = 3$. ■

8.17 Ragam Soal dan Penyelesaian

Contoh 8.46

Dapatkah kita menggambar graf teratur berderajat 3 dengan 7 buah simpul? Mengapa?

Penyelesaian:
Tidak, karena menurut aturan Lemma jabat tangan, jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu 2 kali jumlah sisi di dalam graf tersebut. Pada graf tersebut:

$e = nr / 2$
$\Leftrightarrow 2e = nr$
$\Leftrightarrow 2e = 3 \cdot 7$
$\Leftrightarrow 2e = 21$ jelas tidak memenuhi syarat karena 2 kali jumlah sisi pada graf tersebut ganjil.

Pendekatan lain:

$e = 21 / 2$ Jelas bahwa jumlah sisi dari suatu graf tidak mungkin berupa pecahan, maka tidak mungkin menggambar graf teratur berderajat 3 dengan 7 buah simpul. ■

Contoh 8.47

Tentukan jumlah simpul pada graf sederhana bila mempunyai 20 buah sisi dan tiap simpul berderajat sama.

Penyelesaian:
Pada graf teratur derajat r dengan n buah simpul, jumlah sisinya adalah

$$e = nr/2$$

sehingga

$$n = 2e/r = 2 \cdot 20/r = 40/r$$

Tinjau kasus-kasus nilai r sebagai berikut:

a. Untuk $r = 1$, maka $n = 40$; akan terbentuk graf tidak terhubung yang masing-masing simpulnya berderajat 1, jumlah sisinya adalah $40/2 = 20$ (memenuhi)
b. Untuk $r = 2$, maka $n = 20$, akan terbentuk graf lingkaran dengan sisi 20 (memenuhi)
c. Untuk $r = 3, 6, 7, 9$ tidak mungkin sebab hasil pembagian $(40/r)$ tidak bulat.
d. Untuk r yang lebih besar lagi tidak akan mungkin lagi terbentuk graf sederhana sebab jumlah simpulnya akan lebih kecil sehingga maksimum sisi yang diizinkan juga semakin kecil.

Jadi r yang memenuhi adalah $\{1, 2, 4, 5\}$, dan jumlah simpul di dalam graf adalah $\{40, 20, 10, 8\}$. ■

Contoh 8.48

Berapa jumlah minimum simpul yang diperlukan agar sebuah graf dengan 6 buah sisi menjadi planar? Ulangi soal yang sama untuk 11 buah sisi.

Penyelesaian:
Gunakan ketidaksamaan Euler $e \leq 3n - 6$.
Untuk $e = 6$,

$$
\begin{aligned}
e &\leq 3n - 6 \\
6 &\leq 3n - 6 \\
12 &\leq 3n \\
4 &\leq n
\end{aligned}
$$

berarti jumlah minimum simpul adalah 4.

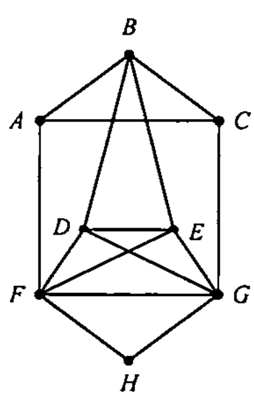
Untuk $e = 11$,

$$
\begin{aligned}
e &\leq 3n - 6 \\
11 &\leq 3n - 6 \\
17 &\leq 3n \\
17/3 &\leq n
\end{aligned}
$$

berarti jumlah minimum simpul adalah 6. ■

Contoh 8.49

Diberikan gambar sebuah graf G seperti di bawah ini.



(a) Tunjukkan dengan ketidaksamaan Euler bahwa graf G tidak planar.

(b) Tunjukkan dengan Teorema Kuratowski bahwa graf G tidak planar.

