BAB 4

Induksi Matematika

> Kebijaksanaan hanya ditemukan di dalam kebenaran.
> **(Goethe)**

Di dalam matematika, sebuah proposisi atau pernyataan tidak hanya sekadar ditulis. Kita juga harus mengerti apa yang menyebabkan proposisi tersebut benar, yaitu bukti (*proof*). Di dalam Bab 1 kita sudah membicarakan metode pembuktian untuk argumen, dan di dalam Bab 3 kita membicarakan pembuktian proposisi yang menyangkut himpunan. Di dalam Bab 4 ini kita memfokuskan pembuktian proposisi yang hanya menyangkut bilangan bulat, misalnya pembuktian pernyataan "Jumlah n buah bilangan bulat positif pertama adalah $n(n + 1)/2$". Metode pembuktian untuk proposisi perihal bilangan bulat adalah **induksi matematika**.

Induksi matematik merupakan teknik pembuktian yang baku di dalam matematika. Melalui induksi matematik kita dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas.

Menurut sejarahnya, induksi matematika berawal pada akhir abad ke-19. Dua orang matematikawan yang mempelopori perkembangan induksi matematika adalah R. Dedekind dan G. Peano [DOE85]. Dedikind mengembangkan sekumpulan aksioma yang mengambarkan bilangan bulat positif. Peano memperbaiki aksioma tesebut dan memberikannya interpretasi logis. Keseluruhan aksioma tersebut dinamakan *Postulat Peano*.

Bab 4 ini berisi prinsip-prinsip induksi matematika, mulai dari induksi sederhana, perampatannya, sampai pada bahasan bentuk induksi secara umum.

4.1 Proposisi Perihal Bilangan Bulat

Proposisi yang menyangkut perihal bilangan bulat cukup banyak dijumpai di dalam matematika diskrit maupun di dalam ilmu komputer. Proposisi tersebut mengkaitkan suatu masalah yang dihubungkan dengan bilangan bulat. Untuk memberikan ilustrasi mengenai proposisi seperti apa yang dimaksudkan, marilah tinjau dua contoh proposisi sederhana sebagai berikut.

Di dalam matematika, banyak teorema yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n, yang dalam hal ini $p(n)$ disebut juga fungsi proposisi. Contoh pertama, misalkan $p(n)$ adalah proposisi yang menyatakan: "Jumlah bilangan bulat positif dari 1 sampai n adalah $n(n + 1)/2$". Buktikan bahwa $p(n)$ benar!

Kalau kita coba dengan beberapa nilai n, memang timbul dugaan bahwa $p(n)$ benar. Misalnya untuk $n = 5$, $p(5)$ adalah: Jumlah bilangan bulat positif dari 1 sampai 5 adalah $5(5 + 1)/2$. Terlihat bahwa

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = 5(6)/2$$

Untuk nilai-nilai n yang lain kita akan dapatkan kesimpulan serupa. Sayangnya, instansiasi seperti $p(5)$ tidak dapat berlaku sebagai bukti bahwa $p(n)$ benar untuk seluruh n. Kita memang sudah menunjukkan bahwa $n = 5$ berada di dalam himpunan kebenaran $p(n)$. Tetapi, kita tahu bahwa 5 bukanlah satu-satunya bilangan bulat positif. Karena bilangan bulat positif tidak terhingga banyaknya, kita tentu tidak mungkin mencoba sekuruhnya untuk membuktikan $p(n)$ benar. Jadi, kita tidak dapat menggunakan pendekatan semacam ini untuk membuktikan kebenaran pernyataan perihal bilangan bulat.

Contoh kedua, kita ingin menemukan rumus jumlah dari n buah bilangan ganjil positif yang pertama. Misalnya untuk $n = 1, 2, 3, 4, 5$, kita mengamati jumlah n bilangan ganjil positif pertama adalah

$$n = 1 \Rightarrow 1 = 1$$
$$n = 2 \Rightarrow 1 + 3 = 4$$
$$n = 3 \Rightarrow 1 + 3 + 5 = 9$$
$$n = 4 \Rightarrow 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$
$$n = 5 \Rightarrow 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

Dari nilai-nilai penjumlahan itu kita meduga bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2. Kita perlu membuktikan bahwa perkiraan kita tersebut benar jika memang itu faktanya. Bagaimana cara membuktikannya dengan induksi matematik?

Contoh-contoh proposisi perihal bilangan bulat yang lainnya misalnya:

1. Setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima.
2. Untuk semua $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3.
3. Untuk membayar biaya pos sebesar n sen dolar ($n \geq 8$) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan 5 sen dolar.
4. Di dalam sebuah pesta, setiap tamu berjabat tangan dengan tamu lainnya hanya sekali. Jika ada n orang tamu maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah $n(n-1)/2$.
5. Banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari sebuah himpunan yang beranggotakan n elemen adalah 2^n.

Proposisi-proposisi semacam di ataslah yang dapat dibuktikan dengan induksi matematika. Mari kita pahami cara pembuktian dengan induksi matematika, dimulai dengan prinsip induksi sederhana terlebih dahulu, seperti yang dijelaskan di dalam upabab berikut.

4.2 Prinsip Induksi Sederhana

Prinsip induksi sederhana berbunyi sebagai berikut:

Misalkan p(n) adalah proposisi perihal bilangan bulat positif dan kita ingin membuktikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan proposisi ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. *p(1) benar, dan*
2. *jika p(n) benar, maka p(n + 1) juga benar untuk setiap n ≥ 1.*

