BAB 6

# Kombinatorial dan Peluang Diskrit

Hidup adalah penjumlahan semua pilihan yang ada.
**(Albert Camus)**

**Kombinatorial** (*combinatoric*) adalah cabang matematika yang mempelajari pengaturan objek-objek. Solusi yang ingin kita peroleh dengan kombinatorial ini adalah jumlah cara pengaturan objek-objek tertentu di dalam himpunannya. Tiga buah contoh ilustrasi berikut dikemukakan untuk memperjelas masalah seperti apa yang akan dipecahkan dengan kombinatorial.

(i) Contoh pertama, misalkan nomor plat mobil di negara $X$ terdiri atas 5 angka angka diikuti dengan 2 huruf. Angka pertama tidak boleh 0. Berapa banyak nomor plat mobil yang dapat dibuat?

(ii) Contoh kedua, sandi-lewat (*password*) sistem komputer panjangnya enam sampai delapan karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf atau angka; huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan. Berapa banyak sandi-lewat yang dapat dibuat?

(iii) Dari 20 anggota Fraksi $X$ di DPR, akan dibentuk sebuah komisi yang beranggotakan 6 orang. Berapa banyak cara memilih anggota komisi bila seorang anggota yang bernama $A$ harus termasuk di dalam komisi tersebut?

Cara yang paling sederhana untuk menyelesaikan persoalan semacam di atas adalah dengan mengenumerasi semua kemungkinan jawabannya. Mengenumerasi artinya mencacah atau menghitung (*count*) satu persatu setiap kemungkinan jawaban. Untuk persoalan dengan jumlah objek sedikit, mengenumerasi setiap kemungkinan jawaban masih dapat dilakukan, tetapi untuk persoalan dengan jumlah objek yang banyak, cara enumerasi jelas tidak sangkil. Misalnya pada persoalan contoh pertama, bila kita mengenumerasi semua kemungkinan jawabannya adalah seperti di bawah ini:

12345AB
12345AC
12345BC
...
34567MT
34568ML
...
dan seterusnya...

Mungkin kita sudah lelah sebelum usaha mengenumerasi semua kemungkinan nomor plat mobil selesai, karena nomor plat mobil yang dibentuk sangat banyak. Di sinilah peran kombinatorial, yang merupakan "seni berhitung", menyelesaikan persoalan semacam ini dengan cepat. Kombinatorial dapat digunakan untuk menjawab persoalan semacam ini tanpa kita perlu mengenumerasi semua kemungkinan jawabannya. Hal ini dapat dilakukan karena di dalam kombinatorial terdapat kaidah dasar menghitung (akan dijelaskan di dalam upabab 6.2). Dengan kaidah ini, berbagai persoalan menghitung jumlah cara pengaturan objek dapat diselesaikan. Kita juga menggunakan kaidah dasar menghitung untuk mengetahui berapa jumlah kemungkinan sandi-lewat yang harus dicoba oleh seorang penyusup (*intruder*) untuk memasuki sebuah sistem komputer. Terakhir, kombinatorial digunakan pada teori peluang diskrit untuk menghitung peluang suatu kejadian terjadi.

## 6.1 Percobaan

Kombinatorial didasarkan pada hasil yang diperoleh dari dari suatu percobaan (*experiment*). Percobaan adalah proses fisik yang hasilnya dapat diamati.

Contoh-contoh percobaan dan hasilnya (*outcome*) adalah:

1. Melempar dadu
   Enam hasil percobaan yang mungkin untuk pelemparan dadu adalah muka dadu 1, 2, 3, 4, 5, atau 6

2. Melempar koin uang Rp100
   Hasil percobaan melempar koin 100 ada dua kemungkinan: muka koin yang bergambar rumah gadang atau muka koin yang bergambar wayang

3. Memilih lima orang wakil dari 100 orang mahasiswa
   Hasil yang diperoleh adalah perwakilan yang beranggotakan lima orang mahasiswa. Kemungkinan perwakilan yang dapat dibentuk banyak sekali.

4. Menyusun jumlah kata yang panjangnya 5 huruf yang dapat dibentuk dari huruf-huruf $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, tidak boleh ada huruf yang berulang di dalam kata.
   Hasil yang diperoleh adalah string yang disusun oleh huruf-huruf tersebut, misalnya *abcde*, *abced*, *acdeb*, dan seterusnya.

## 6.2 Kaidah Dasar Menghitung

Di dalam kombinatorial, kita harus menghitung (*counting*) semua kemungkinan pengaturan objek. Dua kaidah dasar yang digunakan sebagai teknik menghitung dalam kombinatrorial adalah **kaidah perkalian** (*rule of product*) dan **kaidah penjumlahan** (*rule of sum*). Kedua kaidah ini dapat digunakan untuk memecahkan banyak masalah persoalan menghitung.

1. **Kaidah perkalian (*rule of product*)**
   Bila percobaan 1 mempunyai $p$ hasil percobaan yang mungkin terjadi (atau menghasilkan $p$ kemungkinan jawaban), percobaan 2 mempunyai $q$ hasil percobaan yang mungkin terjadi (atau menghasilkan $q$ kemungkinan jawaban), maka bila percobaan 1 <u>dan</u> percobaan 2 dilakukan, maka terdapat $p \times q$ hasil percobaan (atau menghasilkan $p \times q$ kemungkinan jawaban).

2. **Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)**
   Bila percobaan 1 mempunyai $p$ hasil percobaan yang mungkin terjadi (atau menghasilkan $p$ kemungkinan jawaban), percobaan 2 mempunyai $q$ hasil percobaan yang mungkin terjadi (atau menghasilkan $q$ kemungkinan jawaban), maka bila hanya satu percobaan saja yang dilakukan (percobaan 1 <u>atau</u> percobaan 2), terdapat $p + q$ kemungkinan hasil percobaan (menghasilkan $p + q$ kemungkinan jawaban) yang mungkin terjadi.

Perhatikanlah kata yang digarisbawahi pada kedua di atas: <u>dan</u> serta <u>atau</u>. Kedua kata ini adalah kata kunci untuk mengidentifikasi apakah suatu persoalan menghitung diselesaikan dengan kaidah perkalian atau kidah penjumlahan. Kaidah perkalian menyatakan bahwa kedua percobaan dilakukan secara <u>simultan</u> atau serempak, sedangkan pada kaidah penjumlahan, kedua percobaan dilakukan <u>tidak</u> simultan.

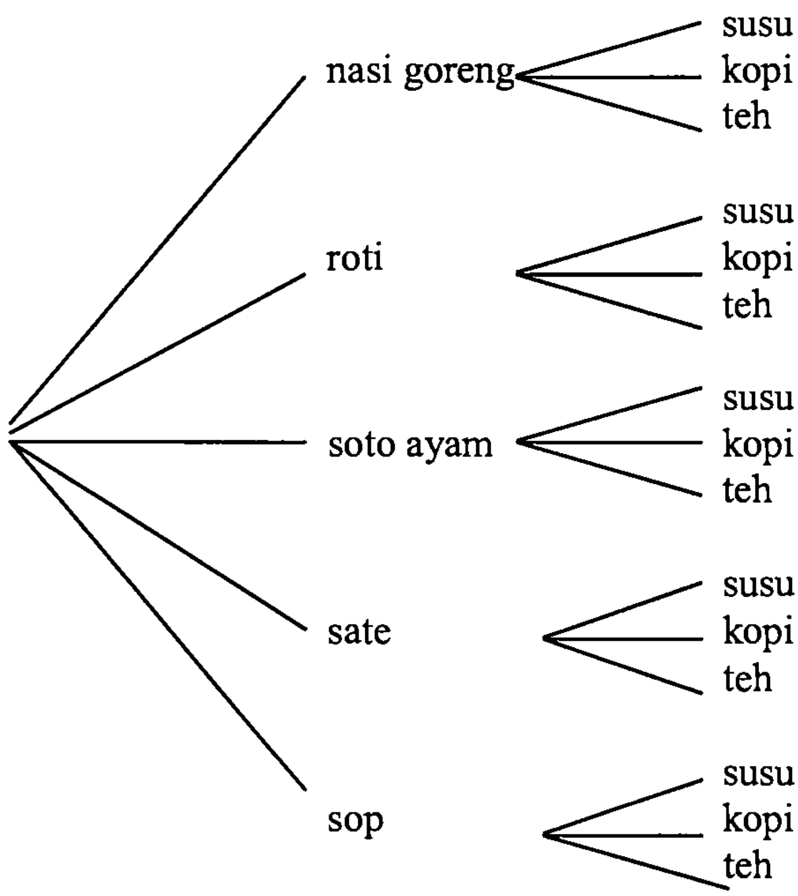
Contoh 6.1 sampai 6.7 berikut mempelihatkan penggunaan kaidah perkalian dan kaidah penjumlahan untuk menghitung pengaturan objek-objek. Kita harus dapat menganalisis kapan menggunakan kaidah perkalian dan kaidah penjumlahan.

---

**Contoh 6.1**

Sebuah restoran menyediakan lima jenis makanan, misalnya nasi goreng, roti, soto ayam, sate, dan sop, serta tiga jenis minuman, misalnya susu, kopi, dan teh. Jika setiap orang boleh memesan satu makanan dan satu minuman, berapa banyak pasangan makanan dan minuman yang dapat dipesan?

<u>Penyelesaian</u>:
Kita dapat menggunakan diagram pohon untuk menentukan jumlah pasangan makanan yang minuman yang dapat dipesan. Pada diagram pohon tersebut, akar adalah awal pemilihan, cabang adalah alternatif solusi dan daun merupakan akhir solusi.




Berdasarkan diagram pohon di atas, kita mengenumerasi semua kemungkinan pasangan makanan dan minuman yang dapat dipesan, yaitu:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *nasi goreng dan susu* | *roti dan susu* | *soto ayam dan susu* | *sate dan susu* | *sop dan susu* |
| *nasi goreng dan kopi* | *roti dan kopi* | *soto ayam dan kopi* | *sate dan kopi* | *sop dan kopi* |
| *nasi goreng dan the* | *roti dan teh* | *soto ayam dan teh* | *sate dan teh* | *sop dan teh* |

semuanya ada 15 pasang.

Dalam kombinatorial, kita memandang bahwa dalam kejadian ini orang harus memilih makanan dan minuman. Ada 5 kemungkinan memilih makanan, yaitu nasi goreng, roti, soto ayam, sate, dan sop. Ada 3 kemungkinan memilih minuman, yaitu susu, kopi, dan teh, sehingga dengan menggunakan kaidah perkalian, jumlah kemungkinan pasangan makanan dan minuman yang dapat dipesan adalah $5 \times 3 = 15$ pasang. ■

---

**Contoh 6.2**

Jabatan ketua himpunan dapat diduduki oleh mahasiswa angkatan tahun 1997 atau angkatan tahun 1998. Jika terdapat 45 orang mahasiswa angkatan 1997 dan 52 orang mahasiswa angkatan 1998, berapa cara memilih penjabat ketua himpunan?

Penyelesaian:
Jabatan yang ditawarkan hanya ada satu, yang dapat diduduki oleh salah seorang mahasiswa dari dua angkatan yang ada. Ada 45 cara memilih satu orang mahasiswa dari Angkatan 1997, dan 52 cara memilih satu orang dari Angkatan 1998, namun hanya satu dari kedua angkatan itu yang terpilih (angkatan 1997 atau angkatan 1998). Dalam kombinatorial, dari kedua kajadian, hanya satu dari dua kejadian yang dilakukan, sehingga dengan menggunakan kaidah penjumlahan, jumlah cara memilih penjabat ketua himpunan tersebut sama dengan jumlah mahasiswa pada kedua angkatan, yaitu $45 + 52 = 97$ cara. ■

---

**Contoh 6.3**

Sekelompok mahasiswa terdiri atas 4 orang pria dan 3 orang wanita. Berapa jumlah cara memilih satu orang wakil pria dan satu orang wakil wanita?

Penyelesaian:
Ada 4 kemungkinan memilih satu wakil pria, dan 3 kemungkinan memilih satu wakil wanita. Jika dua orang wakil harus dipilih, masing-masing 1 pria dan 1 wanita, maka jumlah kemungkinan perwakilan yang dapat dipilih adalah $4 \times 3 = 12$. ■

---

**Contoh 6.4**

Sekelompok mahasiswa terdiri atas 4 orang pria dan 3 orang wanita. Berapa jumlah cara memilih satu orang yang mewakili kelompok tersebut (tidak peduli pria atau wanita)?

Penyelesaian:
Ada 4 kemungkinan memilih satu wakil pria, dan 3 kemungkinan memilih satu wakil wanita. Jika hanya satu orang wakil yang harus dipilih (pria atau wanita), maka jumlah kemungkinan wakil yang dapat dipilih adalah $4 + 3 = 7$. ■

---

**Contoh 6.5**

Misalkan himpunan $A = \{a, b, c, d, e\}$ dan himpunan $B = \{1, 2, 3\}$. Berapa banyak pasangan terurut (*ordered pairs*) yang dapat dibentuk antara anggota himpunan $A$ dengan anggota himpunan $B$ (yaitu $A \times B$) ?

Penyelesaian:
Nyatakan pasangan terurut sebagai $(a, b)$, yang dalam hal ini $a \in A$ dan $b \in B$. Karena anggota himpunan $A$ yang mungkin menjadi elemen pertama pasangan ada 5 buah dan anggota himpunan $B$ yang mungkin menjadi elemen kedua pasangan ada 3 buah, maka banyaknya pasangan yang dapat terbentuk adalah $5 \times 3 = 15$, yang merupakan jumlah elemen himpunan hasil operasi $A \times B$ (*cartesian product*). ■

---

**Contoh 6.6**

Kursi-kursi di dalam ruang aula akan diberi nomor dengan sebuah huruf diikuti dengan bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 50 (misalnya A12, B36, dan seterusnya). Berapa jumlah maksimum kursi yang dapat dinomori?

Penyelesaian:
Ada 26 kemungkinan memilih huruf alfabet untuk nomor kursi dan 50 kemungkinan bilangan bulat positif yang dapat digunakan. Huruf alfabet dan bilangan bulat keduanya harus digunakan untuk penomoran. Jumlah penomoran kursi yang dapat dibuat adalah $26 \times 50 = 1300$. Jadi, jumlah maksimum kursi yang dinomori adalah 1300 buah. ■

---

**Contoh 6.7**

Terdapat empat rute yang dapat dilalui kendaraan dari Jakarta ke Bandung, dan tiga rute dari Bandung ke Yogya.
(a) Berapa banyak cara seseorang bepergian dengan kendaraan dari Jakarta ke Yogya melalui Bandung?
(b) Berapa banyak cara seseorang bepergian pulang-pergi dengan kendaraam dari Jakarta ke Yogya melalui Bandung?

Penyelesaian:
(a) Sesorang dari Jakarta ke Yogya harus melewati rute Jakata-Bandung dan rute Bandung-Yogya. Ada 4 pilihan rute dari Jakarta ke Bandung dan 3 pilihan rute dari Bandung ke Yogya, sehingga jumlah pilihan rute dari Jakarta ke Yogya via Bandung adalah $4 \times 3 = 12$.

(b) Ada 12 rute dari Jakarta ke Yogya via Bandung dan 12 rute dari Yogya ke Jakarta via Bandung. Karena perjalanan pulang-pergi (Jakarta-Yogya dan Yogya-Jakarta), maka jumlah pilihan rute seluruhnya adalah $12 \times 12 = 144$ cara untuk berkendaraan pulang-pergi. ■

---

## 6.3 Perluasan Kaidah Menghitung

Kaidah perkalian dan kaidah penjumlahan di atas dapat diperluas hingga mengandung lebih dari dua buah percobaan. Jika $n$ buah percobaan masing-masing mempunyai $p_1, p_2, \ldots, p_n$, hasil percobaan yang mungkin terjadi yang dalam hal ini setiap $p_i$

tidak bergantung pada pilihan sebelumnya, maka jumlah hasil percobaan yang mungkin terjadi adalah:

(a) $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ untuk kaidah perkalian.
(b) $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ untuk kaidah penjumlahan

---

**Contoh 6.8**

Jika ada sepuluh pertanyaan yang masing-masing bisa dijawab benar atau salah (B atau S), berapakah kemungkinan kombinasi jawaban yang dapat dibuat ?

Penyelesaian:
Andaikan 10 pertanyaan tersebut sebagai 10 buah kotak, masing-masing kotak hanya berisi 2 kemungkinan jawaban, B atau S:

| B/S | B/S | B/S | B/S | B/S | B/S | B/S | B/S | B/S | B/S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

Di sini kita menggunakan kaidah perkalian, karena kesepuluh kotak ini harus terisi dengan jawaban B atau S (kotak 1 dan kotak 2 dan kotak 3 dan ... dan kotak 10). Jumlah kombinasi jawaban yang dapat dibuat:

$$(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2) = 2^{10}.$$ ■

---

**Contoh 6.9**

(a) Berapa banyak jumlah kata 5-huruf yang dapat dibentuk dari huruf-huruf $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ jika tidak boleh ada huruf yang berulang di dalam kata.
(b) Berapa banyak jumlah kata 5-huruf yang dapat dibentuk dari huruf-huruf $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ jika pengulangan huruf diperblehkan.
(c) Berapa banyak jumlah kata pada jawaban soal (a) yang diawali oleh huruf $a$?
(d) Berapa banyak jumlah kata pada jawaban soal (a) yang tidak diawali oleh huruf $a$?

Penyelesaian:
(a) Andaikan posisi 5 huruf di dalam kata sebagai 5 buah kotak. Kotak pertama dapat diisi dengan salah satu dari 5 huruf (jadi, ada 5 cara). Kotak dapat diisi dengan 4 cara (karena 1 huruf sudah dipakai untuk kotak pertama). Kotak ketiga dapat diisi dengan 3 huruf (karena 2 huruf lain sudah dipakai untuk kotak pertama dan kedua). Kotak keempat dapat diisi dengan 2 cara dan kotak kelima dapat diisi dengan 1 cara.

| 5 cara | 4 cara | 3 cara | 2 cara | 1 cara |
|---|---|---|---|---|

Karena setiap kotak harus diiisi dengan 1 huruf (kotak 1 dan kotak 2 dan kotak 3 dan kotak 4 dan kotak 5), maka kita menggunakan kaidah perkalian. Jumlah kata yang dapat dibentuk adalah $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ buah.

(b) Jika pengulangan huruf dibolehkan di dalam kata, maka setiap kotak dapat diisi dengan 5 cara. Maka, jumlah kata yang dapat disusun adalah $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5 =$ 3125.