Penyelesaian:

(a) Jika menggunakan rumus ketidaksamaan Euler $e \leq 3n - 6$ maka akan terlihat bahwa graf memenuhi ketidaksamaan tersebut (padahal graf tidak planar):

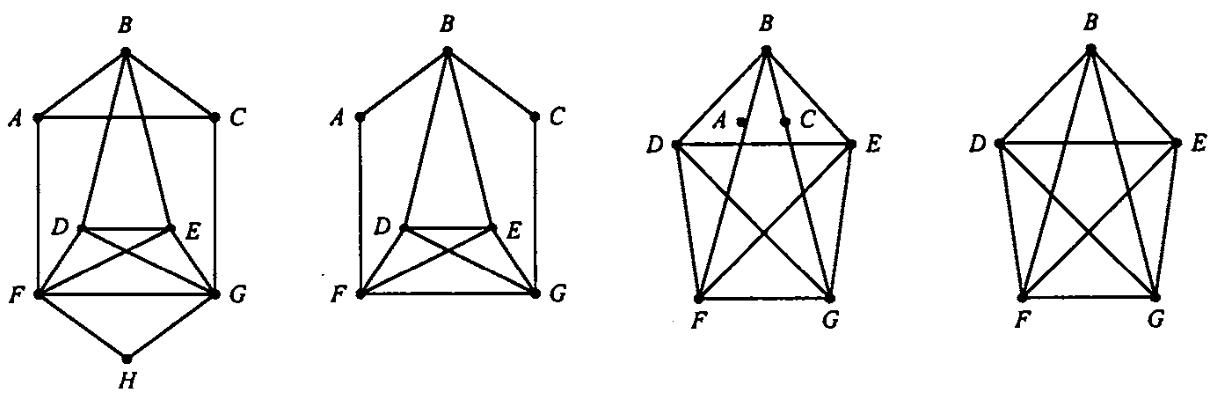
$$
\begin{aligned}
e &\leq 3n - 6 \\
15 &\leq 3 \cdot 8 - 6 \\
15 &\leq 24 - 6 \\
15 &\leq 18
\end{aligned}
$$

Untuk menunjukkan bahwa graf tidak planar kita membuat asumsi bahwa setiap daerah pada graf planar dibatasi oleh paling sedikit 4 buah sisi. Ketidaksamaan yang dihasilkan (lihat upa-bab 8.9) adalah:

$$\begin{aligned} &e \le 2n - 4 \\ &15 \le 2 \cdot 8 - 4 \\ &15 \le 16 - 4 \\ &15 \le 12 \ \text{(benar)} \end{aligned}$$

Jadi, memang benar graf G tidak planar.

(b) Dengan menggunakan teorema Kuratowski kita dapat membuktikan bahwa graf G mengandung upagraf yang homeomorfik dengan graf $K_{3,3}$ atau K_5.



G | G_1(upagraf dari G) | G_2 (isomorfik dengan G_1) | G_2 homeomorfik dengan K_5 (dengan membuang simpul A dan C yang berderajat 2) ■

Contoh 8.50

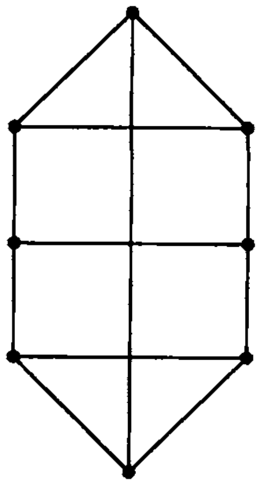
Berapa bilangan kromatis graf pada soal 8.49 di atas?

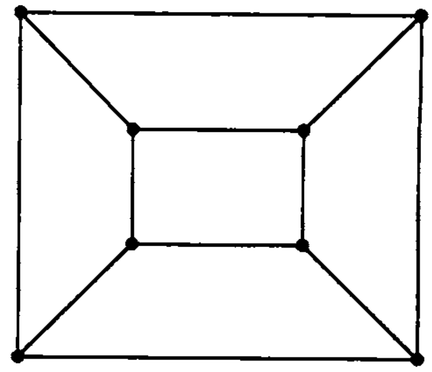
Penyelesaian:
Bilangan kromatis graf tersebut adalah 4. Sebagai contoh simpul dapat dibagi menjadi 4 warna berbeda: (D, A, H), (C, E), (B, G), (F). ■

Contoh 8.50

Gambarkan 2 buah graf yang isomorfik dengan graf teratur berderajat 3 yang mempunyai 8 buah simpul.