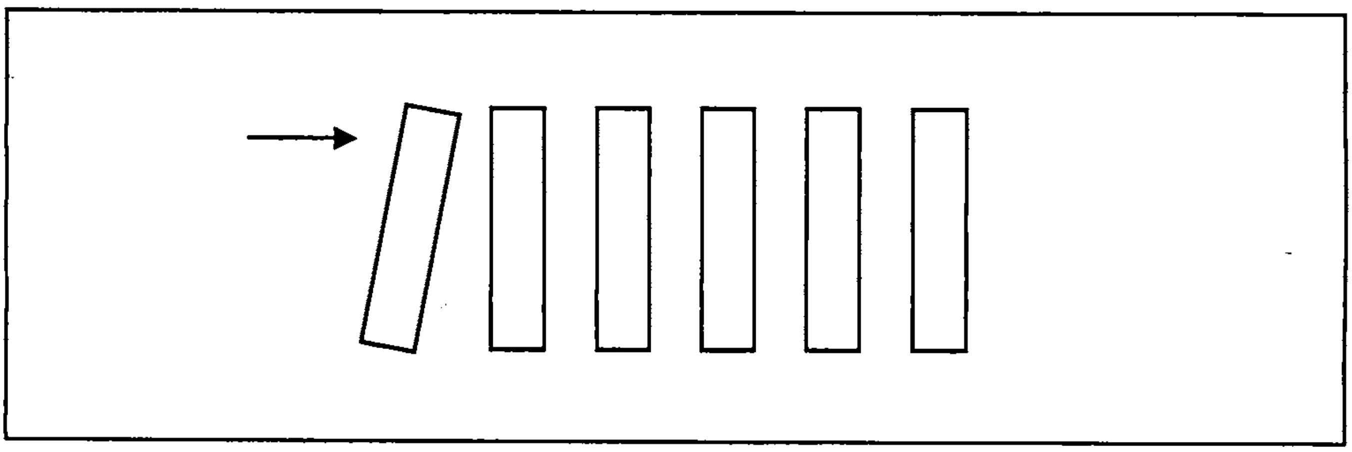
sehingga p(n) benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Langkah 1 dinamakan **basis induksi**, sedangkan langkah 2 dinamakan **langkah induksi**. Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan **hipotesis induksi**. Bila kita sudah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Basis induksi digunakan untuk memperlihatkan bahwa pernyataan tersebut benar bila n diganti dengan 1, yang merupakan bilangan bulat positif terkecil. Kemudian kita harus memperlihatkan bahwa implikasi $p(n) \rightarrow p(n + 1)$ benar untuk setiap bilangan bulat positif. Untuk membuktikan implikasi tersebut benar untuk setiap bilangan bulat positif n, kita perlu menunjukkan bahwa $p(n+1)$ tidak mungkin salah bila $p(n)$ benar. Hal ini diselesaikan dengan cara memperlihatkan bahwa berdasarkan hipotesis $p(n)$ benar maka $p(n+1)$ juga harus benar.

Perhatikan bahwa dalam induksi matematik kita tidak mengasumsikan bahwa $p(n)$ benar untuk *semua* bilangan bulat positif. Kita hanya memperlihatkan bahwa jika diasumsikan $p(n)$ benar, maka $p(n + 1)$ juga benar untuk setiap n positif [ROS03].

Fakta bahwa langkah 1 dan langkah 2 bersama-sama memperlihatkan $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif adalah jelas secara intuitif. Dari langkah 1, kita mengetahui bahwa $p(1)$ benar. Dari langkah (2) kita mengetahui bahwa jika $p(1)$ benar maka $p(2)$ juga benar. Tetapi, $p(1)$ sudah ditunjukkan benar dan di sini $p(2)$ juga harus benar. Dari langkah (2) kita juga mengetahui bahwa jika p(2) benar maka $p(3)$ juga benar. Karena kita sudah menunjukkan bahwa $p(2)$ benar, maka $p(3)$ juga benar, dan seterusnya. Secara intuitif kita melihat bahwa langkah 1 dan langkah 2 bersama-sama memperlihatkan bahwa $p(1), p(2), \ldots, p(n)$ semuanya benar. Pembuktian dengan induksi matematik mirip dapat kita ilustrasikan dengan fenomena yang dikenal dengan **efek domino**. Sejumlah batu domino diletakkan berdiri dengan jarak ruang yang sama satu sama lain (lihat Gambar 4.1). Untuk merebahkan semua batu domino, kita hanya perlu mendorong domino 1 ke kanan. Jika domino 1 di dorong ke kanan, ia akan mendorong domino 2, domino 2 mendorong domino 3, begitu seterusnya sehingga semua batu domino rebah ke kanan.



Gambar 4.1 Efek domino

Contoh-contoh berikut memeprlihatkan pembuktian proposisi perihal bilangan bulat dengan menggunakan prinsip induksi sederhana.

Contoh 4.1

Tunjukkan bahwa untuk $n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$ melalui induksi matematika.

Penyelesaian:
Andaikan bahwa $p(n)$ menyatakan proposisi bahwa untuk $n \geq 1$, jumlah n bilangan bulat positif pertama adalah $n(n + 1)/2$, yaitu $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$. Kita harus membuktikan kebenaran proposisi ini dengan dua langkah induksi sebagai berikut:

(i) *Basis induksi:* $p(1)$ benar, karena untuk $n = 1$ kita peroleh

$$
\begin{aligned}
1 &= 1(1 + 1)/2 \\
&= 1(2)/2 \\
&= 2/2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

(i) *Langkah induksi:* Misalkan $p(n)$ benar, yaitu mengasumsikan bahwa

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$$

adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus memperlihatkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n + 1) = (n + 1)\,[(n + 1) + 1]/2$$

Untuk membuktikan ini, tunjukkan bahwa

$$
\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n + 1) &= (1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (n + 1) \\
&= [n(n + 1)/2\,] + (n + 1) \\
&= [\,(n^2 + n)/2\,] + (n + 1) \\
&= [\,(n^2 + n)/2\,] + [\,(2n + 2)/2\,] \\
&= (n^2 + 3n + 2)/2 \\
&= (n + 1)(n + 2)/2 \\
&= (n + 1)\,[\,(n + 1) + 1]/2
\end{aligned}
$$

Karena langkah (i) dan (ii) telah dibuktikan benar, maka untuk semua bilangan bulat positif n, terbukti bahwa untuk semua $n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$. ■

Contoh 4.2

Gunakan induksi matematik untuk membuktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Penyelesaian:
Misakan $p(n)$ adalah proposisi yang menyatakan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

(i) *Basis induksi*: $p(1)$ benar, karena jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah $1^2 = 1$.

(ii) *Langkah induksi*: Misalkan $p(n)$ benar, yaitu asumsikan bahwa

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

adalah benar (hipotesis induksi) [catatlah bahwa bilangan ganjil positif ke-n adalah $(2n - 1)$].

Kita harus memperlihatkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) &= [1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)] + (2n + 1) \\ &= n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Karena langkah basis dan langkah induksi keduanya telah diperlihatkan benar, maka jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2. ■

Contoh 4.3

Untuk semua $n \geq 1$, buktikan dengan induksi matematik bahwa $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3.

Penyelesaian:
Misalkan $p(n)$ adalah proposisi yang menyatakan bahwa untuk semua $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3.

(i) *Basis induksi:* $p(1)$ benar, karena untuk $n = 1$, $1^3 + 2(1) = 3$ adalah kelipatan 3.