(c) Kotak 1 hanya dapat diisi dengan 1 cara (yaitu huruf $a$). Kotak kedua 4 cara (selain huruf $a$), kotak ketiga 3 cara, kotak keempat 2 cara, dan kotak kelima 1 cara. Maka, jumlah kata yang dapat disusun adalah $1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

(d) Kotak 1 hanya dapat diisi dengan 4 cara (selain huruf $a$). Kotak kedua 4 cara (1 huruf sudah dipakai untuk kotak pertama, tersisa 4 huruf, termasuk huruf $a$), kotak ketiga 3 cara, kotak keempat 2 cara, dan kotak kelima 1 cara. Maka, jumlah kata yang dapat disusun adalah $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$. Kita juga dapat menyelesaikan soal (d) ini dengan melihat bahwa jumlah kata yang tidak diawali oleh huruf $a$ adalah jumlah semua kata dikurangi dengan jumlah kata yang diawali oleh huruf $a$, yaitu jawaban (a) dikurangi dengan jawaban (c), $120 - 24 = 96$. ■

---

**Contoh 6.10**

Berapa Perpustakaan memiliki 6 buah buku berbahasa Inggris, 8 buah buku berbahasa Perancis, dan 10 buah buku berbahasa Jerman. Masing-masing buku berbeda judulnya. Berapa jumlah cara memilih (a) 3 buah buku, masing-masing dari tiap bahasa berbeda, dan (b) 1 buah buku (sembarang bahasa).

Penyelesaian:
(a) Jumlah cara memilih 3 buah buku, masing-masing dari tiap bahasa adalah (6)(8)(10) = 480 cara.
(b) Jumlah cara memilih 1 buah buku (sembarang bahasa) = 6 + 8 + 10 = 24 cara. ■

---

**Contoh 6.11**

Berapa banyak bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 (termasuk 1000 dan 9999 itu sendiri) yang (i) semua angkanya berbeda, dan (ii) boleh ada angka yang berulang.

Penyelesaian:
(i) Karena yang diminta adalah bilangan ganjil, kita harus memulai dari angka satuan terlebih dahulu, baru kemudian dari angka ribuan, ratusan, dan puluhan).

untuk posisi satuan: ada 5 kemungkinan angka (yaitu 1, 3, 5, 7 dan 9);
untuk posisi ribuan: ada 8 kemungkinan angka (yaitu 1 sampai 9, kecuali yang sudah dipakai untuk angka satuan);
untuk posisi ratusan: ada 8 kemungkinan angka (yaitu 0 sampai 9, kecuali dua angka yang sudah dipakai untuk angka satuan dan angka ribuan);
untuk posisi puluhan: ada 7 kemungkinan angka (yaitu 0 sampai 9, kecuali tiga angka yang sudah dipakai untuk angka satuan dan angka ribuan);

Banyak bilangan ganjil seluruhnya = (5)(8)(8)(7) = 2240 buah.

(ii) Jika perulangan angka dibolehkan, maka untuk posisi satuan tetap ada 5 kemungkinan angka, untuk posisi ribuan ada 9 kemungkinan angka (1 sampai 9), untuk posisi ratusan ada 10 kemungkinan (0 sampai 9), dan untuk posisi puluhan ada 10 kemungkinan (0 sampai 9). Banyak bilangan ganjil seluruhnya adalah (5)(9)(10)(10) = 4500 buah. ■

---

**Contoh 6.12**

[ROS99]. Berapa nilai $k$ sesudah kode program Pascal berikut dieksekusi?

```
k := 0
for p1 := 1 to n1 do
  k := k + 1;
for p2 := 1 to n2 do
  k := k + 1;
⋮
for pm := 1 to nm do
  k := k + 1;
```

<u>Penyelesaian</u>:
Program di atas memiliki $m$ buah kalang (pengulangan) *for*. Setiap kalang ke-$i$ ($i$ = 1, 2, …, $m$) dieksekusi sebanyak $n_i$ kali. Pada setiap kalang, nilai $k$ selalu ditambah 1 (nilai $k$ pada awalnya 0). Karena setiap kalang dilaksanakan tidak secara bersamaan, maka nilai $k$ dapat dihitung dengan kaidah penjumlahan. Nilai $k$ di akhir program sama dengan berapa kali seluruh kalang dieksekusi. Jadi, $k = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$. ■

---

**Contoh 6.13**

[ROS99]. Berapa nilai $k$ sesudah kode program Pascal berikut dieksekusi?

```
k := 0
for p1 : =1 to n1 do
   for p2 := 1 to n2 do
     ⋮
      for pm:=1 to nm do
         k := k + 1;
```

<u>Penyelesaian</u>:
Program di atas memiliki $m$ buah kalang (pengulangan) *for-do* bersarang (*nested*). Setiap kalang ke-$i$ ($i$ = 1, 2, …, $m$) dieksekusi sebanyak $n_i$ kali. Pada setiap kalang, nilai $k$ selalu ditambah 1 (nilai $k$ pada awalnya 0). Karena setiap kalang dilaksanakan secara bersamaan, maka nilai $k$ dapat dihitung dengan kaidah perkalian. Nilai $k$ di akhir program sama dengan berapa kali seluruh kalang dieksekusi. Jadi, $k = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_m$. ■

---

**Contoh 6.14**

Salah satu terapan kombinatorial adalah dalam bidang kriptografi. Misalnya pesan-jelas (*plaintext*) "Informatika" dengan menggunakan algoritma kriptografi tertentu disandikan menjadi pesan-tersandi (*chipertext*) "%r$ht&90dt". Melalui proses yang berkebalikan, pesan-tersandi dapat dikembalikan menjadi pesan-jelas. Algoritma kriptografi *DES* (*Data Encryption Standard*) menggunakan kunci (*key*) untuk menyandikan pesan yang akan dikirim melalui saluran komunikasi. Panjang kunci *DES* adalah delapan karakter atau 64 bit. Orang yang ingin memecahkan pesan-tersandi (*chipertext*) menjadi pesan-jelas (*plaintext*) harus mencoba seluruh kemungkinan kunci yang panjangnya 64 bit itu. Berapa banyak kemungkinan kunci yang harus dicoba untuk memecahkan *chipertext*?

Penyelesaian:
Karena ada 64 posisi pengisian bit yang masing-masing memiliki dua kemungkinan nilai, 0 atau 1, maka jumlah kombinasi kunci yang harus dicoba adalah:

$$(2)(2)(2)(2)(2) \ldots (2)(2) \text{ (sebanyak 64 kali)} = 2^{64} = 18.446.744.073.709.551.616$$

Andaikan tersedia komputer dengan sejuta prosesor paralel yang dapat mencoba satu juta kunci setiap detik untuk memecahkan *chipertext*, maka dibutuhkan waktu sekitar 584.942 tahun untuk mencoba seluruh kemungkinan kunci (*brute force attack*). Inilah yang merupakan kekuatan algoritma DES, yaitu terletak pada usaha yang sangat sulit untuk menemukan kunci kriptografi. ■

Beberapa persoalan kombinatorial yang lebih kompleks dapat diselesaikan dengan menggunakan kaidah dasar menghitung di atas. Beberapa persoalan tidak dapat diselesaikan dengan satu kaidah saja, tetapi kita harus menggunakan dua kaidah sekaligus. Kedua hal ini diilustrasikan pada Contoh 6.15 sampai Contoh 6.17 berikut.

**Contoh 6.15**

Suatu bilangan dibentuk dari angka-angka 2, 3, 4, 5, 7, 8, dan 9. Misalkan pengulangan angka tidak dibolehkan. Berapa banyak bilangan 4-angka yang kurang dari 5000 namun habis dibagi 5 yang dapat dibentuk dari angka-angka tersebut? ■

Penyelesaian:
Ada 4 angka bilangan yang akan dibentuk: _ _ _ _

Karena disyaratkan bilangan kelipatan 5, maka angka paling kanan hanya dapat diisi dengan angka 5 saja (satu cara).
Angka posisi ke-1 dapat diisi dengan 3 cara (yaitu 2, 3, dan 4).
Angka posisi ke-2 dapat diisi dengan 5 cara (2 angka lain sudah dipakai untuk posisi ke-1 dan ke-4).
Angka posisi ke-3 dapat diisi dengan 4 cara (3 angka lain sudah dipakai untuk posisi ke-1, ke-2 dan ke-4).
Karena seluruh posisi angka harus terisi, maka kita menggunakan kaidah perkalian untuk menghitung jumlah bilangan bulat yang dapat dibentuk, yaitu $3 \times 5 \times 4 \times 1 = 60$ buah.

■

**Contoh 6.16**

Lihat kembali contoh ilustrasi pada awal bab ini. Sandi-lewat (*password*) pada sistem komputer panjangnya enam sampai delapan karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf atau angka; huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan. Berapa banyak sandi-lewat yang dapat dibuat?

Penyelesaian:
Banyaknya huruf alfabet adalah 26 (A-Z) dan banyak angka desimal adalah 10 (0-9), jadi seluruhnya 36 karakter. Masing-masing huruf atau angka dapat menjadi pilihan untuk posisi karakter di dalam *password.*

Untuk sandi-lewat dengan panjang 6 karakter, jumlah kemungkinan sandi-lewat adalah

$$(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^6 = 2.176.782.336$$

untuk sandi-lewat dengan panjang 7 karakter, jumlah kemungkinan sandi-lewat adalah

$$(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^7 = 78.364.164.096$$

dan untuk sandi-lewat dengan panjang 8 karakter, jumlah kemungkinan sandi-lewat adalah

$$(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^8 = 2.821.109.907.456$$

Dengan menggunakan kaidah penjumlahan, jumlah seluruh sandi-lewat adalah 2.176.782.336 + 78.364.164.096 + 2.821.109.907.456 = 2.901.650.833.888 buah. ■

**Contoh 6.17**

Lihat kembali contoh ilustrasi pada awal bab ini. Misalkan nomor plat mobil di negara $X$ terdiri atas 5 angka angka diikuti dengan 2 huruf. Angka pertama tidak boleh 0. Berapa banyak nomor plat mobil yang dapat dibuat?

Penyelesaian:
Ada 7 karakter di dalam susunan plat mobil (5 angka dan 2 huruf): _ _ _ _ _ _
Perhatikan bahwa huruf dan angka boleh digunakan berulang (asumsi ini kita ambil kecuali jika disebutkan secara khusus bahwa pengulangan tidak dibolehkan). Ada 9 pilihan angka untuk mengisi karakter pertama (karena 0 tidak dibolehkan). Karakter kedua dapat diisi dengan 10 pilihan angka (0 diperbolehkan). Karakter ketiga 10 pilihan angka. Karakter keempat 10, dan karakter kelima 10 pilihan angka. Karakter keenam dapat diisi dengan 26 pilihan huruf, dan karakter ketujuh dapat diisi dengan 26 kemungkinan huruf. Jumlah nomor plat mobil yang dapat dibuat adalah $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 = 60.840.000$ buah. ■

## 6.4 Prinsip Inklusi-Eksklusi

Sekarang kita akan melihat contoh penggunaan prinsip inklusi-eksklusi untuk menghitung kombinatorial. Seperti kita ketahui informasi terkecil yang dapat disimpan di dalam memori komputer adalah *byte*. Setiap *byte* disusun oleh 8-bit. Berapa banyak jumlah *byte* yang dimulai dengan '11' atau berakhir dengan '11'? Penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

Misalkan

$A$ = himpunan *byte* yang dimulai dengan '11',
$B$ = himpunan *byte* yang diakhiri dengan '11'
$A \cap B$ = himpunan *byte* yang berawal dan berakhir dengan '11'

maka

$A \cup B$ = himpunan *byte* yang berawal dengan '11' atau berakhir dengan '11'

Jumlah *byte* yang dimulai dengan '11' adalah $2^6 = 64$ buah, karena 2 posisi pertama sudah diisi dengan '11', sehingga kita cukup mengisi 6 posisi bit sisanya. Jadi $|A| = 64$.

Dengan cara yang sama, jumlah *byte* yang diakhiri dengan '11' adalah $2^6 = 64$ buah. Jadi, $|B| = 64$.

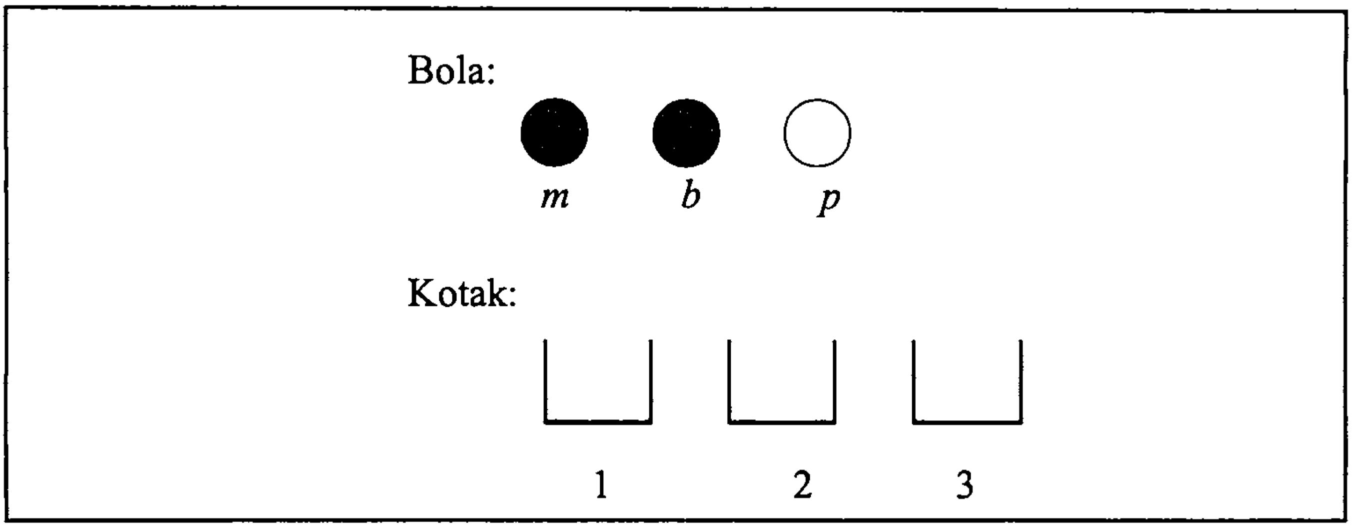
Jumlah *byte* yang berawal dan berakhir dengan '11'ada $2^4 = 16$ buah, karena 2 posisi pertama dan 2 posisi terakhir sudah diisi dengan '11', sehingga kita tinggal mengisi 4 posisi bit di tengah saja. Jadi, $|A \cap B| = 16$.

Dengan menggunakan prinsip inklusi-eksklusi, maka jumlah *byte* yang dimulai dengan '11' atau berakhir dengan '11' adalah sebanyak

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2^6 + 2^6 - 16 = 64 + 64 - 16 = 112 \text{ buah.}$$

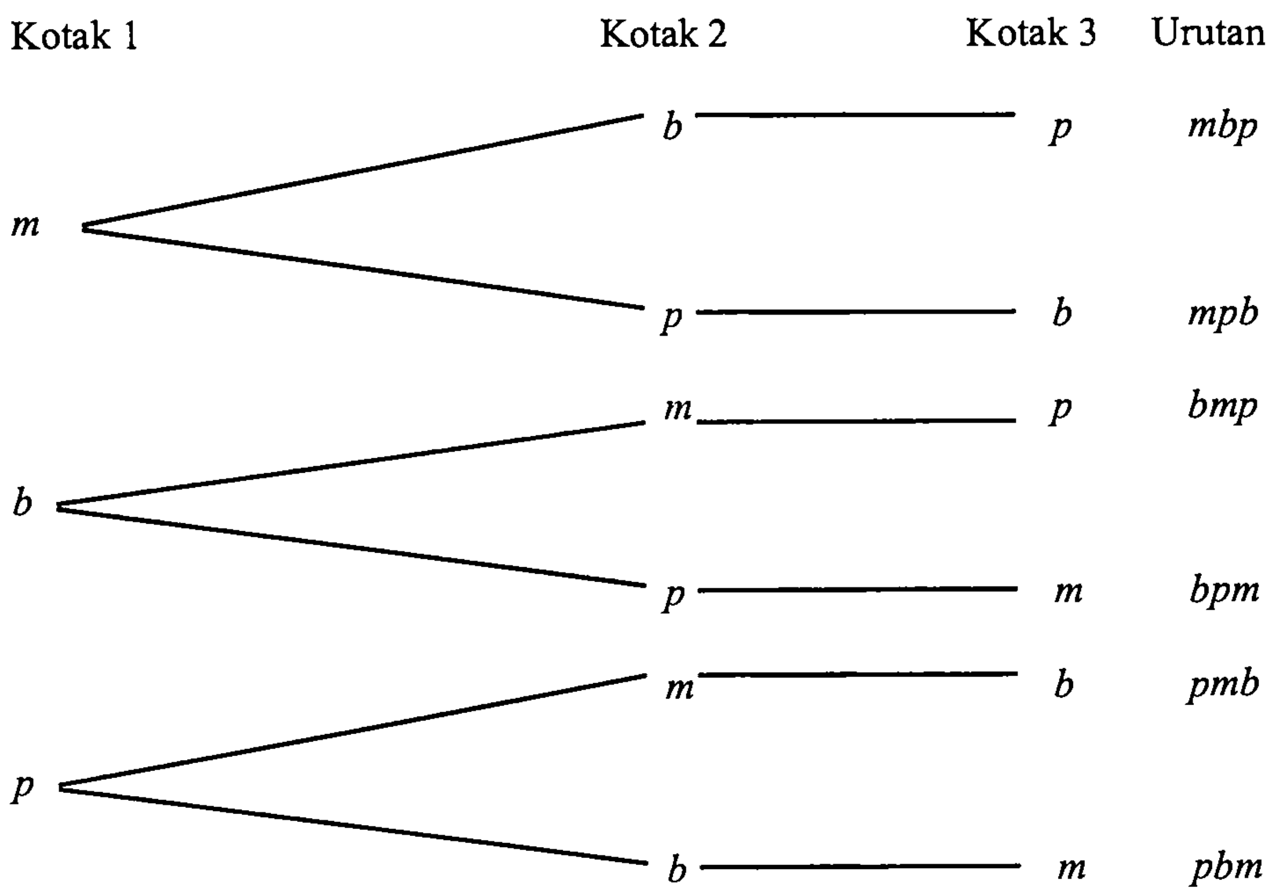
## 6.5 Permutasi

Misalkan ada tiga buah bola yang berbeda warnanya, yaitu merah ($m$), biru ($b$), dan putih ($p$). Kita akan memasukkan ketiga buah bola itu ke dalam tiga buah kotak, masing-masing kotak 1 buah bola (Gambar 6.1). Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?




Gambar 6.1 Ilustrasi untuk menjelaskan permutasi

Misalkan urutan itu kita simbolkan $xyz$. Urutan pertama ($x$) mungkin ditempati oleh salah satu dari 3 buah bola, urutan kedua ($y$) mungkin ditempati oleh salah satu dari 2 buah bola (karena 1 bola lagi sudah dipakai untuk $x$), dan urutan ketiga ($z$) ditempati oleh 1 buah bola yang tersisa, sehingga jumlah kemungkinan urutan berbeda dari penempatan bola ke dalam kotak adalah $(3)(2)(1) = 3! = 6$.
Perhatikan diagram berikut:




Dari diagram di atas terlihat bahwa kemungkinan urutan berbeda dari penempatan bola ke dalam tiga buah kotak ada enam buah, yaitu *mbp*, *mpb*, *bmp*, *bpm*, *pmb*, dan *pbm*. Semua urutan berbeda tersebut dinamakan **permutasi**.