Penyelesaian:
Jawaban untuk soal ini tidak unik. Ada banyak graf teratur dengan 8 simpul yang saling isomorfik satu sama lain. Sepasang di antaranya adalah seperti berikut ini:



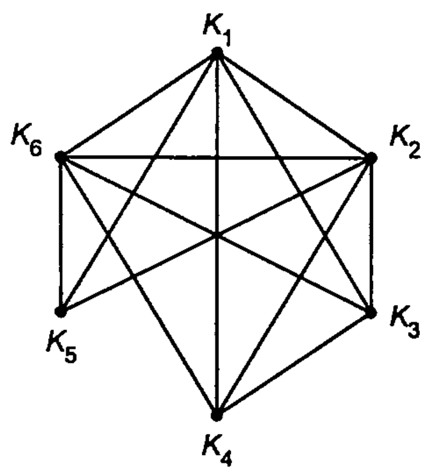


■

Contoh 8.51

Sebauh departemen mempunyai 6 kelompok kerja yang setiap bulannya masing-masing selalu mengadakan rapat satu kali. Keenam kelompok kerja dengan masing-masing anggotanya adalah: K_1 = {*Amir, Budi, Yanti*}, K_2 = {*Budi, Hasan, Tommy*}, $K3$ = {*Amir, Tommy, Yanti*}, K_4 = {*Hasan, Tommy, Yanti*}, K_5 = {*Amir, Budi*}, K_6 = {*Budi, Tommy, Yanti*}. Berapa banyak waktu rapat berbeda yang harus direncanakan sehingga tidak ada anggota kelompok kerja yang dijadwalkan rapat pada waktu yang sama. Gambarkan graf yang merepresentasikan persoalan ini lalu (jelaskan sisi menyatakan apa, simpul menyatakan apa) tentukan jumlah waktu rapat ini.

Penyelesaian:
Graf yang memodelkan persoalan di atas adalah seperti di bawah ini, yang dalam hal ini simpul menyatakan kelompok sedangkan sisi menyatakan adanya anggota kelompok yang sama.



Jika ada sisi yang menghubungkan 2 kelompok berarti kelompok tersebut tidak boleh rapat pada waktu yang sama. Untuk mencari jumlah minimum waktu rapat yang harus disediakan kita dapat menggunakan cara yang sama seperti mencari bilangan kromatis dari graf tersebut. Setiap warna yang berbeda mewakili satu waktu rapat yang dibutuhkan. Bilangan kromatis graf tersebut adalah 5, sehingga waktu rapat yang harus disediakan adalah 5. ■

Contoh 8.52

(a) Apakah K_{13} memiliki sirkuit Euler? Sirkuit Hamilton?
(b) Ulangi pertanyaan (a) untuk K_{14}

Penyelesaian:
Sirkuit Euler hanay ada jika semua simpul di dalam graf berderajat genap. Untuk sirkuit Hamilton, setiap graf lengkap adalah graf Hamilton (memiliki sirkuit Hamilton).

(a) K_{13} memiliki sirkuit Euler sebab setiap simpul pada K_{13} berderajat 12 (genap); K_{13} juga memiliki Sirkuit Hamilton sebab K_{13} adalah graf lengkap (setiap graf lengkap adalah graf Hamilton).
(b) K_{14} tidak memiliki sirkuit Euler sebab setiap simpul pada K_{14} berderajat 13 (ganjil). K_{14} memiliki Sirkuit Hamilton sebab K_{14} adalah graf lengkap.