(ii) *Langkah induksi:* Misalkan $p(n)$ benar, yaitu proposisi

$n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3

diasumsikan benar (hipotesis induksi). Kita harus memperlihatkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu

$(n + 1)^3 + 2(n + 1)$ adalah kelipatan 3

Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (n + 1)^3 + 2(n + 1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (2n + 2) \\ &= (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3 \\ &= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1) \end{aligned}$$

Karena $(n^3 + 2n)$ adalah kelipatan 3 (dari hipotesis induksi) dan $3(n^2 + n + 1)$ juga kelipatan 3, maka $(n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$ adalah jumlah dua buah bilangan kelipatan 3; karena itu $(n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$ juga kelipatan tiga. Jadi, untuk $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa untuk semua $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3. ■

Contoh 4.4

Cuplikan algoritma di bawah ini menghitung hasil kali dua buah bilangan bulat a (≥ 0) dan b tanpa menggunakan langsung operasi perkalian, yaitu dengan cara menjumlahkan b sebanyak a kali. Hasilnya adalah ab.

```
i ← 0
j ← 0
while i ≠ a do      (**)
   j ← j + b
   i ← i + 1
endwhile
{ i = a, j = ab }
```

Buktikan bahwa setiap kali eksekusi mencapai awal kalang *while-do* (ditandai dengan **), kita menemukan bahwa $j = i \cdot b$.

Penyelesaian:
Tabel berikut mengenumerasi nilai i dan j setiap kali eksekusi algoritma mencapai awal kalang *while-do*.

Tiap kali (n) eksekusi mencapai awal kalang *while-do*	Nilai i	Nilai j
1	0	0
2	1	$1 \cdot b$
3	2	$2 \cdot b$
4	3	$3 \cdot b$
...	...	...
$a + 1$	a	$a \cdot b$

Dari tabel di atas kita menarik kesimpulan bahwa setiap kali eksekusi algoritma mencapai awal kalang *while-do*, nilai $j = i \cdot b$. Untuk membuktikannya, kita menggunakan induksi matematik sebagai berikut: Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bahwa setiap kali (n) eksekusi algoritma mencapai awal kalang *while-do*, nilai $j_n = i_n \cdot b$, yang dalam hal ini nilai i dan j pada eksekusi ke-n dinyatakan sebagai i_n dan j_n.

(i) *Basis induksi:* $p(1)$ benar, karena pertama kali ($n = 1$) eksekusi mencapai awal kalang *while-do*, $i = 0$ dan $j = 0$, dan bahwa nilai $j_n = i_n \cdot b = 0 \cdot b = 0$ adalah benar.

(ii) *Langkah induksi:* Misalkan $p(n)$ benar, yaitu asumsikan $j_n = i_n \cdot b$ saat eksekusi mencapai awal kalang *while-do*. Kita harus menunjukkan bahwa $p(n+1)$ benar, yaitu saat eksekusi mencapai awal kalang *while-do* kali untuk yang ke-(n+1) kalinya, maka $j_{n+1} = i_{n+1} \cdot b$ juga benar.

Kita dapat melihat bahwa nilai i yang baru bertambah sebesar 1 dari nilai i yang lama, dan nilai j yang baru bertambah sebesar b dari nilai j yang lama. Jadi,

$$i_{n+1} = i_n + 1$$

dan

$$\begin{aligned} j_{n+1} &= j_n + b \\ &= (i_n \cdot b) + b \quad \text{(dari hipotesis induksi)} \\ &= (i_n + 1) \cdot b \\ &= i_{n+1} \cdot b \end{aligned}$$

Karena langkah 1 dan 2 keduanya sudah diperlihatkan benar, maka terbukti setiap kali eksekusi algoritma mencapai awal kalang *while-do*, nilai $j = i \cdot b$. ■

4.3 Prinsip Induksi yang Dirampatkan

Kadang-kadang kita ingin membuktikan bahwa pernyataan $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $\geq n_0$, jadi tidak hanya bilangagan bulat yang dimulai dari 1 saja. Prinsip induksi sederhana dapat dirampatkan (*generalized*) untuk menunjukkan hal ini sebagai berikut:

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. *$p(n_0)$ benar, dan*
2. *jika $p(n)$ benar maka $p(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq n_0$,*

sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.

Contoh 4.5

Untuk semua bilangan bulat tidak-negatif n, buktikan dengan induksi matematik bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Penyelesaian:
Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bahwa untuk semua bilangan bulat tidak-negatif n, $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

(i) *Basis induksi:* $p(0)$ benar, karena untuk $n = 0$ (bilangan bulat tidak negatif pertama), kita peroleh:

$$\begin{aligned} 2^0 = 1 &= 2^{0+1} - 1 \\ &= 2^1 - 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(ii) *Langkah induksi:* Misalkan $p(n)$ benar, yaitu proposisi

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

diasumsikan benar (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$$

Hal ini kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} &= (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n) + 2^{n+1} \\ &= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} \text{ (dari hipotesis induksi)} \\ &= (2^{n+1} + 2^{n+1}) - 1 \\ &= (2 \,.\, 2^{n+1}) - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1 \\ &= 2^{(n+1)+1} - 1 \end{aligned}$$

Karena langkah 1 dan 2 keduanya telah diperlihatkan benar, maka untuk semua bilangan bulat tidak-negatif n, terbukti bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ ■

Contoh 4.6

Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n$ masing-masing adalah himpunan, buktikan dengan induksi matematik hukum De Morgan rampatan berikut:

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$$

Penyelesaian:
Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bahwa jika $A_1, A_2, \ldots, A_n$ masing-masing adalah himpunan, maka berlaku hukum De Morgan rampatan berikut:

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$$

(i) *Basis induksi:* $p(2)$ benar, karena untuk $n = 2$,

$$\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$$

sesuai dengan hukum De Morgan untuk 2 buah himpunan.

(ii) *Langkah induksi:* Misalkan $p(n)$ benar, yaitu asumsikan

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$$

adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus memperlihatkan bahwa untuk $p(n + 1)$ benar, yaitu

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n} \cup \overline{A_{n+1}}$$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}} &= \overline{(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \cap A_{n+1}} \\
&= \overline{(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)} \cup \overline{A_{n+1}} && \text{(Hukum De Morgan)} \\
&= (\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}) \cup \overline{A_{n+1}} && \text{(dari hipotesis induksi)} \\
&= \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n} \cup \overline{A_{n+1}} && \text{(Hukum Asosiatif)}
\end{aligned}$$

Karena langkah (i) dan (ii) sudah diperlihatkan benar, maka hukum De Morgan rampatan berikut:

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$$

sudah dibuktikan benar. ■

Contoh 4.7

Buktikan dengan induksi matematik bahwa $3^n < n!$ untuk n bilangan bulat positif yang lebih besar dari 6.

Penyelesaian:
Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bahwa $3^n < n!$ untuk n bilangan bulat positif yang lebih besar dari 6.