**DEFINISI 6.1.** Permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek-objek.

Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi aturan perkalian. Misalkan jumlah objek adalah $n$, maka urutan pertama dipilih dari $n$ objek, urutan kedua dipilih dari $n - 1$ objek, urutan ketiga dipilih dari $n - 2$ objek, begitu seterusnya, dan urutan terakhir dipilih dari 1 objek yang tersisa. Menurut kaidah perkalian, permutasi dari $n$ objek adalah

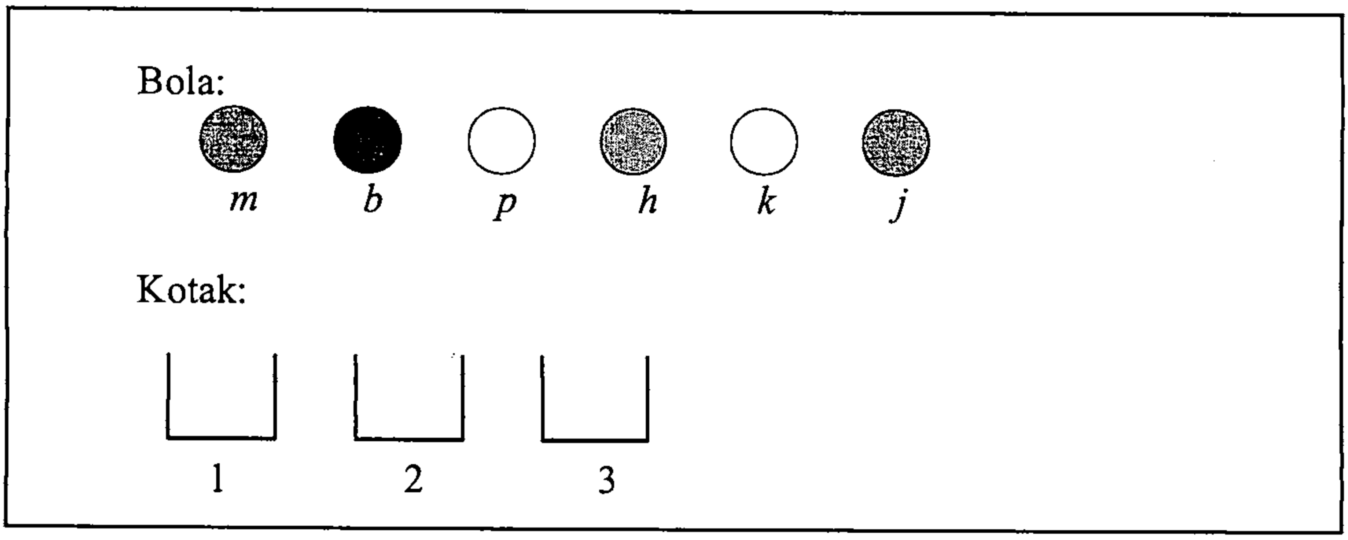
$$n(n-1)(n-2)\ldots(2)(1) = n! \qquad (6.1)$$

Sekarang misalkan ada enam buah bola yang berbeda warnanya, yaitu merah ($m$), biru ($b$), putih ($p$), hijau ($h$), kuning ($k$), dan jingga ($j$). Kita akan memasukkan keenam buah bola itu ke dalam tiga buah kotak, masing-masing kotak hanya boleh diisi 1 buah bola (Gambar 6.2). Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?

Perhitungannya adalah sebagai berikut:

kotak 1 dapat diisi oleh salah satu dari 6 bola (ada 6 pilihan);
kotak 2 dapat diisi oleh salah satu dari 5 bola (ada 5 pilihan);
kotak 3 dapat diisi oleh salah satu dari 4 bola (ada 4 pilihan).

Menurut kaidah perkalian, jumlah urutan berbeda dari penempatan bola = (6)(5)(4) = 120 buah[1].




**Gambar 6.2** Ilustrasi untuk menjelaskan permutasi-$r$. Ada 6 buah bola dan 3 buah kotak, tiap kotak akan diisi dengan 1 buah bola.

[1] Jika jumlah kotak lebih banyak daripada jumlah bola, maka cara penyelesaiannya tetap sama. Misalkan 3 buah bola berbeda akan dimasukkan ke dalam 6 buah kotak, tiap kotak paling banyak hanya boleh berisi 1 buah bola. Ada 6 pilihan kotak untuk memasukkan bola ke-1, 5 pilihan kotak untuk memasukkan bola ke-2, dan 4 pilihan kotak untuk memasukkan bola ke-3. Menurut kaidah perkalian, ada (6)(5)(4) = 120 cara untuk memasukkan 3 buah bola berbeda ke dalam 6 buah kotak.

Jika contoh tadi kita rampatkan sedemikian hingga ada $n$ buah bola yang berbeda warnanya dan $r$ buah kotak ($r \leq n$), maka

kotak ke-1 dapat diisi oleh salah satu dari $n$ bola (ada $n$ pilihan) ;
kotak ke-2 dapat diisi oleh salah satu dari $(n - 1)$ bola (ada $n - 1$ pilihan);
kotak ke-3 dapat diisi oleh salah satu dari $(n - 2)$ bola (ada $n - 2$) pilihan;
$\vdots$
kotak ke-$r$ dapat diisi oleh salah satu dari $(n - (r - 1))$ bola (ada $n - r + 1$ pilihan);

Menurut kaidah perkalian, jumlah urutan berbeda dari penempatan bola adalah

$$n(n - 1)(n - 2)\ldots(n - (r - 1))$$

Masalah yang mirip dengan memasukkan bola ke dalam kotak adalah menyusun $r$ objek yang dipilih dari $n$ objek berbeda. Misalnya, dari himpunan $A = \{a, b, c\}$, kita dapat membentuk 6 buah susunan 2-elemen yang dipilih dari himpunan $A$, yaitu *ab*, *ac*, *ba*, *bc*, *ca*, dan *cb*. Untuk menyusun $r$ objek yang dipilih dari $n$ objek berbeda, kita menganalogikan $r$ buah posisi dengan $r$ buah kotak, yang setiap posisi akan diisi dengan salah satu dari $n$ objek berbeda (dianalalogikan dengan $n$ buah bola yang berbeda ):

posisi ke-1 dapat diisi oleh salah satu dari $n$ objek (ada $n$ pilihan);
posisi ke-2 dapat diisi oleh salah satu dari $(n - 1)$ objek (ada $n - 1$ pilihan);
posisi ke-3 dapat diisi oleh salah satu dari $(n - 2)$ objek (ada $n - 2$ pilihan);
$\vdots$
posisi ke-$r$ dapat diisi oleh salah satu dari $(n - (r - 1))$ objek (ada $n - r + 1$ pilihan);

Menurut kaidah perkalian, ada sebanyak

$$n(n - 1)(n - 2)\ldots(n - (r - 1))$$

buah susunan berbeda dari penyusunan $r$ objek yang dipilih dari $n$ objek. Jumlah susunan berbeda dari pemilihan $r$ objek yang diambil dari $n$ objek disebut *permutasi-r*, dilambangkan dengan $P(n, r)$, yaitu

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)...(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (6.2)$$

Menurut persamaan (6.2) ini, jumlah cara memasukkan 6 buah bola yang berbeda warnanya ke dalam 3 buah kotak adalah $P(6, 3) = 6!/(6 - 3)! = 120$, dan jumlah kemungkinan urutan 2 dari 3 elemen himpunan $A = \{a, b, c\}$ adalah $P(3, 2) = 3!/ (3 - 2)! = 6$.

**DEFINISI 6.2.** Permutasi $r$ dari $n$ objek adalah jumlah kemungkinan urutan $r$ buah objek yang dipilih dari $n$ buah objek, dengan $r \leq n$, yang dalam hal ini, pada setiap kemungkinan urutan tidak ada objek yang sama.

Perhatikanlah bahwa bila $r = n$, maka persamaan (6.2) menjadi sama dengan (6.1), yaitu

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

---

**Contoh 6.18**

Buktikan dengan induksi matematik bahwa jumlah permutasi $r$ elemen yang diambil dari himpunan $n$ elemen, $P(n, r)$, dapat dihitung dengan rumus $n!/(n-r)!$.

Penyelesaian:
Kita dapat membuktikan pernyatan ini dengan melakukan induksi terhadap $n$. Untuk $n \geq 0$, misalkan $p(n)$ adalah pernyataan "$P(n, r) = n!/(n - r)!$ untuk $r = 0, 1, \ldots$

*Basis induksi.*
Untuk $n = 0$, $P(0, 0)$ adalah jumlah cara memilih 0 buah elemen dari himpunan kosong = $0!/0! = 1$, yang jelas benar.

*Langkah induksi.*
Asumsikan bahwa $p(n)$ benar, yaitu mengasumsikan bahwa $P(n, r) = n!/(n - r)!$ untuk $r = 0, 1, \ldots$. Kita tinggal membuktikan bahwa $p(n + 1) \equiv P(n + 1, r) = \dfrac{(n+1)!}{(n+1-r)!}$ juga benar. Untuk menunjukkan hal ini, ada dua kasus yang harus dipertimbangkan.

Kasus 1:
jika $r = 0$, maka ada satu cara memilih memilih 0 buah elemen dari himpunan $(n + 1)$ elemen, dan di sini

$P(n + 1, 0) = (n + 1)!/(n + 1 - 0)! = 1$, yang jelas benar.

Kasus 2:
jika $r > 0$. Di sini kita menghitung nilai $P(n + 1, r)$ dengan (i) menghitung jumlah cara memilih elemen pertama di dalam susunan yang diambil, dan (ii) kemudian menghitung jumlah cara mengambil $r-1$ elemen dengan menggunakan hipotesis induksi. Ada $(n + 1)$ cara memilih untuk elemen pertama. Karena tinggal $n$ buah elemen yang belum diambil untuk mengisi $r - 1$ posisi lainnya, maka ada $P(n, r - 1)$ cara melengkapi $r - 1$ posisi itu. Dengan aturan perkalian, maka

$$\begin{aligned} P(n + 1, r) &= (n + 1)\, P(n, r - 1) \\ &= \frac{(n+1)n!}{(n-(r-1))!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!} \end{aligned}$$ ■

---

**Contoh 6.19**

Berapa banyak "kata" yang terbentuk dari kata "BOSAN"?

Penyelesaian:
Anggap setiap huruf di dalam kata "BOSAN' sebagai bola yang berbeda warnanya, dan 5 buah kotak yang akan diisi dengan 1 bola pada setiap kotak.
Cara 1: (5)(4)(3)(2)(1) = 120 buah kata
Cara 2: $P(5, 5) = 5! = 120$ buah kata ∎

**Contoh 6.20**

Berapa banyak cara mengurutkan nama 25 orang mahasiswa?

Penyelesaian:
Analogikan dengan mengisi 25 kotak dengan 25 bolahuruf berbeda, setiap kotak diisi dengan 1 bola. Jadi, jumlah cara pengurutan nama maahsiswa sama dengan jumlah susunan 25 bola ke dalam 25 kotak, yaitu $P(25, 25) = 25!$ ∎

**Contoh 6.21**

Tiga buah ujian dilakukan dalam suatu periode enam hari (Senin sampai Sabtu). Berapa banyak pengaturan jadwal yang dapat dilakukan sehingga tidak ada dua ujian atau lebih yang dilakukan pada hari yang sama.

Penyelesaian:
Cara 1 (dengan kaidah perkalian): sama seperti menempatkan 3 bola (ujian) berbeda ke dalam enam kotak (hari).

ujian pertama dapat ditempatkan pada salah satu dari enam hari;
ujian kedua dapat ditempatkan pada salah satu dari lima hari;
ujian ketiga dapat ditempatkan pada salah satu dari empat hari;
Jumlah pengaturan jadwal ujian = (6)(5)(4) = 120

Cara 2 (dengan rumus permutasi): $P(6, 3) = 6! / (6 - 3)! = 120$ ∎

**Contoh 6.22**

Sebuah bioskop mempunyai jajaran kursi yang disusun per baris. Tiap baris terdiri dari 6 tempat kursi. Jika dua orang akan duduk, berapa banyak pengaturan tempat duduk yang mungkin pada suatu baris?

Penyelesaian:
Orang pertama mempunyai 6 pilihan kursi, dan orang kedua mempunyai 5 pilihan kursi. Jadi, jumlah pengaturan tempat duduk = (6)(5) = 30 atau $P(6, 2) = 6! / 4! = (6)(5) = 30$ cara. ∎

**Contoh 6.23**

Berapa banyak *string* yang dapat dibentuk yang terdiri dari 4 huruf berbeda dan diikuti dengan 3 angka yang berbeda pula?

Penyelesaian:
Ada $P(26, 4)$ cara mengisi posisi 4 huruf dan $P(10, 3)$ cara untuk mengisi posisi 3 buah angka. Karena *string* disusun oleh 4 huruf dan 3 angka, maka jumlah *string* yang dapat dibuat adalah $P(26, 4) \times P(10,3) = 258.336.000$ ■

---

**Contoh 6.24**

Berapa banyak cara penyusunan 15-*puzzle* seperti contoh di bawah ini?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | |

Penyelesaian:
Cara 1: $P(16,15) \rightarrow$ salah, karena sel kosong tidak dianggap sebagai sebuah objek berbeda dari yang lain.

$P(16,16) = 16! \rightarrow$ betul

Cara 2: Posisi ubin pertama dapat diisi dengan salah satu dari 15 angka atau 1 ubin kosong (16 cara)

Posisi ubin kedua dapat diisi dengan salah satu dari 14 angka atau 1 ubin kosong (15 cara)

Posisi ubin ketiga dapat diisi dengan salah satu dari 13 angka atau 1 ubin kosong (14 cara)

...

Posisi ubin ke-16 dapat disi dengan yang tersisa (1 cara)

Jumlah cara penyusunan = $(16)(15)(14)(13)\ldots(2)(1) = 16!$ cara ■

Dari contoh-contoh di atas dapat dilihat bahwa permutasi merupakan suatu bagian dari kaidah perkalian, yaitu untuk kasus bahwa tidak ada elemen yang berulang. Jika pada persoalan diizinkan munculnya sebuah elemen lebih dari satu kali, maka persoalan tersebut tidak dapat diselesaikan dengan cara permutasi, tetapi masih dapat diselesaikan dengan memanfaatkan kaidah perkalian. Contoh-contoh berikut memperlihatkan penggunaan permutasi dan jika tidak mungkin, mengunakan kaidah perkalian.

---

**Contoh 6.25**

Berapakah jumlah kemungkinan membentuk 3 angka dari 5 angka berikut: 1, 2, 3, 4 , 5, jika:
(a) tidak boleh ada pengulangan angka, dan
(b) boleh ada pengulangan angka.

Penyelesaian:

(a) Ada 3 posisi yang akan dipilih dari 5 angka. Posisi pertama dapat diisi oleh salah satu dari 5 angka, posisi kedua oleh salah satu dari 4 angka, dan posisi ketiga oleh salah satu dari 3 angka. Sehingga, jumlah urutan 3-angka yang dapat dibentuk adalah (5)(4)(3) = 120 buah, atau dengan rumus permutasi $P(5, 3) = 5!/(5-3)! = 120$

(b) Persoalan ini tidak dapat diselesaikan dengan rumus permutasi, tetapi masih dapat diselesaikan dengan kaidah perkalian. Posisi pertama dapat diisi dengan salah satu dari 5 angka (5 cara), posisi kedua juga 5 cara (karena boleh sama dengan angka pada posisi pertama), posisi ketiga juga 5 cara. Sehingga jumlah urutan 3-angka yang dapat dibentuk adalah $(5)(5)(5) = 5^3 = 125$. ■

---

**Contoh 6.26**

Berapakah banyak *string* yang dibentuk dari permutasi huruf-huruf pada kata "*sarung*" sedemikian sehingga huruf-huruf vokal terletak pada posisi saling bersebelahan?