■

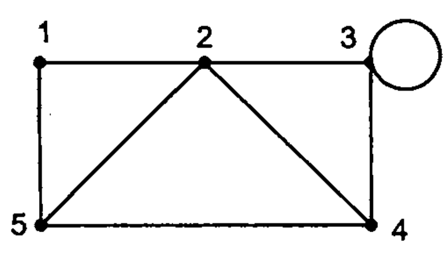
Contoh 8.53

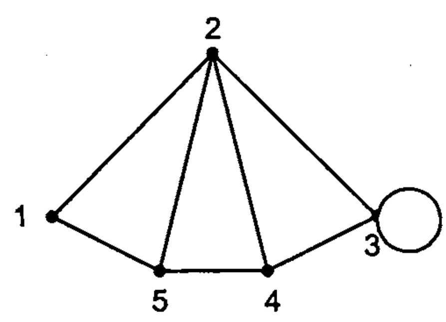
Diketahui matriks ketetanggaan (*adjacency matrices*) dari sebuah graf tidak berarah:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Gambarkan dua buah graf yang isomorfik yang bersesuaian dengan matriks ketetanggaan di atas.

Penyelesaian:
Jawaban tidak tunggal, salah satunya seperti di bawah ini:

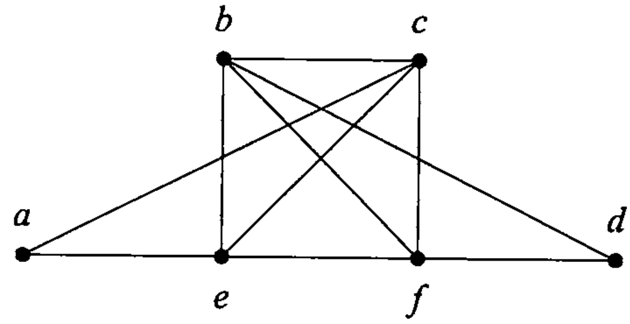




■

Contoh 8.54

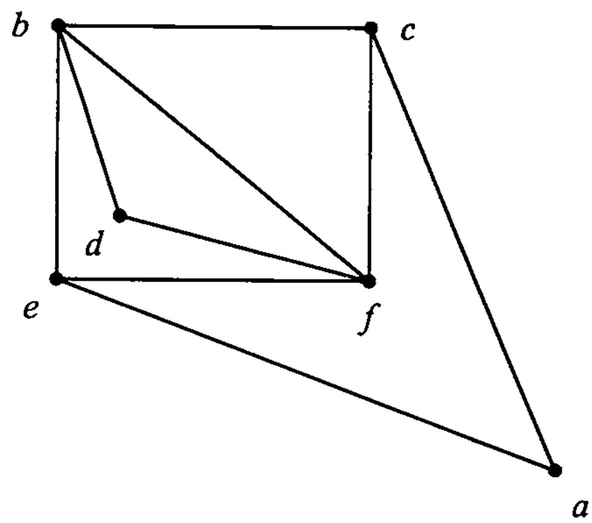
Perlihatkan dengan ketidaksamaan Euler bahwa graf berikut planar, lalu gambarkan graf planar tersebut sebagai graf bidang.



Penyelesaian:
Diketahui $e = 10$ dan $n = 6$, maka:

$$
\begin{aligned}
e &\le 3n - 6 \\
10 &\le 3 \cdot 6 - 6 \\
10 &\le 12 \text{ (benar)}
\end{aligned}
$$

Jadi graf tersebut adalah graf planar.
Salah satu gambar graf bidangnya (mungkin ada cara penggambaran lain):



■

Contoh 8.55

Di suatu negara terdapat 7 buah stasiun televisi. Pemerintah menetapkan aturan bahwa dua stasiun televisi yang berjarak ≤ 150 km tidak boleh beroperasi pada saluran frekuensi (*UHF*) yang sama. Tabel di bawah ini memperlihatkan jarak (km) antar stasiun televisi.