(i) *Basis induksi:* $p(7)$ benar, karena $3^7 < 7!$ sebab $3^7 = 2187$ dan $7! = 5040$

(ii) *Langkah induksi:* Misalkan bahwa $p(n)$ benar, yaitu asumsikan bahwa $3^n < n!$ adalah benar. Kita harus menunjukkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu $3^{n+1} < (n+1)!$. Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

$$3^{n+1} < (n+1)!$$
$$3.3^n < (n+1) \cdot n!$$
$$3^n \cdot 3/(n+1) < n!$$

Menurut hipotesis induksi, $3^n < n!$, sedangkan untuk $n > 6$, nilai $3/(n+1) < 1$, sehingga $3/(n+1)$ akan memperkecil nilai di ruas kiri persamaan. Efek nettonya, 3^n . $3/(n+1) < n!$ jelas benar.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah ditunjukkan benar, maka terbukti bahwa $3^n < n!$ untuk n bilangan bulat positif lebih besar dari 6. ■

Contoh 4.8

Buktikan dengan induksi matematik bahwa pada sebuah himpunan beranggotakan n elemen, banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari himpunan tersebut adalah 2^n.

Penyelesaian:
Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bahwa sebuah himpunan beranggotakan n elemen, banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari himpunan tersebut adalah 2^n.

(i) *Basis induksi*: $p(0)$ benar, karena untuk $n = 0$ (himpunan kosong) himpunan kosong hanya mempunyai mempunyai $2^0 = 1$ himpunan bagian, yaitu himpunan kosong itu sendiri.

(ii) *Langkah induksi:* Andaikan bahwa $p(n)$ adalah benar, yaitu asumsikan "Banyaknya himpunan bagian dari suatu himpunan yang beranggotakan n elemen adalah 2^n" adalah benar. Kita harus menunjukkan bahwa $p(n + 1)$ benar, yaitu jumlah himpunan bagian dari himpunan yang beranggotakan $n + 1$ elemen adalah 2^{n+1}. Hal ini ditunjukkan sebagai berikut. Misalkan elemen ke-n+1 adalah a. Tinjau masing-masing dari 2^n buah himpunan bagian yang sudah terbentuk. Untuk setiap himpunan bagian, buatlah himpunan baru yang anggotanya adalah seluruh anggota himpuan bagian tersebut ditambah dengan dengan tambahan satu elemen a. Karena ada 2^n buah himpunan bagian semula, maka juga akan terdapat 2^n himpunan bagian tambahan. Jumlah himpunan bagian seluruhnya adalah $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari sebuah himpunan beranggotakan n elemen adalah 2^n. ■

Contoh 4.9

Buktikan pernyataan "Untuk membayar biaya pos sebesar n sen ($n \geq 8$) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan perangko 5 sen" benar.

Penyelesaian:
Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bahwa untuk membayar biaya pos sebesar n sen ($n \geq 8$) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan perangko 5 sen.

(i) *Basis induksi*: $p(8)$ benar, karena untuk membayar biaya pos 8 sen dapat digunakan 1 buah perangko 3 sen dan 1 buah perangka 5 sen saja.

(ii) *Langkah induksi:* Andaikan bahwa $p(n)$ benar, yaitu asumsikan bahwa untuk membayar biaya pos sebesar n sen dapat digunakan perangko 3 sen dan 5 sen (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa $p(n + 1)$ benar, yaitu untuk membayar biaya pos sebesar $n + 1$ sen juga dapat menggunakan perangko 3 sen dan perangko 5 sen. Ada dua kemungkinan yang perlu diperiksa. Kemungkinan pertama, misalkan kita membayar biaya pos senilai n sen dengan sedikitnya satu perangko 5 sen. Dengan mengganti satu buah perangko 5 sen dengan dua buah perangko 3 sen, akan diperoleh susunan perangko senilai $n + 1$ sen. Kemungkinan kedua, jika tidak ada perangko 5 sen yang digunakan, biaya pos senilai n sen menggunakan perangko 3 sen semuanya. Karena $n \geq 8$, setidaknya harus digunakan tiga buah perangko 3 sen. Dengan mengganti tiga buah perangko 3 sen dengan 2 buah perangko 5 sen, akan dihasilkan nilai perangko $n + 1$ sen.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah ditunjukkan benar, maka pernyataan "Untuk membayar biaya pos sebesar n sen ($n \geq 8$) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan perangko 5 sen" terbukti benar. ■

Contoh 4.10

Sebuah ATM (Anjungan Tunai Mandiri) hanya menyediakan pecahan uang Rp 20.000,- dan Rp 50.000, -. Kelipatan uang berapakah yang dapat dikeluarkan oleh ATM tersebut? Buktikan jawaban anda dengan induksi matematik.

Penyelesaian:
Dengan pecahan uang Rp 20.000,-, ATM dapat mengeluarkan uang untuk penarikan Rp 20.000, Rp 40.000,-, Rp 60.000,-, …. , sedangkan dengan pecahan uang Rp Rp 50.000,- ATM dapat mengeluarkan uang untuk penarikan Rp 50.000, Rp 100.000,-, …. Dari kedua kombinasi pecahan uang tersebut kita dapat menyimpulkan bahwa ATM dapat mengeluarkan uang kelipatan Rp 10.000,- atau dengan kata lain mengeluarkan uang senilai $10.000n$ rupiah untuk $n \geq 4$ (*catatan*: perhatikanlah bahwa kita tidak dapat menggunakan basis $n = 2$ sebab ia tidak dapat digunakan pada langkah induksi).

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bahwa ATM dapat mengeluarkan uang senilai $10.000n$ rupiah untuk $n \geq 4$ dengan pecahan Rp 20.000,- dan Rp 50.000,-. Kita akan membuktikan $p(n)$ dengan induksi matematik.

(i) *Basis induksi:* $p(4)$ benar, karena ATM dapat mengeluarkan uang senilai Rp 40.000 dengan 2 buah pecahan Rp 20.000,-.