Penyelesaian:

Huruf vokal di dalam kata "*sarung*" adalah *u* dan *a*. Yang ditanyakan adalah jumlah *string* yang mengandung *au* atau *ua*. Karena *au* atau *ua* harus muncul dalam satu blok, maka kita harus menghitung jumlah permutasi blok *au* atau *ua* dengan huruf-huruf *s*, *r*, *n*, dan g. Untuk *au*, *s*, *r*, *n*, dan g, jumlah kata yang dapat dibentuk adalah $P(5, 5) = 5!$, dan Untuk *ua*, *s*, *r*, *n*, dan g, jumlah kata yang dapat dibentuk adalah $P(5, 5) = 5$. Jumlah kata seluruhnya adalah $5! + 5! = 240$. ■

---

## Permutasi Melingkar

Misalkan ada 10 orang yang duduk pada satu barisan kursi yang terdiri dari 10 kursi. Menurut rumus permutasi, ada sebanyak $P(10, 10) = 10!$ cara pengaturan tenpat duduk bagi 10 orang tersebut. Sekarang, misalkan mereka disuruh duduk mengelilingi meja melingkar. Berapa banyak cara pengaturan tempat duduk bagi mereka tersebut? Satu orang dapat duduk pada tempat duduk mana saja. Sembilan orang lainnya dapat duduk dalam $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 9!$ cara. Meskipun orang pertama dapat memilih tempat duduk mana saja, namun susunan tempat duduk yang dihasilkan oleh 9 orang lainnya tetap sama. Ini dinamakan **permutasi melingkar** yang didefinisikan sebagai berikut:

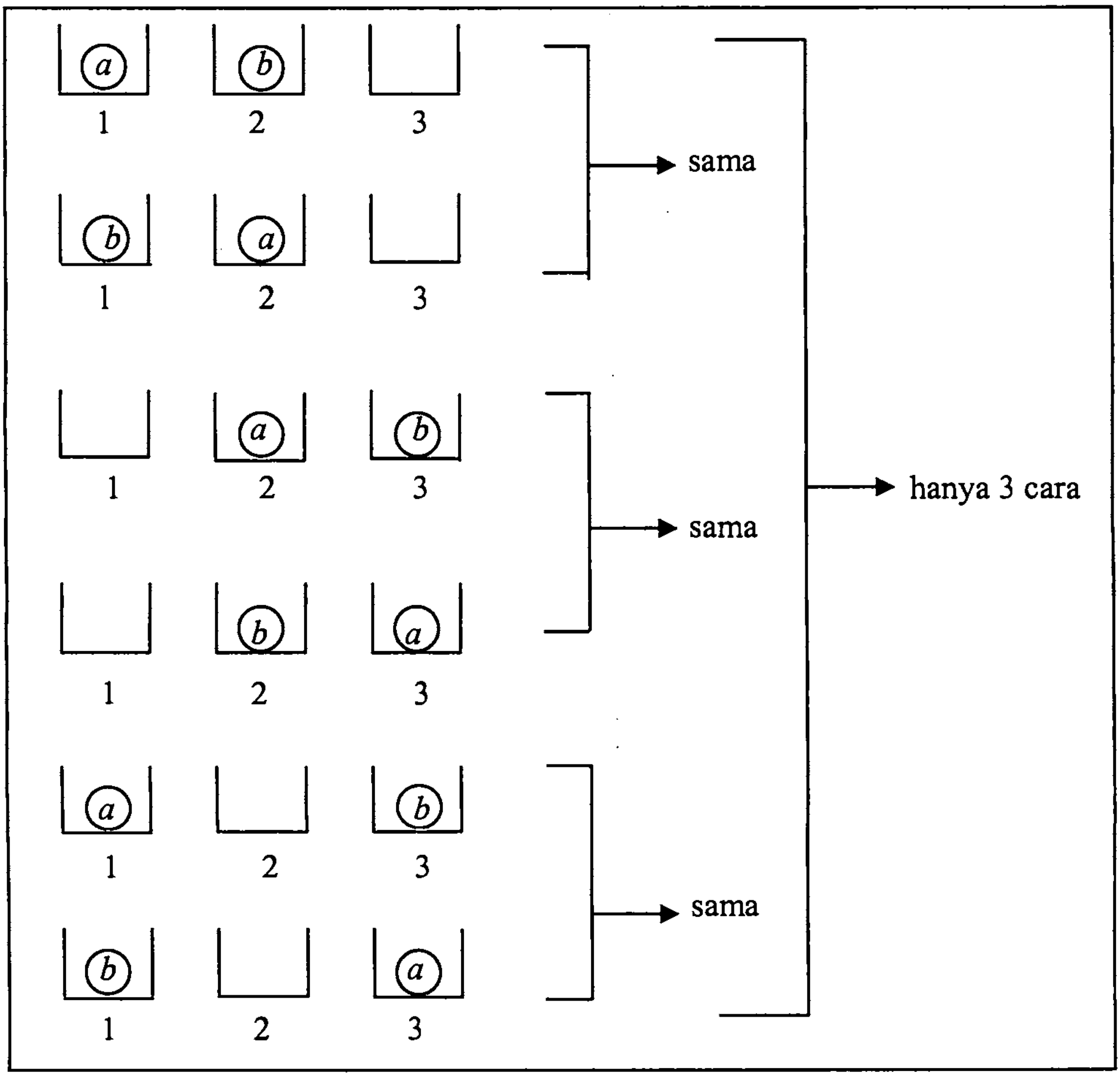
**DEFINISI 6.3.** Permutasi melingkar dari *n* objek adalah penyusunan objek-objek yang mengelilingi sebuah lingkaran (atau kurva tertutup sederhana). Jumlah susunan objek yang mengelilingi lingkaran adalah $(n-1)!$.

Pembuktian permutasi melingkar cukup sederhana: objek pertama dapat ditempatkan di mana saja pada lingkaran dengan 1 cara. Sisa $n - 1$ objek lainnya dapat diatur searah jarum jam (misalnya) dengan $P(n-1, n-1) = (n-1)!$ cara.

# 6.6 Kombinasi

Bentuk khusus dari permutasi adalah kombinasi. Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi, urutan kemunculan diabaikan. Urutan *acb*, *bca*, dan *acb* dianggap sama dan dihitung sekali.

Misalkan ada 2 buah bola yang warnanya sama, misalnya merah semua (untuk membedakan masing-masing bola, kita namakan bola *a* dan bola *b*), dan 3 buah kotak. Kita ingin memasukkan bola ke dalam kotak, setiap kotak hanya boleh berisi paling banyak 1 bola. Gambar 6.3 mengilustrasikan penempatan bola ke dalam kotak. Hasil akhir penempatan bola *a* ke kotak 1 dan bola *b* ke kotak 2 sama saja dengan hasil akhir penempatan bola *b* ke kotak 1 dan bola *a* ke kotak 2. Susunan yang diperoleh hanya dihitung sekali (1 cara). Hal yang sama juga dihitung pada waktu menempatkan bola *a* dan *b* ke kotak 2 dan 3, dan menempatkan bola *a* dan *b* ke kotak 1 dan 3.




**Gambar 6.3** Ilustrasi untuk menjelaskan kombinasi-*r*

Jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak = $\frac{P(3,2)}{2} = \frac{P(3,2)}{2!} = \frac{\frac{3!}{1!}}{2!} = \frac{(3)(2)}{2} = 3.$

Sekarang bila jumlah bola 3 dan jumlah kotak 10, maka jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak adalah $\frac{P(10,3)}{3!} = \frac{\frac{10!}{7!}}{3!} = \frac{(10)(9)(8)}{3!}$ karena ada 3! cara memasukkan bola yang warnanya merah semua.

Secara umum, jumlah cara memasukkan $r$ buah bola yang berwarna sama ke dalam $n$ buah kotak adalah

$$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-(r-1))}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Rumus $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ disebut rumus **kombinasi-*r***, dan dilambangkan dengan $C(n, r)$ atau $\binom{n}{r}$.

Jadi,

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{6.3}$$

$C(n, r)$ sering dibaca "$n$ diambil $r$", artinya $r$ objek diambil dari $n$ buah objek.

**DEFINISI 6.4.** Kombinasi $r$ elemen dari $n$ elemen adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut $r$ elemen yang diambil dari $n$ buah elemen.

Persamaan (6.3) dapat juga dibuktikan dengan cara membentuk permutasi-$r$ dari $n$ elemen. Mula-mula hitung kombinasi-$r$, yaitu $C(n, r)$, kemudian urutkan elemen-elemen di dalam setiap kombinasi-$r$. Pengurutan ini dapat dilakukan dengan $P(r, r)$ cara. Dengan demikian, permutasi-$r$ dari $n$ elemen adalah

$$P(n, r) = C(n, r)\, P(r, r)$$

Dari persamaan di atas kita peroleh

$$C(n, r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{n!/(n-r)!}{r!(r-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

## Interpretasi Kombinasi

1. Persoalan kombinasi, $C(n, r)$, sama dengan menghitung banyaknya himpunan bagian yang terdiri dari $r$ elemen yang dapat dibentuk dari himpunan dengan $n$ elemen. Dua atau lebih himpunan bagian dengan elemen-elemen yang sama dianggap sebagai himpunan yang sama, meskipun urutan elemen-elemennya berbeda.

   Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$
   Jumlah Himpunan bagian dengan 2 elemen yang dapat dibentuk dari himpunan $A$ ada 3 buah, yaitu:

   $$\left.\begin{array}{l} \{1, 2\} = \{2, 1\} \\ \{1, 3\} = \{3, 1\} \\ \{2, 3\} = \{3, 2\} \end{array}\right\rangle \quad 3 \text{ buah}$$

   atau $\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3!}{1!2!} = 3$ buah

2. Persoalan kombinasi, $C(n, r)$, dapat dipandang sebagai cara memilih $r$ buah elemen dari $n$ buah elemen yang ada, tetapi urutan elemen di dalam susunan hasil pemilihan tidak penting.

   Sebagai contoh, misalkan sebuah klub memiliki 25 orang anggota. Kita akan memilih lima orang sebagai panitia. Panitia atau komite adalah kelompok yang tidak terurut, artinya setiap anggota di dalam panitia kedudukannya sama. Misalnya jika ada lima orang yang dipilih, $A$, $B$, $C$, $D$, dan $E$, maka urutan penempatan masing-masingnya di dalam panitia tidak penting (*ABCDE* sama saja dengan *BACED*, *ADCEB*, dan seterusnya). Banyaknya cara memilih anggota panitia yang terdiri dari 5 orang anggota adalah $C(25,5) = 53130$ cara.

Contoh 6.27 sampai 6.35 berikut ini dapat menggambarkan persoalan-persoalan yang diselesaikan dengan rumus kombinasi.

---

**Contoh 6.27**

Ada berapa cara kita dapat memilih 3 dari 4 elemen himpunan $A = \{a, b, c, d\}$?

Penyelesaian:
Ini adalah persoalan kombinasi karena urutan kemunculan ketiga elemen tersebut tidak penting.

Perhatikan tabel berikut:

| **Himpunan bagian $A$ dengan 3 elemen** | **Permutasi setiap himpunan bagian** |
|---|---|
| $\{a, b, c\}$ | *abc*, *acb*, *bca*, *bac*, *cab*, *cba* |
| $\{a, b, d\}$ | *abd*, *adb*, *bda*, *bad*, *dab*, *dba* |
| $\{a, c, d\}$ | *acd*, *adc*, *cda*, *cad*, *dac*, *dca* |
| $\{b, c, d\}$ | *bcd*, *bdc*, *cdb*, *cbd*, *dbc*, *dcb* |

Untuk setiap 3 elemen ada $3! = 6$ urutan yang berbeda (permutasi).

Jadi, jumlah cara memilih 3 dari 4 elemen himpunan adalah $C(4, 3) = \dfrac{4!}{3!(4-3)!} = 4$, yaitu himpunan $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, dan $\{b, c, d\}$. ■

---

**Contoh 6.28**

Berapa banyak cara menyusun menu nasi goreng tiga kali seminggu untuk sarapan pagi?

Penyelesaian:
Bayangkan tiga kali menu nasi goreng sebagai tiga buah bola dan tujuh hari dalam seminggu sebagai 7 buah kotak. Persoalan ini sama dengan menempatkan 3 buah bola ke dalam 7 buah kotak. Banyaknya pengaturan jadwal menu nasi goreng adalah $C(7,3) = \dfrac{7!}{3!4!} = 35$ cara. ■

---

**Contoh 6.29**

*String* biner yang panjangnya 32 bit disusun oleh angka 1 atau 0. Berapa banyak *string* biner yang tepat berisi 7 buah bit 1?

Penyelesaian:
Analogikan 7 bit 1 sebagai 7 buah bola, dan 32 posisi bit sebagai 32 buah kotak. Persoalan ini sama dengan memasukkan 7 bola ke dalam 32 kotak, sisanya kosong (0). Banyak *string* biner yang terbentuk adalah $C(32,7)$. ■

---

**Contoh 6.30**

Sebuah koin yang mempunyai sisi $A$ dan sisi $B$ dilempar ke atas sebanyak empat kali. Berapakah jumlah kemungkinan munculnya sisi $A$ sebanyak tiga kali?

Penyelesaian:
Ini adalah persoalan dari kombinasi karena kita tidak mementingkan kapan sisi $A$ tersebut muncul. Jadi, jumlah kemungkinan munculnya sisi $A$ sebanyak tiga kali adalah $C(4, 3) = 4$.

---

**Contoh 6.31**

Sebuah karakter dalam sistem ASCII berukuran 1 *byte* atau 8 bit (1 atau 0).

(a) Berapa banyak pola bit yang terbentuk? (atau, berapa banyak karakter yang dapat direpresentasikan?)
(b) Berapa banyak pola bit yang mempunyai 3 bit 1?
(c) Berapa banyak pola bit yang mempunyai bit 1 sejumlah genap?

Penyelesaian:
(a) Posisi bit dalam 1 *byte*: ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___
7 6 5 4 3 2 1 0

Posisi 0 dapat diisi dengan 2 cara (1 atau 0)
Posisi 1 dapat diisi dengan 2 cara (1 atau 0)
Posisi 2 dapat diisi dengan 2 cara (1 atau 0)
...
Posisi 7 dapat diisi dengan 2 cara (1 atau 0)

Semua posisi harus diisi, jadi jumlah pola bit yang terbentuk
$= (2)(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2) = 2^8$

(b) $C(8, 3) = 56$

(c) Banyaknya pola bit yang mempunyai 0 buah bit 1 = $C(8, 0)$
Banyaknya pola bit yang mempunyai 2 buat bit 1 = $C(8, 2)$
Banyaknya pola bit yang mempunyai 4 buah bit 1 = $C(8, 4)$
Banyaknya pola bit yang mempunyai 6 buah bit 1 = $C(8, 6)$
Banyaknya pola bit yang mempunyai 8 buat bit 1 = $C(8, 8)$

Jadi, banyaknya pola bit yang mempunyai bit 1 sejumlah genap
$= C(8, 0) + C(8, 2) + C(8, 4) + C(8, 6) + C(8, 8)$ ■

**Contoh 6.32**

Di antara 10 orang mahasiswa Teknik Informatika Angkatan 1998, berapa banyak cara membentuk sebuah perwakilan beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga:
(a) mahasiswa bernama $A$ selalu termasuk di dalamnya;
(b) mahasiswa bernama $A$ tidak termasuk di dalamnya;
(c) mahasiswa bernama $A$ selalu termasuk di dalamnya, tetapi $B$ tidak;
(d) mahasiswa bernama $B$ selalu termasuk di dalamnya, tetapi $A$ tidak;
(e) mahasiswa bernama $A$ dan $B$ termasuk di dalamnya;
(f) setidaknya salah satu dari mahasiswa yang bernama $A$ atau $B$ termasuk di dalamnya.

Penyelesaian:
(a) Masukkan $A$ ke dalam perwakilan sehingga sekarang tersisa 9 orang mahasiswa. Dari 9 orang ini, pilih 4 orang lagi sebagai anggota perwakilan. Ini dapat dilakukan dengan $C(9, 4)$ cara. Jadi, ada $C(9, 4) = 126$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakn 5 orang sedemikian sehingga $A$ selalu termasuk di dalamnya.

(b) Keluarkan $A$ dari kelompok mahasiswa, sehingga sekarang tersisa 9 orang mahasiswa. Dari 9 orang ini, pilih 5 orang sebagai anggota perwakilan. Ini dapat dilakukan dengan $C(9, 5)$ cara. Jadi, ada $C(9, 5) = 126$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga $A$ tidak termasuk di dalamnya.

(c) Keluarkan $B$ dari kelompok mahasiswa (tersisa 9 orang). Masukkan $A$ ke dalam perwakilan (tersisa 8 orang). Dari 8 orang ini, pilih 4 orang lagi sebagai anggota perwakilan. Ini dapat dilakukan dengan $C(8, 4)$ cara. Jadi, ada $C(8, 4) = 70$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga $A$ termasuk di dalamnya, tetapi $B$ tidak.

(d) Dengan cara yang sama seperti jawaban (c), terdapat $C(8, 4) = 70$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga $B$ termasuk di dalamnya, tetapi $A$ tidak.

(e) Masukkan $A$ dan $B$ ke dalam perwakilan sehingga sekarang tersisa 8 orang mahasiswa. Dari 8 orang ini, pilih 3 orang lagi sebagai anggota perwakilan. Ini dapat dilakukan dengan $C(8, 3)$ cara. Jadi, ada $C(8, 3) = 56$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga $A$ dan $B$ selalu termasuk di dalamnya.

(f) Jumlah cara membentuk perwakilan sedemikian sehingga setidaknya salah satu dari $A$ atau $B$ termasuk di dalamnya
= jumlah cara membentuk perwakilan sehingga $A$ termasuk di dalamnya, $B$ tidak + jumlah cara membentuk perwakilan sehingga $B$ termasuk di dalamnya, $A$ tidak + jumlah cara membentuk perwakilan sehingga $A$ dan $B$ termasuk di dalamnya
= 70 + 70 + 56 = 196

Soal (f) ini dapat juga diselesaikan dengan prinsip inklusi-eksklusi. Misalkan $X$ adalah jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan $A$, $Y$ adalah jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan $B$, dan $X \cap Y$ adalah jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan $A$ dan $B$, maka

$$|X| = C(9, 4) = 126; \qquad |Y| = C(9, 4) = 126; \qquad |X \cap Y| = C(8, 3) = 56;$$

sehingga

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| = 126 + 126 - 56 = 196$$ ■

---

**Contoh 6.33**

Sebuah klub beranggotakan 8 pria dan 10 wanita. Berapa banyak cara memilih panitia yang terdiri dari 6 orang dengan jumlah wanita lebih banyak daripada pria?

Penyelesaian:
Panitia: 6 orang, jumlah wanita lebih banyak daripada jumlah pria
Panitia terdiri dari 5 wanita, 1 pria → dapat dibentuk dengan $C(10,5) \times C(8,1)$
Panitia terdiri dari 4 wanita, 2 pria → dapat dibentuk dengan $C(10,4) \times C(8,2)$
Panitia terdiri dari 6 wanita, 0 pria → dapat dibentuk dengan $C(10,6) \times C(8,0)$
Jumlah cara pembentukan panitia seluruhnya = $C(10,5) \times C(8,1) + C(10,4) \times C(8,2) + C(10,6) \times C(8,0)$. ■

---

**Contoh 6.34**

Tiga buah apartemen $A$, $B$, dan $C$ disewakan untuk mahasiswa. Tiap unit apartemen dapat menampung 3 atau 4 orang mahasiswa. Berapa jumlah cara menyewakan apartemen kepada 10 orang mahasiswa?

Penyelesaian:

(i) andaikan apartemen $A$, $B$, $C$ ditempati masing-masing oleh 4, 3, dan 3 orang mahasiswa. Jumlah cara menyewakan = $C(10,4)\times C(6,3)\times C(3,3)$

(ii) andaikan apartemen $A$, $B$, dan $C$ ditempati masing-masing oleh 3, 4, dan 3 orang mahasiswa. Jumlah cara menyewakan = $C(10,3) \times C(7,4) \times C(3,3)$

(iii) andaikan apartemen $A$, $B$, dan $C$ ditempati masing-masing oleh 3, 3, dan 4 orang mahasiswa. Jumlah cara menyewakan = $C(10,3) \times C(7,3) \times C(4,4)$

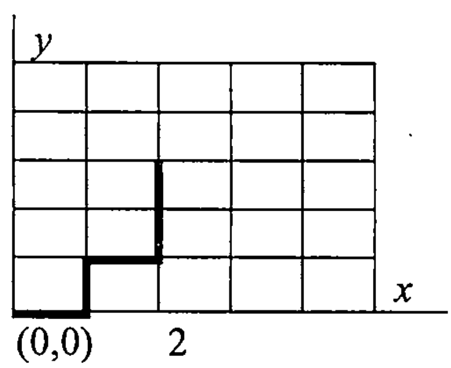
Total seluruh cara menyewakan = $C(10,4)C(6,3) + C(10,3)C(7,4) + C(10,3)C(7,3)$
$= 3C(10,4)C(6,3)$. ■

**Contoh 6.35**

Pandang sebuah bidang kartesian dengan koordinat positif (Gambar 6.4). Tiap titik koordinatnya adalah $(x, y)$. Seekor semut bergerak dari (0,0) ke titik $A(m, n)$, $m$ dan $n > 0$. Lintasan yang dilalui semut memiliki ketentuan sebagai berikut:

(i) dimulai dari titik asal (0,0),
(ii) melangkah selalu sejajar sumbu-$X$ atau sumbu-$Y$ positif,
(iii) boleh membelok hanya pada titik-titik *grid*,
(iv) berhenti di $A$.