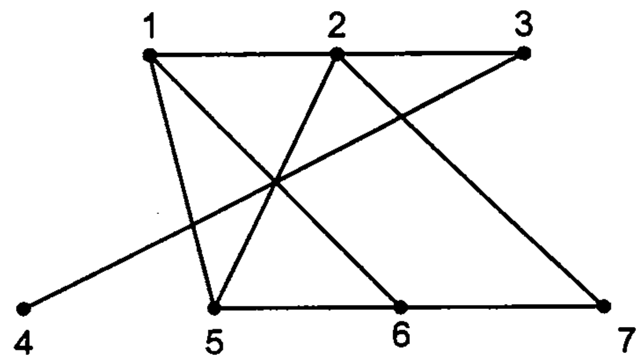
	1	2	3	4	5	6	7
1	-	85	175	200	50	100	230
2	-	-	125	175	100	160	145
3	-	-	-	100	200	250	160
4	-	-	-	-	210	220	180
5	-	-	-	-	-	100	235
6	-	-	-	-	-	-	120
7	-	-	-	-	-	-	-

(a) Gambarkan graf yang memodelkan persoalan ini. Jelaskan pula arti setiap simpul dan sisi pada graf anda.

(b) Berapa banyak frekuensi berbeda yang dibutuhkan bagi ketujuh stasiun TV tersebut sesuai dengan aturan Pemerintah? Termasuk kategori mana persolan ini?

Penyelesaian:

(a) Graf yang memodelkan persoalan ini adalah sebagai berikut: smpul merepresentasikan stasiun televisi, sedangkan ssi merepresentasikan bahwa dua buah simpul yang terhubung oleh sisi tersebut tidak boleh beroperasi pada saluran frekuensi yang sama sebab jarak keduanya ≤ 150 km.



(b) Banyak frekuensi yang berbeda adalah adalah minimum 3 (bilangan kromatis garf) dan maksimum 7 (jumlah warna maksimum). Persoalan ini termasuk ke dalam kategori Pewarnaan Graf.

■

Soal Latihan

1. Dalam sebuah pesta, sepuluh orang saling berjabat tangan. Tiap orang hanya berjabat tangan satu kali dengan orang lainnya. Hitung jumlah jabat tangan yang terjadi (Petunjuk: modelkan persoalan ini ke dalam graf)

2. Tiga pasang suami istri yang sedang menempuh perjalanan sampai ke sebuah sungai. Di situ mereka menemukan sebuah perahu kecil yang hanya bisa membawa tidak lebih dari dua orang setiap kali menyeberang. Penyeberangan sungai dirumitkan oleh kenyataan bahwa para suami sangat pencemburu dan tidak mau meninggalkan istri-istri mereka jika ada lelaki lain. Buatlah sebuah graf untuk menunjukkan bagaimana penyeberangan itu bisa dilakukan.

3. Empat buah tim bola basket mengikuti kejuaraan antar Universitas. Pertandingan menggunakan sistem *round-robin*, yaitu setiap tim bertemu dengan tim lainnya satu kali. Misalkan empat tim tersebut dinamai A, B, C, dan D. Gambarkan graf berarah yang menyatakan satu set pertandingan (graf tersebut dinamakan graf turnamen – *tournament graph*).

4. Sebuah graf akan dibentuk dari 25 buah sisi. Berapa jumlah maksimum simpul di dalam graf sederhana yang dapat dibuat dari 25 buah sisi tersebut?

6. Ada n buah komputer yang akan dihubungkan dengan sejumlah kabel, baik secara langsung atau terhubung melalui komputer lainnya. Berapa jumlah minimum kabel yang dibutuhkan?

7. Tentukan jumlah simpul pada graf sederhana bila mempunyai 12 buah sisi dan tiap simpul berderajat dua.

8. Tentukan jumlah simpul pada graf sederhana bila mempunyai 20 buah sisi dan tiap simpul berderajat sama

9. Tunjukkan bahwa derajat maksimum sembarang simpul pada sembarang graf sederhana dengan n simpul adalah $n - 1$.

10. Berapa jumlah maksimum dan jumlah minimum simpul pada graf sederhana yang mempunyai 12 buah sisi dan tiap simpul berderajat ≥ 3?