(ii) *Langkah induksi:* Andaikan $p(n)$ benar, yaitu asumsikan bahwa ATM dapat mengeluarkan uang senilai $10.000n$ rupiah dengan pecahan Rp 20.000,- dan Rp 50.000,-. Kita harus menunjukkan bahwa $p(n + 1)$ benar, yaitu ATM juga dapat mengeluarkan uang senilai $10.000\ (n + 1)$ rupiah dengan menggunakan pecahan Rp 20.000,- dan Rp 50.000,-. Ada dua kemungkinan yang harus kita tinjau:
   1) Jika untuk uang senilai $10.000n$ rupiah ATM menggunakan minimal 1 buah pecahan Rp 50.000,-, maka dengan mengganti 1 pecahan Rp 50.000,- dengan 3 buah pecahan Rp 20.000, maka ATM selalu dapat mengeluarkan uang senilai $10.000(n + 1)$ rupiah.
   2) Jika untuk uang senilai $10.000n$ rupiah ATM menggunakan pecahan Rp 20.000,-, maka paling sedikit digunakan 2 buah pecahan Rp 20.000,- (sebab $n \geq 4$). Dengan mengganti 2 buah pecahan Rp 20.000,- dengan 1 buah pecahan Rp 50.000,-, maka ATM selalu dapat mengeluarkan uang senilai $10.000(n + 1)$ rupiah.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa ATM dapat mengeluarkan uang senilai $10.000n$ rupiah untuk $n \geq 4$ dengan pecahan Rp 20.000,- dan Rp 50.000,-. ■

4.4 Prinsip Induksi Kuat

Kadang-kadang versi induksi yang lebih kuat diperlukan untuk membuktikan pernyataan mengenai bilangan bulat. Versi induksi yang lebih kuat adalah sebagai berikut:

Misalkan p(n) adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. *Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:*

1. *$p(n_0)$ benar, dan*
2. *jika $p(n_0)$, $p(n_0+1)$, ..., $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap bilangan bulat* $n \geq n_0$,

sehingga p(n) benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.

Catatlah bahwa versi induksi yang lebih kuat ini mirip dengan induksi sederhana, kecuali bahwa pada langkah 2 kita mengambil hipotesis induksi yang lebih kuat bahwa semua pernyataan $p(1), p(2), \ldots, p(n)$ adalah benar daripada hipotesis yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar (pada induksi sederhana). Prinsip induksi kuat memungkinkan kita mencapai kesimpulan yang sama meskipun memberlakukan andaian yang lebih banyak.

Dua contoh berikut memperlihatkan penggunaan prinsip induksi kuat.

Contoh 4.11

Bilangan bulat positif disebut prima jika dan hanya jika bilangan bulat tersebut habis dibagi dengan 1 dan dirinya sendiri. Kita ingin membuktikan bahwa setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima. Buktikan dengan prinsip induksi kuat.

Penyelesaian:
Mislakan $p(n)$ adalah proposisi bahwa setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima.

(i) *Basis induksi:* $p(2)$ benar, karena 2 sendiri adalah bilangan prima dan di sini 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian dari satu buah bilangan prima, yaitu dirinya sendiri.

(ii) *Langkah induksi.* Misalkan $p(n)$ benar, yaitu asumsikan bahwa bilangan 2, 3, …, n dapat dinyatakan sebagai perkalian (satu atau lebih) bilangan prima (hipotesis induksi). Kita perlu menunjukkan bahwa $p(n + 1)$ benar, yaitu $n + 1$ juga dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima. Hal ini ditunjukkan sebagai berikut: jika $n + 1$ sendiri bilangan prima, maka jelas ia dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima. Jika $n + 1$ bukan bilangan prima, maka terdapat bilangan bulat positif a yang membagi habis $n + 1$ tanpa sisa. Dengan kata lain,

$$(n + 1)/ a = b \quad \text{atau } (n + 1) = ab$$

yang dalam hal ini, $2 \leq a \leq b \leq n$. Menurut hipotesis induksi, a dan b dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima. Ini berarti, $n + 1$ jelas dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima, karena $n + 1 = ab$.

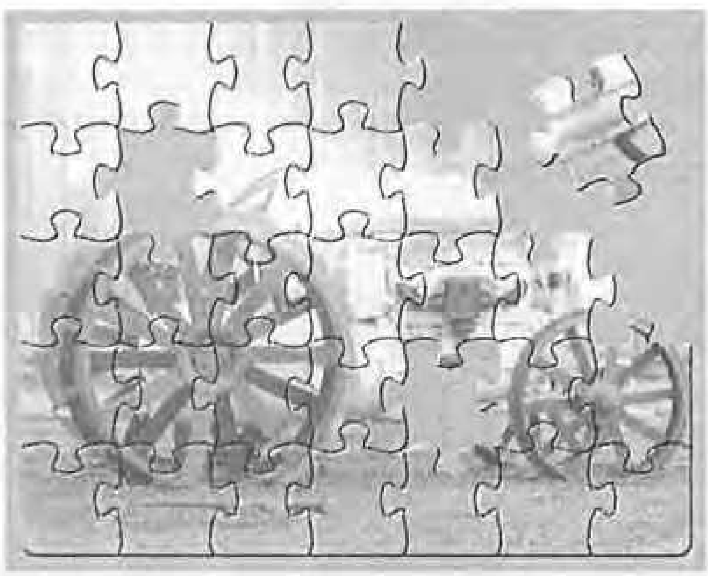
Karena langkah (i) dan (ii) sudah ditunjukkan benar, maka terbukti bahwa setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima.

■

Catatlah bahwa pernyataan di atas lebih tepat dibuktikan dengan prinsip induksi kuat daripada dengan prinsip induksi sederhana. Kita tahu bahwa a dan b keduanya $\leq n$, karena itu, untuk dapat menerapkan hipotesis induksi terhadap keduanya, kita perlu mengetahui bahwa tiap bilangan bulat positif 2, 3, ..., n dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima. Mengandaikan bahwa n dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima saja tidaklah cukup.

Contoh 4.12

[LIU85] Teka-teki susun potongan gambar (*jigsaw puzzle*) terdiri dari sejumlah potongan (bagian) gambar (lihat Gambar 4.2). Dua atau lebih potongan dapat disatukan untuk membentuk potongan yang lebih besar. Lebih tepatnya, kita gunakan istilah blok bagi satu potongan gambar. Blok-blok dengan batas yang cocok dapat disatukan membentuk blok yang lain yang lebih besar. Akhirnya, jika semua potongan telah disatukan menjadi satu buah blok, teka-teki susun gambar itu dikatakan telah dipecahkan. Menggabungkan dua buah blok dengan batas yang cocok dihitung sebagai satu langkah. Gunakan prinsip induksi kuat untuk membuktikan bahwa untuk suatu teka-teki susun gambar dengan n potongan, selalu diperlukan $n - 1$ langkah untuk memecahkan teki-teki itu.



Gambar 4.2 Teka-teki susun potongan gambar

Penyelesaian:

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bahwa suatu teka-teki susun gambar dengan n potongan, selalu diperlukan $n - 1$ langkah untuk memecahkan teki-teki itu.

(i) *Basis induksi:* $p(1)$ benar, karena untuk teka-teki susun gambar dengan satu potongan, tidak diperlukan langkah apa-apa untuk memecahkan teka-teki itu.