Berapakah jumlah langkah (panjang lintasan) dan banyaknya lintasan dari (0,0) ke $A(m, n)$?




**Gambar 6.4** Persoalan menentukan banyaknya lintasan dari (0, 0) ke titik $(x, y)$

Penyelesaian:

Panjang lintasan = $m + n$ langkah ($m$ horizontal dan $n$ vertikal)

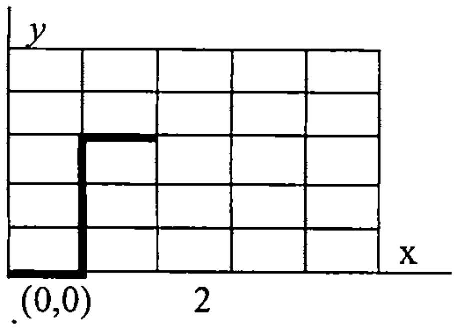
Contohnya, pada gambar 6.4 di atas, panjang lintasan dari (0,0) ke $A(2,3) = 2 + 3 = 5$.

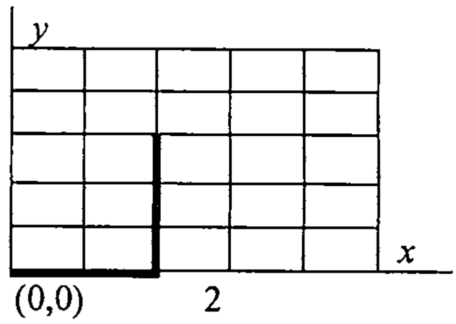
Banyaknya lintasan = $C(m + n, m) = C(m + n, n)$

$$= C(2 + 3, 2) = C(5, 2) = \frac{5!}{(2!)(3!)} = 10.$$

$$= C(2+3,3) = C(5,3) = \frac{5!}{(3!)(2!)} = 10$$

Contoh beberapa lintasan lain dari (0,0) ke $A(2,3)$ diperlihatkan di bawah ini:




■

# 6.7 Permutasi dan Kombinasi Bentuk Umum

Kita mempunyai $n$ buah bola yang tidak seluruhnya berbeda warna (jadi, ada beberapa bola yang warnanya sama - *indistinguishable*). Misalkan dari $n$ buah bola itu terdapat

$n_1$ bola diantaranya berwarna 1,
$n_2$ bola diantaranya berwarna 2,
⋮
$n_k$ bola diantaranya berwarna $k$,

dan $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Kita diminta memasukkan $n$ buah bola ini ke dalam $n$ buah kotak, masing-masing kotak berisi paling banyak 1 buah bola. Berapa jumlah cara pengaturan $n$ buah bola ke dalam kotak-kotak tersebut?

Perhitungannya adalah sebagai berikut:

Jika $n$ buah bola itu kita anggap berbeda semuanya, maka jumlah cara pengaturan $n$ buah bola ke dalam $n$ buah kotak adalah $P(n, n) = n!$.

Tetapi, karena tidak seluruh bola berbeda, maka dari pengaturan $n$ buah bola itu,
ada $n_1!$ cara memasukkan bola berwarna 1 (jika masing-masingnya dibedakan);
ada $n_2!$ cara memasukkan bola berwarna 2 (jika masing-masingnya dibedakan);
⋮
ada $n_k!$ cara memasukkan bola berwarna k (jika masing-masingnya dibedakan).

Dengan demikian, permutasi $n$ buah bola yang mana $n_1$ diantaranya berwarna 1, $n_2$ bola berwarna 2, …, $n_k$ bola berwarna $k$ adalah:

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{P(n,n)}{n_1!n_2!\ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} \qquad (6.4)$$

Persamaan (6.4) ini diterapkan untuk menghitung pengaturan (atau *pengurutan*) $n$ buah objek dari himpunan ganda $S$ (himpunan $S$ terdiri dari $n$ buah obyek yang *tidak perlu* semuanya berbeda). Persamaan tersebut dinamakan **permutasi bentuk umum** (*generalized permutation*) terhadap $S$.

Persamaan (6.4) dapat pula kita peroleh sebagai berikut:

> Mula-mula kita menempatkan bola-bola yang berwarna 1 ke dalam $n$ buah kotak. Ada $C(n, n_1)$ cara untuk menempatkan $n_1$ buah bola yang berwarna 1.
> Setelah bola berwarna 1 dimasukkan, sekarang terdapat $n - n_1$ kotak yang belum diisi. Kita masukkan bola-bola yang berwarna 2. Ada $C(n - n_1, n_2)$ cara untuk menempatkan $n_2$ buah bola berwarna 2.
> Setelah bola berwarna 2 dimasukkan, sekarang terdapat $n - n_1 - n_2$ kotak yang belum diisi. Kita masukkan bola-bola yang berwarna 3. Ada $C(n - n_1 - n_3, n_3)$ cara untuk menempatkan $n_3$ buah bola berwarna 3.
> Demikian seterusnya, sehingga akhirnya terdapat $C(n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-1}, n_k)$ cara untuk menempatkan $n_k$ buah bola berwarna $k$.

Jumlah cara pengaturan seluruh bola kedalam kotak adalah:

$$C(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = C(n, n_1)\, C(n - n_1, n_2)\, C(n - n_1 - n_2, n_3) \ldots C(n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-1}, n_k)$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_k)!} \cdots \frac{(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}-n_k)!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!..n_k} \qquad (6.5)$$

Persaman (6.5) ini dinamakan **kombinasi bentuk umum** (*generalized combination*). Kita dapat melihat bahwa tidak ada perbedaan antara permutasi bentuk umum dengan kombinasi bentuk umum. Keduanya dapat dihitung dengan rumus yang sama.

Jadi, apabila $S$ adalah himpunan ganda dengan $n$ buah objek yang di dalamnya terdiri atas $k$ jenis obyek berbeda, dan tiap obyek memiliki multiplisitas $n_1$, $n_2$, $\ldots$, $n_k$ (jumlah objek seluruhnya $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$), maka jumlah cara menyusun seluruh objek adalah:

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = C(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!..n_k!}$$

**Contoh 6.36**

Contoh permasalahan yang sering dikemukakan untuk mengilustrasikan permutasi bentuk umum adalah masalah berikut: Berapa banyak *string* yang dapat dibentuk dengan menggunakan huruf-huruf dari kata *MISSISSIPPI*?

Penyelesaian:

$S = \{M, I, S, S, I, S, S, I, P, P, I\}$

huruf $M$ = 1 buah ($n_1$)
huruf $I$ = 4 buah ($n_2$)
huruf $S$ = 4 buah ($n_3$)
huruf $P$ = 2 buah ($n_4$)
$n = 1 + 4 + 4 + 2 = 11$ buah = jumlah elemen himpunan $S$

Ada dua cara yang dapat digunakan untuk menyelesaiakan persoalan ini, keduanya memberikan hasil yang sama:

Cara 1: Jumlah *string* = $P(11; 1, 4, 4, 2) = \dfrac{11!}{(1!)(4!)(4!)(2!)} = 34650$ buah.

Cara 2: Jumlah *string* = $C(11, 1)C(10, 4)C(6, 4)C(2, 2)$

$$= \frac{11!}{(1!)(10!)} \cdot \frac{10!}{(4!)(6!)} \cdot \frac{6!}{(4!)(2!)} \cdot \frac{2!}{(2!)(0!)}$$

$$= \frac{11!}{(1!)(4!)(4!)(2!)}$$

$= 34650$ buah ■

**Contoh 6.37**

12 lembar karton akan diwarnai sehingga 3 diantaranya berwarna hijau, 2 berwarna merah, 2 berwarna kuning, dan sisanya berwarna biru. Berapa jumlah cara pengecatan?

Penyelesaian:
Diketahui $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, $n_4 = 5$, dan $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 3 + 2 + 2 + 5 = 12$
Jumlah cara pengecatan = $P(12; 3, 2, 2, 5)$ =

$$\frac{P(12,12)}{(3!)(2!)(2!)(5!)} = \frac{12!}{(3!)(2!)(2!)(5!)} = 166320 \text{ cara}$$ ■

**Contoh 6.38**

12 buah lampu berwarna (4 merah, 3 putih, dan 5 biru) dipasang pada 18 buah soket dalam sebuah baris (sisanya 6 buah soket dibiarkan kosong). Berapa jumlah cara pengaturan lampu?

Penyelesaian:
Diketahui, $n = 18$; $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$, dan $n_4 = 6$ (*socket* kosong)

Jumlah cara pengaturan lampu = $P(18; 4, 3, 5, 6) = \dfrac{18!}{(4!)(3!)(5!)(6!)}$ cara ■

---

**Contoh 6.39**

Berapa banyak cara membagikan delapan buah buku berbeda kepada 3 orang mahasiswa, bila Billy mendapat empat buah buku, dan Andi serta Toni masing-masing memperoleh 2 buah buku.

Penyelesaian:
Diketahui $n = 8$, $n_1 = 4$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, dan $n_1 + n_2 + n_3 = 4 + 2 + 2 = 8$

Jadi, jumlah cara membagi seluruh buku = $\dfrac{8!}{(4!)(2!)(2!)} = 420$ cara ■

---

## 6.8 Kombinasi dengan Pengulangan

Tinjau kembali persoalan memasukkan bola ke dalam kotak. Misalkan terdapat $r$ buah bola yang semua warnanya sama dan $n$ buah kotak.

(i) Jika masing-masing kotak hanya boleh diisi paling banyak satu buah bola, maka jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak adalah $C(n, r)$.

(ii) jika masing-masing kotak boleh lebih dari satu buah bola (tidak ada pembatasan jumlah bola), maka jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak adalah $C(n + r - 1, r)$.

$C(n + r - 1, r)$ adalah adalah jumlah kombinasi yang membolehkan adanya pengulangan elemen, yaitu dari $n$ buah objek kita akan mengambil $r$ buah objek, dengan pengulangan diperbolehkan. Pembuktian rumus kombinasi dengan pengulangan tidak disertakan di sini.

Perhatikan bahwa $C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1)$.

---

**Contoh 6.40**

Pada persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$, $x_i$ adalah bilangan bulat $\geq 0$. Berapa jumlah kemungkinan solusinya?

Penyelesaian:
Analogikan 12 buah bola akan dimasukkan ke dalam 4 buah kotak (dalam hal ini, $n = 4$ dan $r = 12$). Bagilah keduabelas bola itu ke dalam tiap kotak. Sebuah kotak mungkin diisi 1 bola, atau 2 bola, atau …, atau +12 bola, atau tidak diisi sama sekali, yang penting jumlah seluruh bola di dalam seluruh kotak tetap 12 buah. Misalnya,

Kotak 1 diisi 3 buah bola ($x_1 = 3$)
Kotak 2 diisi 5 buah bola ($x_2 = 5$)
Kotak 3 diisi 2 buah bola ($x_3 = 2$)
Kotak 4 diisi 2 buah bola ($x_4 = 2$)
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 + 5 + 2 + 2 = 12$

Banyak sekali jumlah susunan yang mungkin, namun seluruhnya ada $C(4 + 12 - 1, 12) = C(15, 12) = 455$ buah kemungkinan solusi. ■

---

**Contoh 6.41**

Tinjau kembali Contoh 6.41. Berapa banyak kemungkinan solusi persamaan tersebut bila disyaratkan $x_1 > 0$, $x_2 > 1$, $x_3 > 2$, dan $x_4 \geq 0$?

Penyelesaian:
Kita akan membagian 12 buah bola ke dalam kotak. Kotak pertama harus berisi paling sedikit 1 bola, kotak kedua paling sedikit 2 bola, kotak ketiga paling sedikit 3 bola, dan kotak keempatboleh kosong. Mula-mula masukkan 1 bola, 2 bola, dan 3 bola ke masing-masing kotak 1, 2, dan 3, sehingga tersisa 6 bola. Kemudian, masukkan 6 buah bola yang tersisa ini ke dalam empat kotak itu. Ini dapat dilakukan dalam sejumlah $C(6 + 4 - 1, 6) = C(9, 6) = 84$ cara. Jadi, ada 84 kemungkinan solusi persamaan. ■

---

**Contoh 6.42**

20 buah apel dan 15 buah jeruk dibagikan kepada 5 orang anak, tiap anak boleh mendapat lebih dari 1 buah apel atau jeruk, atau tidak sama sekali. Berapa jumlah cara pembagian yang dapat dilakukan?

Penyelesaian:
Pada persoalan ini, $n = 5$, $r_1 = 20$ (apel) dan $r_2 = 15$ (jeruk). Membagikan 20 buah apel kepada 5 orang anak dapat dilakukan dengan $C(5 + 20 - 1, 20)$ cara, dan membagikan 15 buah jeruk kepada 5 orang anak dapat dilakukan dengan $C(5 + 15 - 1, 15)$ cara. Karena setiap anak mendapat apel dan jeruk, maka jumlah cara pembagian kedua buah itu adalah

$$C(5 + 20 - 1, 20) \times C(5 + 15 - 1, 15) = C(24, 20) \times C(19, 15)$$

cara (nilai $C(24, 20)$ dan $C(19, 15)$ dapat anda selesaikan dengan mudah). ■

---

**Contoh 6.43**

Toko roti "Enak" menjual 8 jenis roti. Berapa jumlah cara mengambil 1 lusin roti (1 lusin = 12 buah).

Penyelesaian:
Analogikan 8 jenis roti sebagai 8 kotak. Kita akan mendistribusikan 12 roti itu ke dalam 8 kotak. Setiap kotak mungkin berisi lebih dari 1 buah roti. Di sini $n = 8$ dan $r = 12$, maka

jumlah cara memilih 12 buah roti itu sama dengan jumlah cara memasukkan 12 buah roti ke dalam 8, yaitu sebanyak

$$C(8 + 12 - 1, 12) = C(19, 12)$$

cara. ■

---

**Contoh 6.44**

Andaikan terdapat kumpulan bola yang berwarna merah, biru, dan hijau. Jumlah bola dari masing-masing warna paling sedikit jumlahnya 8 buah.

(a) Berapa banyak cara memilih 8 buah bola (tanda ada batasan warna)?

(b) Berapa banyak cara memilih 8 buah bola jika paling sedikit 1 bola dari masing-masing warna terwakili?

Penyelesaian:

(a) $n = 3$, $r = 8$, maka $C(n + r - 1, r) = C(3 + 8 - 1, 8) = C(10, 8) = 45$

(b) Ambil terlebih dulu 1 bola dari masing-masing warna, kemudian ambil 5 bola sisanya. Jumlah cara seluruhnya adalah $C(3 + 5-1, 5) = C(7, 5) = 21$ cara. ■

---

**Contoh 6.45**

Tiga buah dadu dilempar bersamaan. Berapa banyaknya hasil berbeda yang mungkin?

Penyelesaian:

$C(6 + 3 - 1, 3) = C(8, 3) = 56$. ■

---

## 6.9 Koefisien Binomial

Teorema binomial memberikan cara untuk menjabarkan bentuk perpangkatan $(x + y)^n$, yang dalam hal ini, $n$ adalah bilangan bulat positif. Cara ini digunakan sebagai alternatif bagi penggunaan segitiga Pascal, yaitu:

| | |
|---|---|
| $(x+y)^0 = 1$ | 1 |
| $(x+y)^1 = x + y$ | 1 1 |
| $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ | 1 2 1 |
| $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ | 1 3 3 1 |
| $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$ | 1 4 6 4 1 |
| $(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$ | 1 5 10 10 5 1 |

Aturan untuk menjabarkan bentuk perpangkatan $(x + y)^n$ adalah:

1. Suku pertama adalah $x^n$, sedangkan suku terakhir adalah $y^n$.

2. Pada setiap suku berikutnya, pangkat $x$ berkurang satu sedangkan pangkat $y$ bertambah satu. Untuk setiap suku, jumlah pangkat $x$ dan $y$ adalah $n$.
3. Koefisien untuk $x^{n-k}y^k$, yaitu suku ke-$(k+1)$, adalah $C(n, k)$. Bilangan $C(n, k)$ disebut **koefisien binomial.**

Dari aturan di atas dapat disimpulkan bahwa:

$$(x+y)^n = C(n, 0)\, x^n + C(n, 1)\, x^{n-1} y^1 + \ldots + C(n, k)\, x^{n-k} y^k + \ldots + C(n, n)\, y^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, x^{n-k} y^k \qquad (6.6)$$

**TEOREMA 6.1 (Teorema Binomial).** Misalkan $x$ dan $y$ adalah peubah, dan $n$ adalah bilangan bulat tak-negatif. Maka

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, x^{n-k} y^k$$

Penggunaan teorema binomial diperlihatkan pada contoh-contoh berikut.

---

**Contoh 6.46**

Tentukan suku keempat dari penjabaran perpangkatan $(x - y)^5$.

Penyelesaian:
Perlu diperhatikan bahwa $(x - y)^5 = (x + (1 - y))^5$.
Oleh sebab itu, suku keempat adalah: $C(5, 3)\, x^{5-3}\, (-y)^3 = -10x^2y^3$. ■

---

**Contoh 6.47**

Jabarkan $(3x - 2)^3$.

Penyelesaian:
Jika didefinisikan $a = 3x$ dan $b = -2$, maka

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= C(3, 0)\, a^3 + C(3, 1)\, a^2b^1 + C(3, 2)\, a^1b^2 + C(3, 3)\, b^3\\ &= 1\,(3x)^3 + 3\,(3x)^2\,(-2) + 3\,(3x)\,(-2)^2 + 1\,(-2)^3\\ &= 27\,x^3 - 54x^2 + 36x - 8\end{aligned}$$

■

---

**Contoh 6.48**

Buktikan bahwa $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$.

Penyelesaian:
Dari persamaan (6.6), ambil $x = y = 1$, sehingga

$$\Leftrightarrow (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, x^{n-k} y^k$$

$$\Leftrightarrow (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, 1^{n-k}\, 1^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)$$

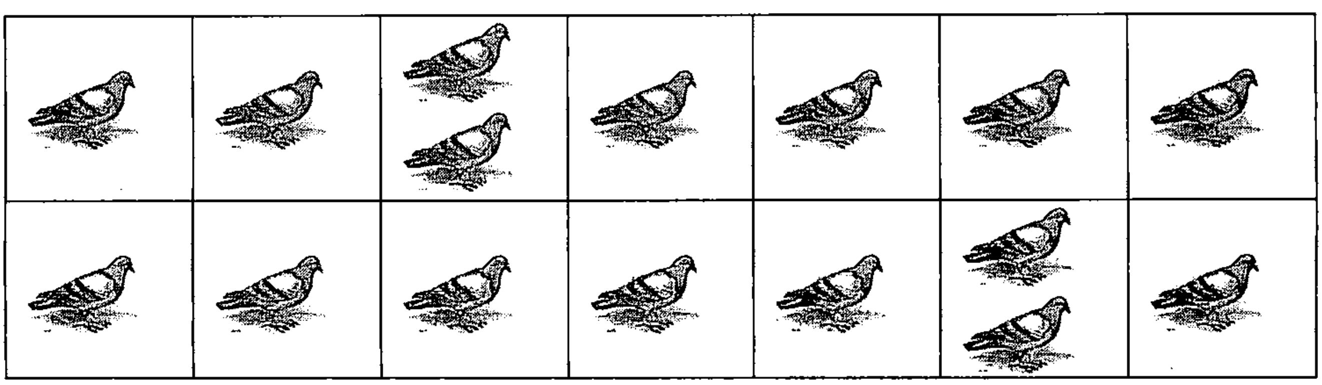
$$\Leftrightarrow 2^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)$$ ■

# 6.10 Prinsip Sarang Merpati

Misalkan kita mempunyai kandang burung merpati (*pigeon*) yang memiliki pintu masuk berupa lubang-ubang (*hole*). Satu lubang berarti satu sarang. Setiap sarang biasanya ditempati oleh seekor burung merpati. Misalkan merpati ada 16 ekor sedangkan kandang hanya mempunyai 14 buah sarang. Prinsip sarang merpati (*pigeonhole principle*) menyatakan bahwa paling sedikit terdapat satu sarang yang ditempati oleh dua ekor merpati (Gambar 6.4).