11. Gambarkan dua buah graf teratur berderajat 3 dengan 6 buah simpul.

12. Dapatkah kita menggambar graf teratur derajat 3 dengan 7 buah simpul?

13. Ada n buah kota yang dihubungkan dengan sebuah jaringan k jalan raya (jalan raya dalam hal ini didefinisikan sebagai jalan antara dua buah kota yang tidak melalui kota-kota antara). Tunjukkan bahwa jika $k > (n - 1)(n - 2)/2$, maka kita selalu dapat menempuh perjalanan antara sembarang dua buah kota melalui jalan-jalan raya penghubungnya.

14. Dapatkah graf tidak berarah sederhana dengan 8 simpul memiliki 40 buah sisi?

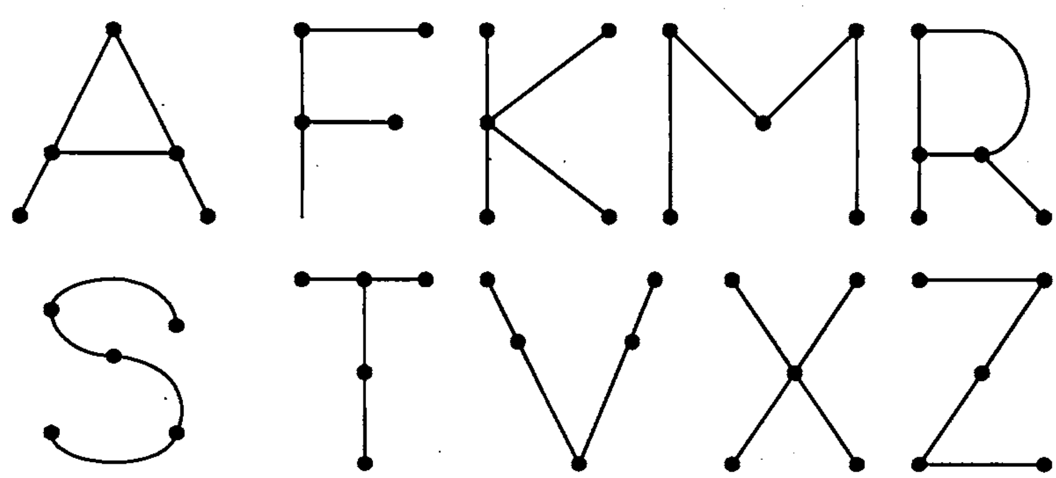
15. Gambarkan dua buah graf dengan lima buah simpul yang isomorfik.

16. Diketahui matriks ketetanggaan *(adjacency matrices)* dari sebuah graf tidak berarah:

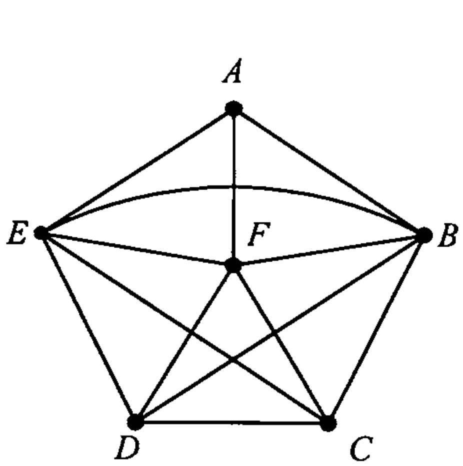
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

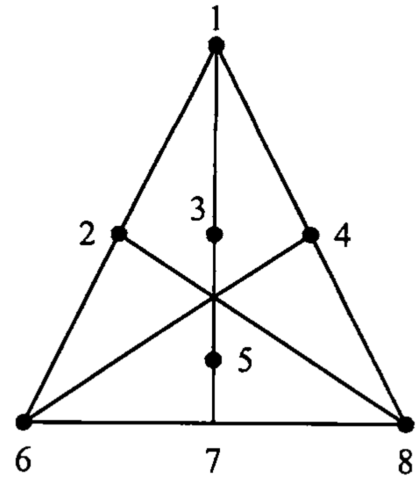
17. Gambarkan dua buah graf yang isomorfik yang bersesuaian dengan matriks ketetanggan di atas.