(ii) *Langkah induksi:* Misalkan $p(n)$ benar, yaitu asumsikan bahwa bahwa untuk teka-teki dengan n potongan ($n = 1, 2, 3, \ldots, k$) diperlukan sejumlah $n - 1$ langkah untuk memecahkan teka-teki itu (hipotesis induksi). Kita harus membuktikan bahwa $p(n + 1)$

benar, yaitu untuk $n + 1$ potongan gambar diperlukan n langkah. Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

Bagilah $n + 1$ potongan menjadi dua buah blok–satu dengan n_1 potongan dan satu lagi dengan n_2 potongan, dan $n_1 + n_2 = n + 1$. Untuk langkah terakhir yang memecahkan teka-teki ini, dua buah blok disatukan sehingga membentuk satu blok besar. Menurut hipotesis induksi, diperlukan $n_1 - 1$ langkah untuk menyatukan blok yang satu dan $n_2 - 1$ langkah untuk menyatukan blok yang lain. Digabungkan dengan langkah terakhir yang menyatukan kedua blok tersebut, maka banyaknya langkah adalah

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 \text{ langkah terakhir} = (n_1 + n_2) - 2 + 1 = n + 1 - 1 = n.$$

Karena langkah (i) dan (ii) sudah diperlihatkan benar maka terbukti bahwa suatu teka-teki susun gambar dengan n potongan, selalu diperlukan n - 1 langkah untuk memecahkan teki-teki itu. ■

4.5 Bentuk Induksi Secara Umum

Adalah mungkin membuat bentuk umum metode induksi sehingga ia dapat diterapkan tidak hanya untuk pembuktian proposisi yang menyangkut himpunan bilangan bulat positif, tetapi juga pembuktian yang menyangkut himpunan obyek yang lebih umum. Syaratnya, himpunan obyek tersebut harus mempunyai keterurutan dan mempunyai elemen terkecil.

DEFINISI 4.1. Relasi biner "<" pada himpunan X dikatakan terurut dengan baik (atau himpunan X dikatakan terurut dengan baik dengan "<") bila memiliki properti berikut:

(i) Diberikan $x, y, z \in X$, jika $x < y$ dan $y < z$, maka $x < z$.

(ii) Diberikan $x, y \in X$. Salah satu dari kemungkinan ini benar: $x < y$ atau $y < x$ atau $x = y$.

(iii) Jika A adalah himpunan bagian tidak kosong dari X, terdapat elemen $x \in A$ sedemikian sehingga $x \le y$ untuk semua $y \in A$. Dengan kata lain, setiap himpunan bagian tidak kosong dari X mengandung "elemen terkecil".

Himpunan bilangan riil tak-negatif tidak terurut dengan baik oleh relasi "<". Himpunan ini mempunyai properti (i) dan (ii) tetapi tidak (iii). Sebagai contoh, himpunan semua bilangan riil yang lebih besar dari 1, yaitu $\{ x \mid x$ adalah bilangan riil dan $x > 1 \}$, tidak mengandung elemen terkecil.

Himpunan pasangan terurut bilangan bulat tidak negatif terurut dengan baik oleh relasi "<", dengan kata lain "<" didefinisikan oleh (n_1, n_2) $(n_3 < n_4)$ jika dan hanya jika $(n_1 < n_3)$ atau $(n_1 = n_3$ dan $n_2 < n_4)$. Properti (i), (ii), dan (iii) dimiliki oleh himpunan ini.

Bentuk induksi secara umum dapat dituliskan sebagai berikut:

Misalkan X terurut dengan baik oleh "<", dan $p(x)$ adalah pernyataan perihal elemen x dari X. Kita ingin membuktikan bahwa $p(x)$ benar untuk semua $x \in X$. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. *$p(x_0)$ benar, yang dalam hal ini x_0 adalah elemen terkecil di dalam X, dan*
2. *jika $p(y)$ benar untuk $y < x$, maka $p(x)$ juga benar untuk setiap $x > x_0$ di dalam X,*

sehingga $p(x)$ benar untuk semua $x \in X$.

Contoh 4.13

Tinjau barisan bilangan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$S_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{jika } m = 0 \text{ dan } n = 0 \\ S_{m-1,n} + 1 & \text{jika } n = 0 \\ S_{m,n-1} + 1 & \text{jika } n \neq 0 \end{cases}$$

Sebagai contoh,

$$\begin{array}{ll} S_{0,0} = 0 & S_{1,0} = S_{0,0} + 1 = 0 + 1 = 1 \\ S_{0,1} = S_{0,0} + 1 = 1 & S_{1,1} = S_{1,0} + 1 = 1 + 1 = 2 \\ S_{2,0} = S_{1,0} + 1 = 2 & S_{2,1} = S_{2,0} + 1 = 3, \ldots \end{array}$$

Buktikanlah dengan induksi matematik bahwa untuk pasangan tidak negatif m dan n, $S_{m,n} = m + n$.

Penyelesaian:

(i) *Basis induksi:* Karena (0, 0) adalah elemen terkecil di dalam X, maka $S_{0,0} = 0 + 0 = 0$. Ini benar dari definisi $S_{0,0}$.

(ii) *Langkah induksi.* Buktikan untuk semua $(m, n) > (0, 0)$ di dalam X bahwa jika $S_{m',n'} = m' + n'$ benar untuk semua $(m', n') < (m, n)$ maka $S_{m,n} = m + n$ juga benar. Andaikan bahwa $S_{m',n'} = m' + n'$ benar untuk semua $(m', n') < (m,n)$. Ini adalah hipotesis induksi. Kita perlu menunjukkan bahwa $S_{m,n} = m + n$, baik untuk $n = 0$ atau $n \neq 0$.

Kasus 1: Jika $n = 0$, maka dari definisi $S_{m,n} = S_{m-1,n} + 1$. Karena $(m-1, n) < (m, n)$, maka dari hipotesis induksi,

$$S_{m-1,n} = (m - 1) + n \text{ sehingga } S_{m,n} = S_{m-1,n} + 1 = (m - 1) + n + 1 = m + n.$$

Kasus 2: Jika $n \neq 0$, maka dari definisi $S_{m,n} = S_{m,n-1} + 1$. Karena $(m, n-1) < (m, n)$, maka dari hipotesis induksi,

$$S_{m,n-1} = m + (n - 1) \text{ sehingga } S_{m,n} = S_{m,n-1} + 1 = m + (n - 1) + 1 = m + n.$$

Karena langkah (1) dan (ii) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa untuk pasangan tidak negatif m dan n, $S_{m,n} = m + n$. ■

4.6 Ragam Soal dan Penyelesaian

Contoh 4.14

Temukan rumus untuk menghitung $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots + 1/2^n$ dengan memeriksa nilai-nilai ekspresi untuk n yang kecil, lalu gunakan induksi matematik untuk membuktikan rumus itu.