**TEOREMA 6.2 (Prinsip Sarang Merpati).** Jika $n + 1$ atau lebih objek ditempatkan di dalam $n$ buah kotak, maka paling sedikit terdapat satu kotak yang berisi dua atau lebih objek.

*Bukti*: Misalkan tidak ada kotak yang berisi lebih dari dua objek. Maka, total jumlah objek paling banyak adalah $n$. Ini kontradiksi, karena jumlah objek paling sedikit $n + 1$.



**Gambar 6.4** Kandang merpati dengan 14 buah sarang (*pigeonhole*) dan 16 ekor merpati.

Prinsip sarang merpati dikemukakan oleh G. Lejeune Dirichlet, seorang matematikawan Jerman, sehingga kadang-kadang dinamakan juga **Prinsip Kotak Dirichlet,** karena Dirichlet sering menggunakan prinsip ini dalam pekerjaannya.

Prinsip sarang merpati, jika diterapkan dengan baik, akan memberikan hanya objek-objek yang ada, dan bukan memberitahukan bagaimana mencari objek tersebut dan berapa banyak [JOH97]. Pada masalah sarang burung merpati, prinsip ini tidak memberitahukan di sarang merpati mana yang berisi lebih dari dua ekor merpati.

Contoh 6.49 sampai 6.51 berikut memperlihatkan penerapan prinsip sarang merpati.

---

**Contoh 6.49**

Dari 27 orang mahasiswa, paling sedikit terdapat dua orang yang namanya diawali dengan huruf yang sama, karena hanya ada 26 huruf dalam alfabet. Jika kita menganggap 27 huruf awal dari nama-nama mahasiswa sebagai merpati dan 26 huruf alfabet sebagai 26 buah lubang merpati, kita bisa menetapkan pemasangan 27 huruf awal nama ke 26 huruf alfabet seperti halnya pemasangan merpati ke sarang merpati. Menurut prinsip sarang merpati, beberapa huruf awal alfabet dipasangkan dengan paling sedikit dua huruf awal nama mahasiswa. ■

---

**Contoh 6.50**

Misalkan terdapat banyak bola merah, bola putih, dan bola biru di dalam sebuah kotak. Berapa paling sedikit jumlah bola yang diambil dari kotak (tanpa melihat ke dalam kotak) untuk menjamin bahwa sepasang bola yang berwarna sama terambil?

Penyelesaian:
Jika setiap warna dianggap sebagai sarang merpati, maka $n = 3$. Karena itu, jika orang mengambil paling sedikit $n + 1 = 4$ bola (merpati), maka dapat dipastikan sepasang bola yang berwarna sama ikut terambil. Jika hanya diambil 3 buah, maka ada kemungkinan ketiga bola itu berbeda warna satu sama lain. Jadi, 4 buah bola adalah jumlah minumum yang harus diambil dari dalam kotak untuk menjamin terambil sepasang bola yang berwarna sama. ■

---

**Contoh 6.51**

Misalkan sebuah turnamen basket diikuti oleh $n$ buah tim yang dalam hal ini setiap tim bertanding dengan setiap tim lainnya dan setiap tim menang paling sedikit satu kali. Tunjukkan bahwa paling sedikit ada 2 tim yang mempunyai jumlah kemenangan yang sama.

Penyelesaian:
Jumlah kemenangan setiap tim paling sedikit 1 kali dan paling banyak $n - 1$ kali. Angka $n - 1$ berkoreponden dengan $n - 1$ buah sarang merpati untuk menampung $n$ ekor merpati (tim basket). Jadi, paling sedikit ada 2 tim basket yang mempunyai jumlah kemenangan sama. ■

---

Prinsip sarang merpati dapat dirampatkan (*generalized*) sedemikian sehingga jumlah objek dapat merupakan kelipatan jumlah kotak. Misalnya kalau terdapat 20 sarang merpati dan 41 ekor merpati, maka terdapat satu buah sarang yang berisi lebih dari 2 ekor merpati. Hal ini dinyatakan di dalam teorema berikut:

**TEOREMA 6.3 (Prinsip Sarang Merpati yang Dirampatkan).** Jika $M$ objek ditempatkan di dalam $n$ buah kotak, maka paling sedikit terdapat satu kotak yang berisi minimal $\lceil M/n \rceil$ objek.

Bukti teorema 6.3 tidak diberikan di sini dan ditinggalkan kepada pembaca sebagai latihan. Teorema 6.3 juga menyatakan bahwa jika $n$ buah kotak akan diisi dengan $M = nk + 1$ objek, yang dalam hal ini $k$ adalah bilangan bulat positif, maka paling sedikit terdapat 1 kotak yang berisi minimal $k + 1$ objek.

---

**Contoh 6.52**

Di antara 50 orang mahasiswa, terdapat paling sedikit $\lceil 50/12 \rceil = 5$ orang yang lahir pada bulan yang sama. ■

---

**Contoh 6.53**

Tinjau kembali Contoh 6.50. Berapa paling sedikit jumlah bola yang harus diambil dari dalam kotak sehingga 3 pasang bola yang setiap pasangnya berwarna sama terambil?

Penyelesaian:
Tiga pasang bola yang setiap pasang berwarna sama berarti semuanya 6 buah bola. Pada masalah ini, $n$ masih tetap sama dengan 3 (yaitu jumlah warna), dan kita perlu mengambil paling sedikit $M$ buah bola untuk memastikan bahwa $\lceil M/3 \rceil = 6$ bola mengandung setiap pasang bola yang berwarna sama. Nilai $M = 3 \cdot 5 + 1 = 16$. Jika kita hanya mengambil 15 bola, maka mungkin saja hanya terambil 2 macam bola yang berwarna sama. Jadi, jumlah 16 buah bola adalah jumlah minimal yang perlu kita ambil dari dalam kotak untuk memastikan bahwa 3 pasang bola yang setiap pasang berwarna sama terambil. ■

---

## 6.11 Peluang Diskrit

Antara kombinatorial dan teori peluang (*probability*) sebenarnya terkait erat. Teori peluang banyak menggunakan konsep-konsep di dalam kombinatorial. Sayangnya, kedua bidang ini lahir dari tempat yang kurang patut, yaitu dari arena judi (*gambling games*) – salah satu kasusnya adalah menghitung peluang kemunculan nomor lotre. Meskipun begitu, aplikasi kombinatorial dan teori peluang saat ini meluas ke berbagai bidang ilmu lain maupun dalam kehidupan sehari-hari.

Di dalam upabab 6.1 sudah disebutkan bahwa kombinatorial didasarkan pada percobaan. Hasil percobaan (*outcomes*) diamati dan jumlah semua kemungkinannya dihitung. Misalnya pada melempar dadu dengan 6 muka, hasil yang muncul untuk satu kali pelemparan ada 6 kemungkinan, yaitu muka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6; pada kejadian mengambil 5 buah kartu remi dari 52 buah kartu, terdapat $C(52, 9)$ = 2.598.960 kemungkinan kombinasi kartu; pada kejadian menjawab 10 buah pertanyaan pilihan berganda –tiap soal menyediakan 4 pilihan jawaban ($a$, $b$, $c$, $d$) – maka terdapat $4^{10}$ kemungkinan jawaban.

Himpunan semua kemungkinan hasil percobaan dinamakan ruang contoh (*sample space*) dari percobaan yang bersangkutan. Setiap hasil percobaan di dalam ruang contoh disebut **titik contoh** (*sample point*). Hasil-hasil percobaan tersebut bersifat saling terpisah (*mutually exclusive*). Dikatakan saling terpisah karena dari seluruh ruang contoh, hanya satu titik contoh yang muncul. Misalnya pada percobaan melempar dadu, hasil percobaan yang muncul hanya salah satu dari 6 muka dadu, tidak mungkin muncul dua muka atau lebih, atau tidak mungkin salah satu dari enam muka dadu tidak ada yang muncul.

Misalkan ruang contoh dilambangkan dengan $S$ dan titik-titik contohnya dilambangkan dengan $x_1, x_2, \ldots,$ maka

$$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots\}$$

menyatakan ruang contoh $S$ yang terdiri dari titik-titik contoh $x_1$, $x_2$, …, $x_i$,dan seterusnya. Ruang contoh yang jumlah anggotanya terbatas disebut **ruang contoh diskrit** (*discrete sample space*). Peluang terjadinya sebuah titik contoh dinamakan **peluang diskrit** dan disimbolkan dengan $p(x_i)$.

**DEFINISI 6.4.** Misalkan $x_i$ adalah sebuah titik contoh di dalam ruang contoh $S$. Peluang bagi $x_i$ adalah ukuran kemungkinan terjadinya atau munculnya $x_i$ di antara titik-titik contoh yang lain di dalam $S$.

Titik contoh yang mempunyai peluang lebih besar berarti kemungkinan terjadinya lebih besar pula, sedangkan titik contoh yang peluangnya lebih kecil berarti kemungkinan terjadinya juga lebih kecil.

Peluang diskrit mempunyai sifat sebagai berikut:

1. $0 \le p(x_i) \le 1$, yaitu nilai peluang adalah bilangan tidak negatif dan selalu lebih kecil atau sama dengan 1.
2. $\sum_{i=1}^{|S|} p(x_i) = 1$, yaitu jumlah peluang semua titik contoh di dalam ruang contoh $S$ adalah 1.

**Contoh 6.54**

Pada pelemparan dadu, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Peluang munculnya setiap angka adalah sama yaitu 1/6. ■

**Contoh 6.55**

Uang logam mempunyai dua buah muka, yaitu gambar ($g$) dan angka ($a$). Jika sebuah koin uang logam dilempar, maka peluang munculnya muka gambar = 1/2, begitu juga peluang munculnya muka angka. Jika dua buah koin uang logam dilempar, maka ruang contohnya adalah $S = \{aa, gg, ag, ga\}$. Peluang setiap titik contoh adalah

$$p(aa) = p(gg) = p(ag) = p(ga) = \frac{1}{4}$$ ■

**Contoh 6.56**

Sebuah koin yang mempunyai sisi $A$ dan sisi $B$ dilempar ke atas sebanyak empat kali. Berapakah peluang munculnya sisi $A$ sebanyak tiga kali?

Penyelesaian:
Dari Contoh 6.30 kita sudah mengetahui bahwa jumlah kemungkinan munculnya sisi $A$ sebanyak tiga kali adalah $C(4, 3) = 4$. Jumlah seluruh hasil percobaan adalah $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$, sehingga peluang munculnya sisi $A$ sebanyak tiga kali adalah $4/16 = 1/4$. ■

**Kejadian** (*event*) –disimbolkan dengan $E$– adalah himpunan bagian dari ruang contoh. Misalnya pada percobaan melempar dadu, kejadian munculnya angka ganjil adalah $E = \{1, 3, 5\}$, kejadian munculnya angka 1 adalah $E = \{1\}$. Kejadian yang hanya mengandung satu titik contoh disebut kejadian sederhana (*simple event*) dan kejadian yang mengandung lebih dari satu titik contoh disebut kejadian majemuk (*compound event*) [LIU85].

Suatu kejadian dikatakan terjadi jika salah satu dari titik contoh di dalam kejadian tersebut terjadi. Peluang terjadinya suatu kejadian didefinisikan sebagai berikut:

**DEFINISI 6.5.** Peluang kejadian $E$ di dalam ruang contoh $S$ adalah $p(E) = |E| / |S|$.

Peluang kejadian $E$ juga dapat diartikan sebagai jumlah peluang semua titik contoh di dalam $E$. Jadi, kita dapat menuliskan bahwa

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|} = \sum_{x_i \in E} p(x_i) \qquad (6.7)$$

**Contoh 6.57**

Pada percobaan melempar dadu, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Kejadian munculnya angka ganjil adalah $E = \{1, 3, 5\}$. Di sini $|S| = 6$ dan $|E| = 3$. Kejadian munculnya angka ganjil adalah $3/6 = ½$. Kita juga dapat menghitung peluang munculnya angka ganjil dengan melihat bahwa peluang setiap titik contoh di dalam $E$ adalah 1/6, sehingga $p(E) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = ½$. ■

---

**Contoh 6.58**

Dua buah dadu dilemparkan. Berapa peluang munculnya angka-angka dadu yang jumlahnya sama dengan 8?

Penyelesaian:
Jumlah hasil percobaan yang muncul adalah (gunakan kaidah perkalian) $6 \times 6 = 36$. Ruang contohnya adalah $S = \{(1,1), (1, 2), \ldots, (1, 6), (2,1), (2, 2), \ldots, (2,6), \ldots, (6,1), (6,2), \ldots, (6,6)\}$, semuanya ada 36 elemen. Kejadian munculnya jumlah angka sama dengan 8 adalah $E = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$. Peluang munculnya jumlah angka sama dengan 8 adalah 5/36. ■

---

**Contoh 6.59**

Kartu remi (poker) seluruhnya 52 buah kartu. Keseluruhan kartu ini terdiri dari 13 jenis kartu, setiap jenis terdiri dari 4 buah kartu. Tiga belas jenis kartu tersebut adalah: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, joker, ratu, raja, dan as. Setiap pemain remi mendapatkan 5 buah kartu. Berapa peluang dari 5 kartu tersebut mengandung 4 kartu dari jenis yang sama?

Penyelesaian:
Jumlah cara mengambil 5 kartu sembarang dari 52 buah kartu = $C(52, 5)$ (ini adalah jumlah titik contoh). Jumlah cara mengambil satu jenis kartu dari 13 jenis yang ada = $C(13, 1)$. Jumlah cara mengambil 4 kartu dari 4 kartu yang sejenis = $C(4, 4)$. Jumlah cara mengambil satu kartu lagi dari 48 kartu yang tersisa = $C(48, 1)$. Sehingga, peluang dari 5 kartu tersebut mengandung 4 kartu sejenis = $\dfrac{C(13,1) \times C(4,4) \times C(48,1)}{C(52,5)} = 0.00024$ ■

---

**Contoh 6.60**

(berkaitan dengan Contoh 6.59) Berapa peluang dari 5 kartu tersebut mengandung 4 kartu as?

Penyelesaian:
Pada soal ini, jenis kartu sudah ditentukan, yaitu kartu as, maka hanya ada satu cara mengambil jenis kartu as.
Jumlah cara mengambil 4 kartu dari 4 kartu as = $C(4, 4)$
Jumlah cara mengambil satu kartu lagi dari 48 kartu yang tersisa = $C(48, 1)$
Jumlah cara mengambil 5 kartu sembarang dari 52 buah kartu = $C(52, 5)$

Peluang dari 5 kartu tersebut mengandung 4 kartu as = $\dfrac{1 \times C(4,4) \times C(48,1)}{C(52,5)} = 0.0000185$

■

**Contoh 6.61**

Sepuluh buah buku disusun di atas sebuah rak. Kesepuluh buku itu beragam topiknya, ada buku tentang fisika, buku kimia, buku biologi, buku matematika, dan buku sosiologi. Berapa peluang bahwa dari 10 buku itu tepat ada 2 buah buku untuk setiap topik?

Penyelesaian:
Misalkan susunan 10 buah buku tersebut seperti di bawah ini:

| ___ | ___ | ___ | ___ | ___ | ___ | ___ | ___ | ___ | ___ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

Buku ke-1 ada 5 kemungkinan topik, buku ke-2 ada 5 kemungkinan topik, dan seterusnya, buku ke-10 ada 5 kemungkinan topik. Total semua kemungkinan topik buku adalah $5^{10}$. Ini adalah jumlah titik contoh di dalam ruang contoh.