18. Manakah di antara sepuluh graf karakter di bawah ini yang isomorfik dengan huruf M?



19. Perlihatkan dengan Teorema Kuratowski bahwa dua buah graf di bawah ini tidak planar!

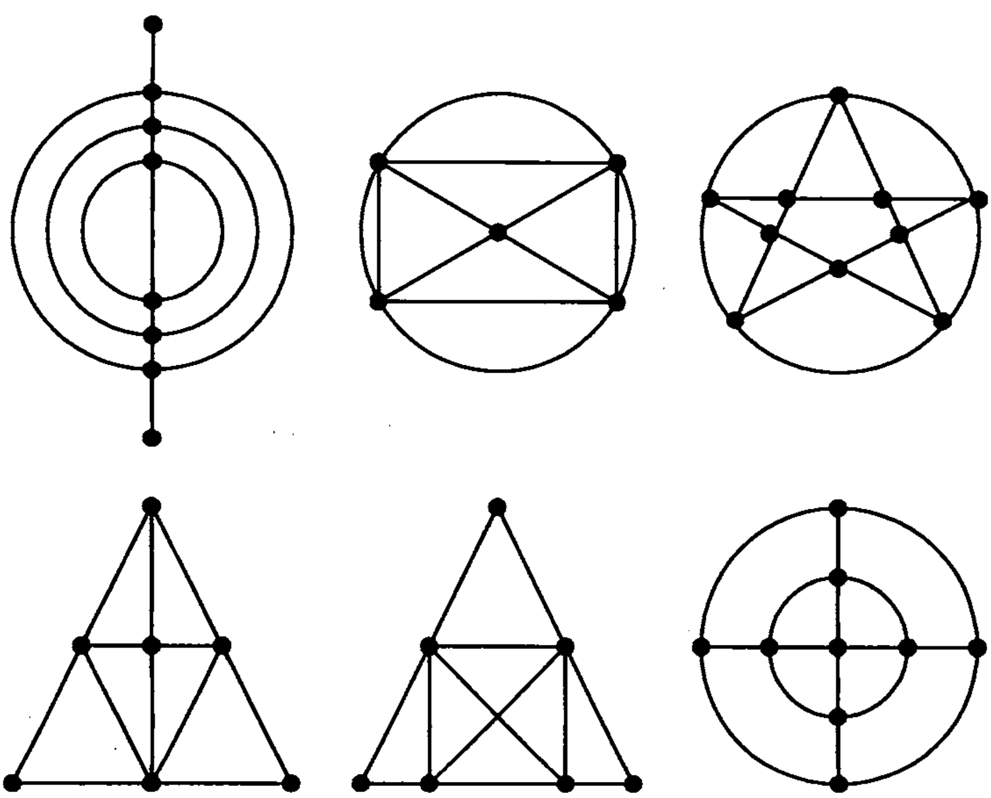




20. Untuk n apakah graf lengkap K_n merupakan graf Euler?

21. Perusahaan kontraktor Euler dikontrak untuk membangun sebuah jembatan tambahan di Konigsberg sedemikian sehingga ada lintasan Euler yang melalui setiap jembatan. Di mana jembatan tambahan itu harus dibangun? Gambarkan grafnya.

22. Manakah di antara graf di bawah ini yang dapat dilukis tanpa mengangkat pensil sekalipun?



23. Gambarkan graf yang mempunyai lintasan Hamilton tetapi tidak memiliki sirkuit Hamilton.

tamu di setiap kamar/ruangan yang jumlah pintunya genap. Jika kamar tak itu hanya mempunyai satu pintu masuk, buktikan bahwa seseorang yang masuk dari luar selalu bisa mencapai sebuah kamar/ruangan yang tidak ada bantarnya.