Banyaknya titik contoh dengan 2 buku untuk setiap topik adalah $\dfrac{10!}{2!2!2!2!2!}$ sehingga peluang dari 10 buku itu tepat ada 2 buah buku untuk setiap topik

$$= \frac{\dfrac{10!}{2!2!2!2!2!}}{5^{10}} = 0.0174$$ ■

Konsep-konsep pada teori himpunan dapat diterapkan pada peluang diskrit. Misalkan diketahui dua buah himpunan $A$ dan $B$ adalah dua buah kejadian di dalam ruang contoh $S$:

1. Kejadian bahwa $A$ dan $B$ terjadi sekaligus berarti sama dengan munculnya salah satu titik contoh di dalam himpunan $A \cap B$. Peluang terjadinya kejadian $A$ dan $B$ adalah

$$p(A \cap B) = \sum_{x_i \in A \cap B} p(x_i) \tag{6.8}$$

2. Kejadian bahwa $A$ atau $B$ atau keduanya terjadi berarti sama dengan munculnya salah satu titik contoh di dalam $A \cup B$. Peluang terjadinya kejadian $A$ atau $B$ atau keduanya adalah

$$p(A \cup B) = \sum_{x_i \in A \cup B} p(x_i) \tag{6.9}$$

3. Kejadian bahwa $A$ terjadi tetapi $B$ tidak berarti sama dengan munculnya salah satu titik contoh di dalam $A - B$. Peluang terjadinya kejadian $A$ tetapi $B$ tidak adalah

$$p(A - B) = \sum_{x_i \in A - B} p(x_i) \tag{6.10}$$

4. Kejadian bahwa salah satu dari $A$ dan $B$ terjadi namun bukan keduanya berarti sama dengan munculnya salah satu titik contoh di dalam $A \oplus B$ . Peluang terjadinya salah satu dari $A$ dan $B$ namun bukan keduanya adalah

$$p(A \oplus B) = \sum_{x_i \in A \oplus B} p(x_i) \qquad (6.11)$$

5. (Komplemen) Peluang bahwa kejadian $\overline{A}$, komplemen dari kejadian $A$, terjadi adalah

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) \qquad (6.12)$$

Persamaan (6.12) dapat dibuktikan sebagai berikut:

$$p(\overline{A}) = \frac{|S| - |A|}{|S|} = 1 - \frac{|A|}{|S|} = 1 - p(A)$$ ■

Dengan menggunakan prinsip inklusi-eksklusi kita juga dapat memperlihatkan bahwa

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

*Bukti:*
Prinsip inklusi-eksklusi untuk operasi gabungan dua buah himpunan menyatakan bahwa

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Dalam hal ini,

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= \frac{|A \cup B|}{|S|} \\ &= \frac{|A| + |B| - |A \cap B|}{|S|} \\ &= \frac{|A|}{|S|} + \frac{|B|}{|S|} - \frac{|A \cap B|}{|S|} \\ &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \end{aligned}$$ ■

**Contoh 6.62**

Dari 100 orang mahasiswa ITB yang hadir dalam sebuah diskusi, 80 orang laki-laki dan 20 orang perempuan. Di antara mahasiswa pria terdapat 35 orang yang memakai jaket almamater (*pja*) dan 45 orang tidak memakai jaket tersebut (*ptja*), dan di antara mahasiswa wanita terdapat 8 orang yang memakai jaket alamamater (*wja*) dan 12 orang yang tidak memakainya (*wtja*). Kita ingin memilih salah seorang dari mahasiswa tersebut sebagai notulen. Maka ruang contohnya adalah $S = \{pja, ptja, wja, wtja\}$. Peluang setiap mahasiswa dari kategori terpilih sebagai notulen adalah

$$p(pja) = 35/100 = 0.35; \; p(ptja) = 45/100 = 0.45;$$
$$p(wja) = 8/100 = 0.08; \; p(wtja) = 12/100 = 0.12$$

Misalkan $A$ adalah kejadian terpilihnya mahasiswa pria, dan $B$ adalah kejadian terpilihnya mahasiswa(i) yang memakai jaket alamamater, maka

$$p(A) = 0.35 + 0.45 = 0.75$$
$$p(B) = 0.35 + 0.09 = 0.44$$

$A \cap B$ menyatakan kejadian terpilihnya mahasiswa pria yang memakai jaket almamater:

$$p(A \cap B) = 0.35$$

$A \cup B$ menyatakan kejadian terpilihnya mahasiswa pria atau mahasiswa(i) yang memakai jaket almamater:

$$p(A \cup B) = 0.35 + 0.45 + 0.08 = 0.88$$

$A \oplus B$ menyatakan kejadian terpilihnya mahasiswa pria yang tidak memakai jaket almamater atau mahasiswi yang memakai jaket:

$$p(A \oplus B) = 0.45 + 0.12 = 0.57$$

$A - B$ menyatakan kejadian terpilihnya mahasiswa pria tetapi tidak memakai jaket:

$$p(A - B) = 0.45$$

■

**Contoh 6.63**

Di antara 100 bilangan bulat positif pertama, berapa peluang memilih secara acak sebuah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5?

<u>Penyelesaian</u>:

Misalkan,

$A$ menyatakan kejadian bilangan bulat yang dipilih habis dibagi 3,
$B$ menyatakan kejadian bilangan bulat yang dipilih habis dibagi 5,

$A \cap B$ menyatakan kejadian bilangan bulat yang dipilih habis dibagi 3 dan 5 (yaitu bilangan bulat yang habis dibagi oleh KPK – Kelipatan Persekutuan Terkecil – dari 3 dan

5, yaitu 15), maka $A \cup B$ menyatakan kejadian bilangan bulat yang dipilih habis dibagi 3 atau 5.

Terlebih dahulu kita harus menghitung

$$|A| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33, \qquad |B| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20, \qquad |A \cap B| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$$

untuk mendapatkan

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 33/100 + 20/100 - 6/100 = 0.47$$

Jadi, peluang bilangan yang dipilih habis dibagi 3 atau 5 adalah 0.47. ■

---

**Contoh 6.64**

Dari 8 bit (atau 1 *byte*) yang dibangkitkan secara acak, berapa peluang bahwa *byte* tersebut tidak dimulai dengan '11'?

Penyelesaian:
Misalkan $A$ menyatakan kejadian bahwa *byte* yang dibangkitkan dimulai dengan '11'. Maka, $\overline{A}$ menyatakan kenjadian bahwa byte yang dibangkitkan tidak dimulai dengan '11'. Jumlah *byte* yang dimulai dengan '11' adalah $2^6 = 64$ buah karena 2 posisi pertama sudah diisi dengan '11', sehingga kita cukup mengisi 6 posisi bit lainnya. Jadi, $|A| = 64$. Ruang contoh $S$ adalah himpunan semua bit yang panjangnya 8, di sini $|S| = 2^8 = 256$. Maka, peluang *byte* yang dibangkitkan tidak dimulai dengan '11' adalah

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) \ = 1 - \frac{|A|}{|S|} = 1 - 64/256 = 192/256$$ ■

---

**Contoh 6.65**

[ROS99] Dari 8 bit (atau 1 *byte*) yang dibangkitkan secara acak, berapa peluang bahwa paling bit-bit ini mengandung sedikitnya satu buah bit 0?

Penyelesaian:
Misalkan $A$ menyatakan kejadian bahwa *byte* yang dibangkitkan mengandung sedikitnya sebuah bit 0. Maka, $\overline{A}$ menyatakan kejadian bahwa *byte* yang dibangkitkan semuanya mengandung bit 1.Ruang contoh $S$ adalah himpunan semua bit yang panjangnya 8, di sini $|S| = 2^8 = 256$. Hanya ada satu buah *byte* yang semuanya mengandung bit 1, sehingga $p(\overline{A}) = 1/256$. Maka, peluang *byte* yang dibangkitkan mengandung sedikitnya satu buah bit 0 adalah

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{|\overline{A}|}{|S|} = 1 - 1/256 = 255/256$$ ■

## 6.12 Ragam Soal dan Penyelesaian

Kombinatorial kaya dengan ragam persoalan. Di dalam upabab 6.12 ini diberikan beragam soal tambahan agar pembaca dapat lebih memahami teori yang sudah dikemukakan sebelum ini.

---

**Contoh 6.66**

Dari 100.000 buah bilangan bulat positif pertama, berapa banyak bilangan yang mengandung tepat 1 buah angka 3, 1 buah angka 4, dan 1 buah angka 5?

Penyelesaian:
Bilangan 100.000 tidak memenuhi, karena tidak mengandung angka 4 dan 5. Jadi bilangan bulat yang akan ditinjau hanya terdiri dari 5 angka. Ada 5 cara untuk menempatkan angka 5, sehingga sisa tempat yang kosong tinggal 4 angka. Selanjutnya, ada 4 cara untuk menempatkan angka 4, sehingga sisa tempat kosong tinggal 3 angka. Terakhir, ada 3 cara untuk menempatkan angka 3, sehingga sisa tempat kosong tinggal 2 angka. Posisi selain angka 3, 4, dan 5 dapat diisi dengan angka lain dan boleh berulang. Jadi untuk kedua tempat yang masih kosong dapat diisi masing-masing dengan 7 angka.
Banyaknya bilangan bulat yang dapat dibentuk sesuai dengan aturan tersebut adalah $5 \times 4 \times 3 \times 7 \times 7 = 2940$. ■

---

**Contoh 6.67**

Ada 10 soal di dalam ujian akhir *Matematika Diskrit*. Berapa banyak cara pemberian nilai (bilangan bulat) pada setiap soal jika jumlah nilai keseluruhan soal adalah 100 dan setiap soal mempunyai nilai paling sedikit 5. (Khusus untuk soal ini, nyatakan jawaban akhir anda dalam $C(a, b)$ saja, tidak perlu dihitung nilainya)

Penyelesaian:
Misalkan 10 soal digambarkan sebagai 10 buah kotak. Kita akan memasukkan 100 buah bola (nilai) yang sama warnanya ke dalam 10 kotak (soal) itu, setiap kotak (soal) berisi minimal 5. Ini adalah soal kombinaasi dengan pengulangan. Mula-mula, masukkan 5 buah bola ke dalam setiap kotak, sehingga jumlah bola yang tersisa adalah $100 - 50 = 50$. Sisa 50 buah bola ini didistribusikan kembali ke sepuluh kotak tersebut, di sini $n = 10$ dan $r = 50$, sehingga banyaknya cara pemberian nilai bilangan bulat ke sepuluh soal tersebut adalah $C(10 + 50 - 1, 50) = C(59, 50)$. ■

---

**Contoh 6.68**

Berapa banyak *string* yang dapat dibentuk dari huruf-huruf kata "CONGRESS" sedemikian sehingga dua buah huruf "S" tidak terletak berdampingan?

Penyelesaian:
*String* "CONGRESS" disusun oleh 8 buah huruf, dan terjadi pengulangan dua kali untuk huruf "S". Jika kedua huruf "S" boleh sembarang letaknya (tidak ada aturan khusus untuk huruf "S"), maka jumlah *string* berbeda yang dapat dibentuk adalah:

$$P(8;\ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2) = \frac{8!}{1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!} = \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{2!} = 8.7.6.5.4.3 = 20160$$

Jika kedua huruf "S" harus berdampingan, maka jumlah *string* berbeda yang terjadi adalah sama dengan permutasi dari 7 huruf dari 7 huruf yang tersedia, dimana tidak ada karakter yang berulang yaitu:

$$P(7, 7) = 7! = 7.6.5.4.3.2 = 5040$$

Jadi jumlah *string* berbeda yang dapat dibentuk dari huruf-huruf tersebut apabila dua huruf "S" tidak boleh berdampingan adalah

20160 – 5040 = 15120 buah. ■

---

**Contoh 6.69**

Berapa banyak solusi bilangan bulat dari $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ jika $0 \le x_1 \le 2$, $x_2 > 1$, dan $x_3 \ge 0$.?

Penyelesaian:
Analogikan dengan membagi 10 buah bola yang identik ke dalam 3 buah kotak, sebutlah kotak $x_1$, $x_2$, dan kotak $x_3$. Nilai $x_1$ ada 3 kemungkinan: 0, 1 dan 2. Untuk masing-masing nilai $x_1$, kita rinci perhitungan untuk $x_i$ lainnya:

(i) Kasus $x_1 = 0$, persamaan menjadi $x_2 + x_3 = 10$. Isikan 2 ke dalam $x_2$ (karena $x_2 > 1$). Bagikan 8 buah bola sisa ke dalam $x_2$ dan $x_3$, semuanya ada $C(2 + 8 - 1, 8) = C(9,8)$ cara.
(ii) Kasus $x_1 = 1$, persamaan menjadi $x_2 + x_3 = 9$. Isikan 2 ke dalam $x_2$ (karena $x_2 > 1$). Bagikan 7 buah bola sisa ke dalam $x_2$ dan $x_3$, semuanya ada $C(2 + 7 - 1, 7) = C(8,7)$ cara.
(iii) Kasus $x_1 = 2$, persamaan menjadi $x_2 + x_3 = 8$. Isikan 2 ke dalam $x_2$ (karena $x_2 > 1$). Bagikan 6 buah bola sisa ke dalam $x_2$ dan $x_3$, semuanya ada $C(2 + 6 - 1, 6) = C(7,6)$ cara.

Jumlah solusi seluruhnya = $C(9, 8) + C(8, 7) + C(7, 6) = 9 + 8 + 7 = 24$ buah. ■

---

**Contoh 6.70**

Berapa banyak solusi bilangan bulat tak-negatif dari $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ jika $x_1 > 1$, $x_2 \le 4$, dan $x_3 = 1$?

Penyelesaian:
Soal ini serupa dengan Contoh 6.70 di atas. Isikan 1 bola ke dalam kotak $x_3$ karena nilai $x_3 = 1$, sehingga $x_1 + x_2 = 10$. Karena nilai $x_1$ minimum 2, masukkan 2 buah bola ke dalam $x_1$, sehingga sisa bola yang belum dibagikan = 10 – 2 = 8.
Perhatikan bahwa nilai $x_2$ maksimum 4. Kita juga dapat menganalisis kasus nilai-nilai $x_2$, yaitu 0, 1, 2, 3, dan 4 seperti penyelesaian Contoh 6.54, namun ada cara lain yang lebih ringkas sebagai berikut:

(i) Jika nilai $x_2 \geq 0$ ($x_2$ minimum 0), maka ada 8 nilai lagi yang harus didistribusikan ke $x_1$ dan $x_2$, yang dalam hal ini $n = 2$ dan $r = 8$, sehingga $C(2 + 8 - 1, 8) = C(9, 8) = 9$

(ii) Jika nilai $x_2 \geq 5$ ($x_2$ minimum 5), maka ada $8 - 5 = 3$ nilai lagi yang harus didistribusikan ke $x_1$ dan $x_2$, yang dalam hal ini $n = 2$ dan $r = 3$, sehingga $C(2 + 3 - 1, 3) = C(4, 3) = 4$

Jadi, banyaknya solusi bilangan bulat tak-negatif adalah $9 - 4 = 5$ buah. ■

---

**Contoh 6.71**

Perlihatkan bahwa $\sum_{k=0} 2^k C(n, k) = 3^n$

Penyelesaian:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, x^{n-k} y^k$$

Ambil $x = 2$ dan $y = 1$, sehingga

$$(2 + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, 2^k\, 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, 2^k$$

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, 2^k$$ ■

---

**Contoh 6.72**

Tersedia 6 huruf: *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*. Berapa jumlah pengurutan 3 huruf jika:
(a) tidak ada huruf yang diulang;
(b) boleh ada huruf yang berulang;
(c) tidak boleh ada huruf yang diulang, tetapi huruf *e* harus ada;
(d) boleh ada huruf yang berulang, huruf *e* harus ada;

Penyelesaian:

(a) (6)(5)(4) = 120 atau $P(6, 3) = 120$
(b) (6)(6)(6) = 216
(c) 3(5 . 4) = 60
(d) (6)(6) + (5)(6) + (5)(5) = 91 ■

---

**Contoh 6.73**

(a) Berapa banyak bilangan genap 2-angka?
(b) Berapa banyak bilangan ganjil 2-angka dengan setiap angka berbeda?

Penyelesaian:
(a) (9)(5) = 45
(b) (8)(5) = 40 ■

---

**Contoh 6.74**

Berapa banyak bilangan empat-angka yang tidak mengandung angka-angka yang berulang?

Penyelesaian:

$(9)(9)(8)(7) = 4536$ ■

**Contoh 6.75**

Misalkan $|A| = m$ dan $|B| = n$. Berapa banyak fungsi yang dapat dibuat dari himpunan $A$ ke himpunan $B$?

Penyelesaian:
Ingatlah kembali definisi fungsi di dalam Bab 3 bahwa setiap elemen pada himpunan $A$ harus mempunyai pemetaan ke satu dan hanya satu elemen di himpunan $B$. Elemen pertama di $A$ mempunyai $n$ kemungkinan peta di $B$, elemen kedua di $A$ mempunyai $n$ kemungkinan peta di $B$. Begitu seterusnya sehingga jumlah fungsi yang dapat dibuat dari $A$ ke $B$ (dengan menerapkan kaidah perkalian) adalah:

$$n \times n \times n \times \ldots \times n \quad \text{(sebanyak } m \text{ kali)} = n^m \text{ buah.}$$ ■

**Contoh 6.76**

Misalkan $A$ dan $B$ himpunan, $|A| = m$, $|B| = n$, dan $m \le n$. Berapa banyak fungsi satu-ke-satu (*one-to-one*) yang dapat dibuat dari himpunan $A$ ke himpunan $B$?

Penyelesaian:
Pada fungsi satu-ke-satu, setiap elemen di himpunan $A$ hanya dipetakan ke satu elemen di $B$ dan tidak ada dua elemen himpunan $A$ yang memiliki bayangan sama di $B$. Misalkan elemen-elemen himpunan $A$ adalah $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Untuk $a_1$ ada $n$ pilihan bayangan di $B$, untuk $a_2$ ada $n - 1$ pilihan bayangan di $B$ (karena bayangan untuk $a_1$ tidak dapat digunakan lagi) , …, untuk $a_k$ ada $n - k + 1$ pilihan bayangan di $B$, …, untuk $a_m$ ada sebanyak $n - m + 1$ pilihan bayangan. Dengan kaidah perkalian, maka akan terdapat sebanyak $n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - m + 1)$ fungsi satu-ke-satu dari himpunan $A$ ke himpunan $B$. ■

**Contoh 6.77**

Sebuah mobil mempunyai 4 tempat duduk. Berapa banyak cara 3 orang didudukkan jika diandaikan satu orang harus duduk di kursi sopir?

Penyelesaian:
Ada tiga pilihan orang untuk menjadi sopir. Jika satu orang sudah duduk di tempat sopir, maka dua orang lagi akan didudukkan pada 3 posisi tempat duduk yang lain. Ini dilakukan dalam $P(3, 2)$ cara. Jumlah cara mendudukkan 3 orang seluruhnya adalah $3 \times P(3, 2) = 9$ cara. ■

### Contoh 6.78

Tentukan banyak cara pengaturan agar 3 orang mahasiswa Jurusan Teknik Informatika (IF), 4 orang mahasiswa Teknik Kimia (TK), 4 orang mahasiswa Teknik Geologi (GL), dan 2 orang mahasiswa Farmasi (FA) dapat duduk dalam satu baris sehingga mereka dari departemen yang sama duduk berdampingan?

Penyelesaian:
Ada 4! atau $P(4, 4)$ cara untuk menyusun tempat duduk dari 4 departemen yang berbeda. Untuk setiap kasus, ada 3! cara untuk mengatur duduk mahasiswa IF, 4! cara untuk mengatur duduk mahasiswa TK, 4! cara untuk mengatur duduk mahasiswa GL, dan 2! cara untuk mengatur duduk mahasiswa FA.
Jumlah cara pengaturan duduk seluruhnya: $4! \times 3! \times 4! \times 4! \times 2!$ ■

### Contoh 6.79

100 orang mahasiswa dikirim ke 5 negara, masing-masing negara 20 orang mahasiswa. Berapa banyak cara pengiriman mahasiswa?

Penyelesaian:

$$P(100; 20, 20, 20, 20, 20) = \frac{100!}{(20!)(20!)(20!)(20!)(20!)} \text{ cara}$$

Cara lain:

$$C(100, 20)C(80, 20)C(60, 20)C(40, 20)C(20,20) = \frac{100!}{(20!)(20!)(20!)(20!)(20!)} \text{ cara.}$$ ■

### Contoh 6.80

Berapa jumlah cara $n$ wanita dan n pria didudukkan pada satu baris yang berisi $2n$ buah kursi jika pria dan wanita duduk berselang-seling.

Penyelesaian:

(i) Dudukkan $n$ pria pada kursi bernomor ganjil → ada $n!$ cara atau $P(n, n)$. Setelah pria duduk, wanita dapat didudukkan pada kursi bernomor genap dengan $n!$ cara. Jadi ada $(n!)^2$ cara pengaturan kursi.
(ii) Dudukkan $n$ pria pada kursi bernomor genap → ada $n!$ cara atau $P(n, n)$. Setelah pria duduk, wanita dapat didudukkan pada kursi bernomor ganjil dengan $n!$ cara. Jadi ada $(n!)^2$ cara pengaturan kursi.