26. Misalkan G adalah graf dengan 11 buah simpul atau lebih. Tunjukkan bahwa G tidak planar.

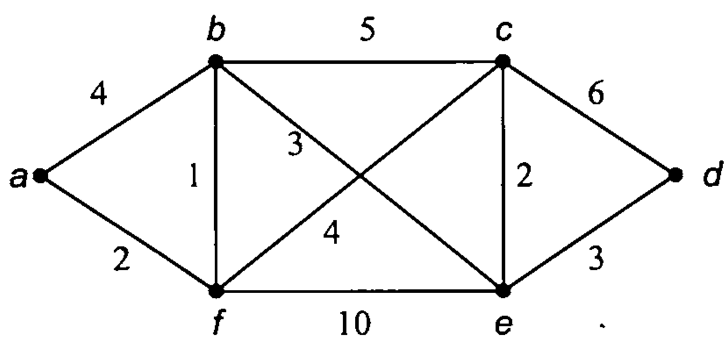
27. Tunjukkan bahwa suatu graf planar terhubung dengan 8 simpul dan 12 buah sisi, setiap wilayahnya (region) dibatasi oleh 3 buah sisi.

28. Kubus-n adalah suatu graf tak-berarah dengan 2^n simpul yang diberi label dengan 2^n bilangan biner n-bit. Antara dua simpul ada sisi jika bedaa label binernya berbeda hanya pada satu bit. Tunjukkan bahwa suatu kubus-n

Zat kimia	Tidak dapat disimpan bersama zat kimia
A	B, D
B	A, D, E, F, G
C	E, G
D	A, F, B
E	B, C, G
F	B, D
G	C, E, G

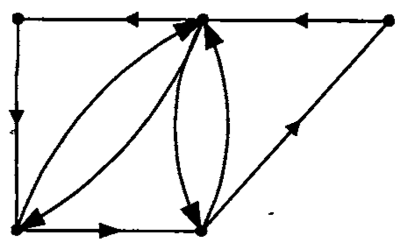
Gambarkan graf yang menyatakan persoalan (jelaskan arti simpul dan sisi yang menghubungkan dua buah simpul). Pikirkan termasuk jenis manakah persoalan ini). Kemudian tentukan jumlah minimum ruangan yang dibutuhkan untuk menyimpan semua zat kimia di atas.

30. Tinjau graf berbobot di bawah ini. Simpul menyatakan kota, sisi menyatakan sarana transportasi yang menghubungkan kota, dan bobot menyatakan ongkos perjalanan antara dua kota bertetangga. Seorang pedagang berangkat dari kota a dan mengunjungi setiap kota lain tepat sekali dan kembali lagi ke kota a. Gambarkan semua kemungkinan lintasan perjalanan pedagang, lalu tentukan rute perjalanan yang termurah.

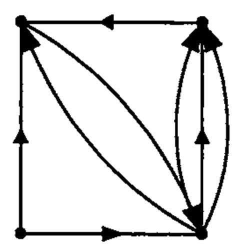


31. Dalam babak penyisihan kompetisi sepakbola yang menggunakan sistem kompetisi penuh, setiap tim bertanding dengan tim lainnya dua kali. Jika ada 20 tim, berapa banyak pertandingan yang harus diadakan? Graf apa yang terbentuk?

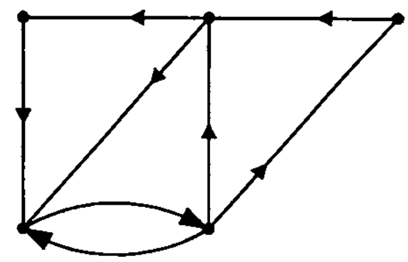
32. Ada tiga buah peta jalan di tiga buah komplek perumahan besar (Gambar a, b, dan c di bawah ini). Mana saja dari ketiga peta jalan tersebut yang dapat dilalui oleh Pak Pos sedemikian sehingga setiap ruas jalan hanya dilewati tepat sekali dan kembali lagi ke titik asal keberangkatan? Jelaskan alasan matematis atas jawaban anda tersebut.



(a)



(b)



(c)