Total cara pengaturan duduk = (i) + (ii) = $(n!)^2 + (n!)^2 = 2(n!)^2$ ■

### Contoh 6.81

(a) Berapa banyak cara memasang 10 pesawat telepon yang identik di 12 kamar hotel?
(b) Berapa banyak cara memasang 10 pesawat telepon (4 berwarna merah, 3 putih, 3 hijau) di 12 kamar?

Penyelesaian:

(a) $C(12, 10)$

(b) $P(12; 4, 3, 3, 2) = \dfrac{12!}{(4!)(3!)(3!)(2!)}$

Cara lain: $C(12, 4)C(8, 3)C(5, 3)C(2, 2) = \dfrac{12!}{(4!)(3!)(3!)(2!)}$ ■

---

**Contoh 6.82**

Berapa jumlah permutasi huruf-huruf yang membentuk kata 'ASBESTOS'?

Penyelesaian:

Cara 1: $P(8; 1, 3, 1, 1, 1, 1) = \dfrac{8!}{(1!)(3!)(1!)(1!)(1!)(1!)} = 6720$ buah.

Cara 2: huruf-huruf yang tidak berulang: $A$, $B$, $E$, $O$, $T$. Ada $P(8, 5)$ cara untuk menempatkan kelima huruf tersebut. Ada 1 cara untuk menempatkan 3 huruf $S$ ke 3 posisi lainnya. Jumlah permutasi seluruhnya adalah

$$= P(8, 5) \times 1 = P(8, 5) = \frac{8!}{3!} = 6720 \text{ buah.}$$ ■

---

**Contoh 6.83**

Ada 5 orang mahasiswa jurusan Matematika dan 7 orang mahasiswa jurusan Informatika. Berapa banyak cara membentuk panitia yang terdiri dari 4 orang jika:
(a) tidak ada batasan jurusan
(a) semua anggota panitia harus dari jurusan Matematika
(b) semua anggota panitia harus dari jurusan Informatika
(c) semua anggota panitia harus dari jurusan yang sama
(d) 2 orang mahasiswa per jurusan harus mewakili.

Penyelesaian:
(a) $C(12, 4)$
(b) $C(5,4)\ C(7,0)$
(c) $C(7,4)\ C(5,0)$
(d) $C(5,4)\ C(7,0) + C(7,4)\ C(5,0)$
(e) $C(5,2)\ C(7,2)$

■

---

**Contoh 6.84**

Tujuh belas orang mahasiswa akan pergi ke sebuah pesta, dan terdapat 5 buah kendaraan untuk mereka gunakan. Jumlah tempat duduk yang kosong pada setiap kendaraan adalah 4, 3, 2, 5, dan 1, sehingga ada 2 orang mahasiswa yang tidak terangkut. Berapa jumlah cara mengangkut seluruh mahasiswa kecuali 2 orang ke pesta?

Penyelesaian:

$$C(17;4,3,2,5,1,2) = \frac{17!}{(4!)(3!)(2!)(5!)(1!)(2!)}$$ ■

---

**Contoh 6.85**

Berapa banyak cara membagikan 5 buah kartu remi yang diambil dari tumpukan 52 buah kartu ke masing-masing dari 4 orang?

Penyelesaian:

$C(52, 5) \times C(47, 5) \times C(42, 5) \times C(37, 5) =$

$$\frac{52!}{(5!)(47!)} \cdot \frac{47!}{(5!)(42!)} \cdot \frac{42!}{(5!)(37!)} \cdot \frac{37!}{(5!)(32!)} = \frac{52!}{(5!)(5!)(5!)(5!)(32!)}$$ ■

---

**Contoh 6.86**

Di perpustakaan Teknik Informatika terdapat 3 jenis buku: buku Algoritma dan Pemrograman, buku Matematika Diskrit, dan buku Basisdata. Perpustakaan memiliki paling sedikit 10 buah buku untuk masing-masing jenis. Berapa banyak cara memilih 10 buah buku?

Penyelesaian:

Diketahui $n = 3$, $r = 10$.

Jumlah cara memilih buku = $C(3 + 10 - 1, 10) = C(12, 10) = 66$ ■

---

**Contoh 6.87**

Berapa banyak cara membentuk sebuah panitia yang beranggotakan 5 orang yang dipilih dari 7 orang pria dan 5 orang wanita, jika di dalam panitia tersebut paling sedikit beranggotakan 2 orang wanita?

Penyelesaian:

Jumlah wanita di dalam panitia: 2, 3, 4, atau 5 orang.

Pilih 2 orang dari 5 wanita → ada $C(5, 2)$ cara; sisanya 3 orang dipilih dari 7 pria → $C(7, 3)$ cara.

Pilih 3 orang dari 5 wanita → ada $C(5, 3)$ cara; sisanya 2 orang dipilih dari 7 pria → $C(7, 2)$ cara.

Pilih 4 orang dari 5 wanita → ada $C(5, 4)$ cara; sisanya 1 orang dipilih dari 7 pria → $C(7, 1)$ cara.

Pilih 5 orang dari 5 wanita → ada $C(5, 5)$ cara; sisanya 0 orang dipilih dari 7 pria → $C(7, 0)$ cara.

Jumlah cara pembentukan panitia seluruhnya =

$C(5, 2)C(7, 3) + C(5, 3)C(7, 2) + C(5, 4)C(7, 1) + C(5, 5)C(7,0)$ ■

**Contoh 6.88**

Dari sejumlah besar koin 25-an, 50-an, 100-an, dan 500-an, berapa banyak cara lima koin dapat diambil?

Penyelesaian:
Ini adalah kombinasi dengan membolehkan pengulangan, karena koin tertentu dapat terambil lebih dari sekali. Di sini $n = 4$, $r = 5$, sehingga seluruhnya ada $C(4 + 5 - 1, 5) = C(8, 5)$ cara untuk mengambil lima koin. ■

**Contoh 6.89**

Tentukan banyaknya cara agar 4 buku matematika, 3 buku sejarah, 3 buku kimia, dan 2 buku sosiologi dapat disusun dalam satu baris sedemikian sehingga (untuk masing-masing soal)
(a) semua buku yang topiknya sama letaknya bersebelahan,
(b) urutan buku dalam susunan bebas.

Penyelesaian:
(a) Soal ini mirip dengan Contoh 6.77. Ada 4! atau $P(4, 4)$ cara untuk menyusun buku-buku dari 4 kategori berbeda. Untuk setiap kategori buku, ada 4! cara untuk mengatur buku-buku matematika, 3! cara untuk mengatur buku-buku sejarah, 3! cara untuk mengatur buku-buku kimia, dan 2! cara untuk mengatur buku-buku sosiologi. Jumlah cara pengaturan buku seluruhnya: $4! \times 4! \times 3! \times 3! \times 2! = 41.472$ cara.
(b) Jika masalahnya adalah seperti soal b, maka ini adalah masalah permutasi dengan pengulangan. Jumlah cara pengaturan buku adalah

$$P(12; 4, 3, 3, 2) = \frac{12!}{4! \times 3! \times 3! \times 2} = 277.200 \text{ cara.}$$ ■

**Contoh 6.90**

Panjang nomor telpon di kota Bandung adalah 7 angka (*XXX-XXXX*, yang dalam hal ini *X* merepresentasikan sembarang angka 0 sampai 9)). Tiga angka pertama menyatakan kode area. Kode area untuk wilayah Dago adalah 250, yaitu 250-*XXXX*. (a) Berapa jumlah nomor sambungan telepon yang dapat didefinisikan oleh PT Telkom? (b) Andaikan jumlah rumah atau kantor di wilayah Dago adalah 50.000 buah dan diasumsikan setiap rumah atau kantor meminta satu nomor sambungan telepon. Apakah panjang 7 angka untuk nomor telepon di kota Bandung masih mencukupi?

Penyelesaian:
(a) Untuk nomor telepon 250-*XXXX*, *X* yang pertama dapat diisi dengan 10 cara (0 sampai 9), *X* yang kedua juga 10 cara, demikian pula untuk angka *X* ketiga dan keempat. Jumlah nomor telepon yang dapat didefinisikan adalah $10^4 = 10.000$.
(b) Kita dapat melihat bahwa panjang 7 angka pada nomor telepon di kota Bandung tidak mencukupi untuk 100.000 permintaan. Perlu tambahan satu angka lagi sehingga

menjadi 8 angka, yaitu 250-*XXXXX*. Dengan tambahan satu angka lagi, maka jumlah nomor telepon yang dapat didefinisikan adalah $10^5 = 100.000$ buah (jumlah ini masih lebih besar dari 50.000).

■

**Contoh 6.91**

Tiga belas orang mempunyai nama depan Ali, Ahmad, dan Agus, serta nama belakang Faisal, Handoko, Hamidi, dan Rahman. Tunjukkan bahwa paling sedikit dua orang mempunyai nama depan dan nama belakang sama.

Penyelesaian:

Ada 3 nama depan dan 4 nama belakang, jadi terdapat $3 \times 4 = 12$ nama yang mungkin untuk 13 orang. Jika 13 orang dianggap sebagai merpati dan 12 nama-nama orang sebagai 12 buah sarang merpati, maka menurut prinsip sarang merpati paling sedikit ada 2 orang yang mempunyai nama depan dan nama belakang sama. ■

## Soal Latihan

1. Jika suatu toko menjual 3 ukuran T-Shirt dengan 6 warna berbeda, dan setiap *T-Shirt* bisa bergambar naga, buaya, atau tidak bergambar sama sekali, berapa jenis *T-Shirt* yang dapat anda beli ?

2. Perusahaan pakaian membuat satu set pakaian yang dapat dikombinasikan, yang terdiri dari dua blus, dua pasang celana panjang, satu kemeja, dan satu *blazer*. Berapa kombinasi pakaian yang dapat dibuat dari set pakaian tersebut ? Jika pada set pakaian ditambahkan sebuah *sweater*, berapakan kombinasinya sekarang ? (Catatan: *blazer* harus dipakai di atas blus atau kemeja, atau tidak dipakai sama sekali. Tetapi *sweater* bisa langsung dipakai tanpa blus atau kemeja.)

3. Berapakah jumlah kata (terdiri dari 8 huruf) yang dapat dibentuk dari 26 huruf, tanpa memperhitungkan arti kata yang terbentuk. Buatlah untuk dua kemungkinan (boleh mengulang huruf atau tidak boleh mengulang huruf).

4. Enam orang melamar pekerjaan untuk 3 pekerjaan yang sama, yang masing-masing akan ditempatkan di Jakarta, Bogor, dan Bandung. Berapakah kemungkinan susunan orang yang diterima untuk menempati posisi tersebut ?

5. Suatu peubah (*variable*) di dalam bahasa pemrograman harus berupa sebuah huruf atau sebuah huruf diikuti dengan sebuah angka. Berapa banyak nama peubah yang dapat dibuat (tinjau dua buah kasus: huruf kapital dan huruf kecil dibedakan, dan huruf kapital dan huruf kecil tidak dibedakan)?

6. Dalam berapa banyak cara huruf-huruf $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ dapat disusun jika huruf $b$ harus di sebelah kiri dan bersebelahan dengan huruf $e$?

7. (a) Misalkan pengulangan tidak dibolehkan. Berapa banyak bilangan empat-angka dapat dibentuk dari angka-angka 1, 2, 3, 5, 7, 8?
   (b) Berapa banyak bilangan dalam (a) yang genap?
   (c) Berapa banyak bilangan dalam (a) yang lebih kecil dari 4000?

8. Di dalam sebuah kelas terdapat 100 mahasiswa, 40 orang diantaranya laki-laki.
   (a) Berapa banyak cara dapat dibentuk sebuah panitia 10-orang?
   (b) Ulangi pertanyaan (a) jika banyaknya laki-laki harus sama dengan banyaknya perempuan.
   (c) Ulangi pertanyaan (a) jika panitia itu harus terdiri dari enam laki-laki dan empat perempuan *atau* empat laki-laki dan enam perempuan?

9. Carilah jumlah himpunan bagian dari $A = \{a, b, c, d, e\}$? (Gunakan rumus kombinasi)

10. Berapakah jumlah himpunan bagian dari himpunan $B = \{1, 2, \ldots, 10\}$ yang mempunyai anggota paling sedikit enam?

11. Seseorang mempunyai 10 kawan. Dalam berapa banyak cara ia dapat pergi makan ke restoran dengan dua atau lebih kawannya?

12. Berapa banyak permutasi bilangan yang dibentuk dari $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?

13. Berapa banyak *string* 5-huruf yang dapat dibentuk dari huruf-huruf $a$, $b$, $c$, $d$, dan $e$ sedemikian sehingga $a$ tidak boleh diikuti langsung oleh $b$?

14. Berapa banyak bilangan bulat positif empat-angka antara 1000 dan 9999 (termasuk 1000 dan 9999) yang habis dibagi 5 dan 7?

15. Berapa banyak jumlah bilangan bulat 5-angka yang mengandung tepat 1 buah angka 6? (Catatan: angka pertama tidak boleh 0)

16. Sebuah kelompok terdiri dari 7 orang wanita dan 4 orang pria. Berapa banyak perwakilan 4-orang yang dapat dibentuk dari kelompok itu jika paling sedikit harus ada 2 orang wanita di dalamnya?

17. Sebuah klub penggemar mobil VW terdiri atas 8 pria dan 6 wanita. Terdapat 1 pasang suami istri di antara anggota klub tersebut. Berapa banyak cara membentuk sebuah panitia yang terdiri atas 3 pria dan 3 wanita sedemikian sehingga memasukkan salah satu dari suami atau istri itu, tetapi tidak keduanya?

18. Sebuah klub mobil antik beranggotakan 6 orang pria dan 5 orang wanita. Mereka akan membentuk panitia yang terdiri dari lima orang. Berapa banyak jumlah panitia yang dapat dibentuk jika panitianya terdiri dari paling sedikit satu pria dan satu wanita.

19. Tentukan banyaknya "kata" yang terbentuk dari huruf-huruf dalam kata "SELEBES" jika (masing-masing soal):
    (c) setiap "kata" berawal dengan huruf E dan berakhir dengan E,
    (b) pada setiap "kata", tiga huruf E berdampingan satu sama lain.

20. Berapa banyak solusi bilangan bulat tak-negatif dari ketidaksamaan
    $$x_1 + x_2 + x_3 \leq 10?$$

21. Dalam berapa banyak cara 22 buku yang berbeda dapat diberikan kepada 5 mahasiswa sehingga 2 diantara mereka memperoleh 5 buku dan 3 lainnya memperoleh 4 buku.

22. Dari sejumlah besar koin 25-an, 50-an, 100-an, dan 500-an, dalam berapa banyak cara lima oin diambil?

23. Berapa banyak bilangan 8-angka yang dapat dibentuk dari angka-angka 6, 3, 3, 5, 1, 1, 1, 5?

24. Palindrom adalah barisan karakter (huruf atau angka) yang bila dibaca dari depan atau dari belakang adalah sama. Contoh: KATAK, MALAM, 21477412, 36963. Untuk soal ini kita hanya meninjau palindrom yang dibentuk dari barisan angka. Berapa banyak bilangan palindrom 9-angka yang dapat dibentuk dari angka 0, 1, ..., 9 dengan ketentuan tidak boleh ada pengulangan angka pada setengah bagian (misalnya, 366191663 tidak dibenarkan karena 6 dipakai 2 kali)?

25. Berapa banyak bilangan bulat yang panjangnya 20 angka yang mengandung dua buah angka 0, empat buah angka 1, tiga buah angka 2, satu buah angka 3, dua buah angka 4, tiga buah angka 5, dua buah angka 7, dan tiga buah angka 9?

26. Dari sejumlah besar CD (*compact disc*) di dalam kotak yang berisi program-program aplikasi $A$, $B$, $C$, $D$, dan $E$, berapa banyak cara 10 CD dapat diambil?

27. Perlihatkan bahwa $C(n, k) = C(n, n-k)$.

28. Sebuah pesan kawat dibentuk dari rangkaian lima garis putus-putus (*dash*) dan tiga buah titik (*dot*). Berapa banyak pesan yang dapat dibentuk?

29. Lima belas pemain basket akan direkrut oleh tiga tim profesional di Bandung, Jakarta, dan Surabaya, sedemikian sehingga setiap tim akan merekrut lima pemain. Dalam berapa banyak cara ini dapat dilakukan?

30. Sebuah kardus berisi banyak bola berwarna merah, biru, dan ungu. Akan diambil 10 buah bola saja.
    (a) Berapa banyak cara mengambil bola jika bola merah paling sedikit 5.
    (b) Berapa banyak cara mengambil bola jika bola merah paling banyak 5.

31. Berapa banyak cara $2n$ orang dapat dibagi menjadi $n$ pasangan?

32. Jabarkan bentuk perpangkatan $(3x - 2y)^4$.

33. Tentukan suku keempat dari $(5 - 4x)^6$.

34. Buktikan bahwa $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n, k) = 0$.

35. Buktikan dengan induksi matematik teorema Binomial

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k) x^{n-k} y^k$$

36. Tunjukkan bahwa sembarang 6 kelas kuliah pasti terdapat dua kelas yang dijadwalkan pada hari yang sama, dengan asumsi tidak ada kuliah pada Hari Sabtu (akhir pekan).

37. Tunjukkan bahwa di antara kelompok dengan 5 buah bilangan bulat, terdapat dua buah bilangan dengan sisa yang sama jika dibagi dengan 4.

38. Sebuah kotak bola *bowling* berisi 10 bla berwarna merah dan 10 buah bola berwarna biru. Seorang pemain memilih bola secara acak tanpa melihat ke dalam kotak.
    (a) Berapa banyak bola yang harus diambil untuk memastikan paling sedikit tiga bola berwarna sama?
    (b) Berapa banyak bola yang harus diambil untuk memastikan paling sedikit tiga bola berwarna biru?

39. Berapa peluang sebuah bilangan bulat yang dipilih secara acak dari 100 bilangan bulat positif pertama bernilai genap?

40. Berapa peluang dari 5 buah kartu remi yang dibagi tidak mengandung ratu satu buah pun?

41. Berapa peluang bahwa sebuah bilangan bulat yang tidak melebihi 100 habis dibagi 3?

42. Sebuah dadu dan sebuah koin uang logam dilempar bersamaan. Berapa peluang angka yang muncul adalah 3 dan muka koin yang muncul adalah gambar?

43. Tujuh kecelakaan mobil terjadi dalam seminggu. Berapa peluang bahwa semuanya terjadi pada hari yang sama?

44. Ada sepuluh pasang sepatu di dalam lemari. Jika delapan sepatu diambil secara acak, berapa peluang tidak ada sepasang sepatu yang terambil?

45. Sepuluh orang masuk lift pada lantai dasar sebuah gedung bertingkat 20. Berapa peluang mereka semua ke luar pada lantai/tingkat yang berbeda?

Lebih banyak lagi yang terdapat di langit dan di bumi, Horatio,
daripada yang engkau mimpikan di dalam filsafatmu.
**(Shakespeare dalam lakon "Hamlet")**