Penyelesaian:
Rumus ditentukan secara empirik dengan mencoba menghitung deret untuk n yang kecil,

$$n = 1 \rightarrow 1/2 = (2^1 - 1)/2^1$$
$$n = 2 \rightarrow 1/2 + 1/4 = 3/4 = (2^2 - 1)/2^2$$
$$n = 3 \rightarrow 1/2 + 1/4 + 1/8 = 9/8 = (2^3 - 1)/2^3$$
$$\ldots$$
$$n = k \rightarrow 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots + 1/2^k = (2^k - 1)/2^k$$

Jadi, dapat disimpulkan (untuk sementara) bahwa

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots + 1/2^n = (2^n - 1)/2^n \qquad , n \geq 1$$

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bahwa untuk $n \geq 1$, $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots + 1/2^n = (2^n - 1)/2^n$. Kita akan buktikan kebenaran $p(n)$ dengan induksi matematik:

(i) *Basis induksi:* $p(1)$ benar, karena

$$1/2 = (2^1 - 1)/2^1 = 1/2$$

(ii) *Langkah induksi:* Andaikan bahwa $p(n)$ benar, yaitu asumsikan bahwa jumlah deret $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots + 1/2^n = (2^n - 1)/2^n$ (hipotesis induksi). Kita harus memperlihatkan bahwa $p(n + 1)$ benar, yaitu untuk $n + 1$ jumlah deret tersebut adalah

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots 1/2^n + 1/2^{n+1} = (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}$$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots 1/2^n + 1/2^{n+1} &= (1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots 1/2^n) + 1/2^{n+1} \\
&= (2^n - 1)/2^n + 1/2^{n+1} \\
&= 2(2^n - 1)/2.2^n + 1/2^{n+1} \\
&= 2(2^n - 1)/2^{n+1} + 1/2^{n+1} \\
&= (2^{n+1} - 2 + 1)/2^{n+1} \\
&= (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}
\end{aligned}$$

Karena langkah (i) dan (ii) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots + 1/2^n = (2^n - 1)/2^n$$ ■

Contoh 4.15

Buktikan dengan induksi matematik bahwa $n^5 - n$ habis dibagi 5 untuk n bilangan bulat positif.

Penyelesaian:
Andaikan bahwa $p(n)$ adalah proposisi bahwa $n^5 - n$ habis dibagi 5 untuk n bilangan bulat positif.

(i) *Basis induksi:* $p(1)$ benar, karena $1^5 - 1 = 0$ habis dibagi 5.

(ii) *Langkah induksi:* Andaikan bahwa $p(n)$ benar, yaitu asumsikan bahwa $n^5 - n$ habis dibagi 5 untuk $n > 0$ (hipotesis induksi). Kita harus memperlihatkan bahwa $p(n + 1)$ benar, yaitu $(n+1)^5 - (n+1)$ juga habis dibagi 5. Ini ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}(n+1)^5 - (n+1) &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1\\ &= n^5 - n + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n\\ &= (n^5 - n) + 5(n^4 + 2n^3 + 5n^2 + n)\end{aligned}$$

Menurut hipotesis induksi, $(n^5 - n)$ habis dibagi 5 dan $5(n^4 + 2n^3 + 5n^2 + n)$ jelas juga habis dibagi 5, sehingga $(n^5 - n) + 5(n^4 + 2n^3 + 5n^2 + n)$ habis dibagi 5. Dengan demikian, terbukti $(n+1)^5 - (n+1)$ habis dibagi 5.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa $n^5 - n$ habis dibagi 5 untuk n bilangan bulat positif. ■

Contoh 4.16

Untuk biaya pos berapa saja yang dapat menggunakan perangko senilai 5 sen dan 6 sen? Buktikan jawaban anda dengan induksi matematik.

Penyelesaian:
Kombinasi biaya pos dengan perangko 5 sen dan 6 sen dapat ditulis sebagai $5m + 6n$, dengan m dan n adalah bilangan bulat. Dengan mencoba kombinasi nilai m dan n mulai dari 0, 1, 2, 3, 4, ..., maka diperoleh biaya pos yang dapat dibayar mulai 20 sen, 21 sen, 22 sen dan seterusnya.

Akan kita buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk biaya pos sebesar $n \geq 20$ sen selalu dapat menggunakan perangko 5 sen dan 6 sen.

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bahwa untuk biaya pos sebesar $n \geq 20$ sen selalu dapat menggunakan perangko 5 sen dan 6 sen.

(i) *Basis induksi:* $p(20)$ benar, karena untuk biaya pos sebesar 20 sen, kita dapat menggunakan 4 perangko 5 sen saja.

(ii) *Langkah induksi.* Andaikan $p(n)$ benar, yaitu asumsikan biaya pos sebesar $n \geq 20$ sen selalu dapat menggunakan perangko 5 sen dan 6 sen (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa $p(n + 1)$ benar, yaitu biaya pos sebesar $n + 1$ sen juga dapat

menggunakan perangko 5 sen dan 6 sen saja. Ada dua kemungkinan yang harus kita tinjau:

1) Jika untuk membayar biaya pos n sen digunakan perangko 5 sen saja, maka paling sedikit digunakan 4 buah perangko 5 sen (sebab $n \geq 20$), maka dengan mengganti sebuah perangko 5 sen dengan 6 sen selalu dapat dibayar biaya pos sebesar $n + 1$ sen.

2) Jika untuk membayar biaya pos n sen digunakan perangko 6 sen, maka paling sedikit digunakan 4 buah perangko 6 sen (sebab $n \geq 20$). Dengan mengganti 4 buah perangko 6 sen dengan 5 buah, diperoleh susunan perangko senilai n + 1 sen.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa biaya pos sebesar $n \geq 20$ sen selalu dapat menggunakan perangko 5 sen dan 6 sen. ■

Contoh 4.17

Di dalam sebuah pesta, setiap tamu berjabat tangan dengan tamu lainnya hanya sekali saja. Buktikan dengan induksi matematik bahwa jika ada n orang tamu maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah $n(n - 1)/2$.

Penyelesaian:

Nilai n minimal 1. Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bahwa jika ada n orang tamu maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah $n(n - 1)/2$.

(i) Basis Induksi: $p(1)$ benar, karena untuk $n = 1$ orang tamu, tidak ada jabat tangan yang terjadi, atau $1(1 - 1)/2 = 0$ kali.

(ii) Langkah induksi: Misalkan $p(n)$ benar, yaitu asumsikan jumlah jabat tangan yang terjadi sebanyak $n(n - 1)/2$ (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa $p(n + 1)$ benar, yaitu jumlah jabat tangan yang terjadi di antara $n + 1$ orang tamu adalah $(n+1)((n + 1) - 1)/2$ atau $n(n+1)/2$.

Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut:
Untuk $n + 1$ orang, jumlah jabat tangan yang terjadi haruslah berupa jumlah jabat tangan n orang tamu ditambah jabat tangan yang dilakukan tamu ke-$(n + 1)$. Menurut hipotesis induksi, untuk n orang tamu, jumlah jabat tangan yang terjadi adalah $n(n - 1)/2$. Tamu yang ke-$(n + 1)$ ini akan berjabat tangan sebanyak n kali dengan n orang tamu lainnya (masing-masing sekali) sehingga jumlah jabat tangan keseluruhan adalah

$$\begin{aligned} n(n-1)/2 + n &= n(n-1)/2 + 2n/2 \\ &= (n^2 - n + 2n)2 \\ &= (n^2 + n)2 \\ &= n(n+1)/2 \end{aligned}$$

Karena langkah basis dan langkah induksi keduanya telah ditunjukkan benar, maka terbukti bahwa jika ada n orang tamu, maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah $n(n - 1)/2$. ■

Contoh 4.18

Gunakan induksi matematik untuk membuktikan bahwa suatu himpunan dengan n elemen ($n \geq 2$) mempunyai $n(n-1)/2$ himpunan bagian yang mengandung tepat 2 elemen.

Penyelesaian:
Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bahwa suatu himpunan dengan n elemen ($n \geq 2$) mempunyai $n(n-1)/2$ himpunan bagian yang mengandung tepat 2 elemen.

(i) *Basis induksi:* $p(2)$ benar, karena suatu himpunan dengan anggota 2 elemen memiliki $2(2-1)/2 = 1$ himpunan yang mengandung tepat 2 elemen.

(ii) *Langkah induksi:* Misalkan $p(n)$ benar, yaitu suatu himpunan dengan n elemen mempunyai $n(n-1)/2$ himpunan bagian yang mengandung tepat 2 elemen (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa $p(n+1)$ benar, yaitu suatu himpunan dengan $n+1$ elemen mempunyai $(n+1)((n+1)-1)/2$ himpunan bagian yang mengandung tepat 2 elemen. Hal ini ditunjukkan sebagai berikut: Misalkan S adalah himpunan beranggotakan n elemen. Misalkan ditambahkan elemen ke-($n+1$), yaitu a, ke dalam S menjadi himpunan baru, T, yang dalam hal ini $T = S \cup \{a\}$. Himpunan bagian 2-elemen dari S tidak mengandung a, dan menurut hipotesis induksi jumlahnya adalah $n(n-1)/2$. Himpunan bagian dari T dibentuk dengan cara berikut: untuk setiap himpunan bagian dari S, bentuklah himpunan baru yang anggotanya adalah seluruh anggota himpunan bagian tersebut ditambah dengan satu elemen a. Tinjau hanya himpunan bagian 1-elemen dari S yang banyaknya n buah. Dengan penambahan satu elemen a, maka anggota himpunan bagian tersebut menjadi 2 buah elemen. Dengan demikian, jumlah himpunan bagian 2-elemen dari T adalah himpunan bagian 2-elemen yang tidak mengandung a dan himpuan bagian 2-elemen yang mengandung a. Jumlah seluruh himpunan bagian 2-elemen dari T adalah

$$\begin{aligned} n(n-1)/2 + n &= n(n-1)/2 + 2n/2 \\ &= (n^2 - n)/2 + 2n/2 \\ &= (n^2 - n + 2n)/2 \\ &= (n^2 + n)/2 \\ &= (n+1)n/2 \\ &= (n+1)((n+1)-1)/2 \end{aligned}$$

Karena langkah basis dan langkah induksi keduanya telah ditunjukkan benar, maka terbukti bahwa suatu himpunan dengan n elemen ($n \geq 2$) mempunyai $n(n-1)/2$ himpunan bagian yang mengandung tepat 2 elemen. ∎

Contoh 4.19

Tunjukkan apa yang salah dari pembuktian di bawah ini yang menyimpulkan bahwa semua kuda berwarna sama?

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan bahwa semua kuda di dalam sebuah himpunan berwarna sama.

(i) *Basis induksi*: jika kuda di dalam himpunan hanya seekor, jelaslah $p(1)$ benar.

(ii) *Langkah induksi*: Misalkan $p(n)$ benar, yaitu asumsikan bahwa semua kuda di dalam himpunan n ekor kuda berwarna sama. Tinjau untuk himpunan dengan $n + 1$ kuda; nomori kuda-kuda tersebut dengan 1, 2, 3, ..., n, n+1. Tinjau dua himpunan, yaitu n ekor kuda yang pertama (1, 2, ...n) harus berwarna sama, dan n ekor kuda yang terakhir (2, 3, ..., n, n+1) juga harus berwarna sama. Karena himpunan n kuda pertama dan himpunan n kuda terakhir beririsan, maka semua n+1 kuda harus berwarna sama. Ini membuktikan bahwa $P(n+1)$ benar.

Penyelesaian:
langkah induksi tidak benar jika $n + 1 = 2$, sebab dua himpunan (yang masing-masing beranggotakan $n = 1$ elemen) tidak beririsan. ■

Soal Latihan

1. Buktikan melalui induksi matematik bahwa

   (a) $1(2) + 2(3) + \ldots + n(n + 1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ untuk semua $n \geq 1$.

   (b) $\dfrac{1}{1(2)} + \dfrac{1}{2(3)} + \dfrac{1}{3(4)} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ untuk semua $n \geq 1$.

   (c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ untuk semua $n \geq 1$.

   (d) $1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$ untuk semua $n \geq 0$ dan $a \neq 1$.

   (e) $3 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + \ldots + 3 \cdot 5^n = 3(5^{n+1} - 1)/4$ untuk semua $n \geq 0$.

2. Buktikan melalui induksi matematik bahwa $n^4 - 4n^2$ habis dibagi 3 untuk semua bilangan bulat $n \geq 2$.

3. Carilah dan kemudian buktikan melalui induksi matematik suatu rumus umum berdasarkan pengamatan berikut:

   $1^3 = 1$
   $2^3 = 3 + 5$
   $3^3 = 7 + 9 + 11$
   $4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$

4. Buktikan dengan induksi matematik bahwa jumlah pangkat tiga dari tiga buah bilangan bulat positif berurutan selalu habis dibagi 9.

5. Ketika n pasangan tamu tiba di pesta, mereka disambut oleh tuan dan nyonya rumah di pintu. Setelah saling berjabat tangan, tuan rumah bertanya kepada para tamu maupun istrinya untuk mengatakan berapa kali mereka masing-masing telah berjabat tangan. Ia memperoleh $2n + 1$ jawaban yang berbeda. Jika tidak seorang pun berjabat tangan dengan istri atau suaminya sendiri, berapa kalikah nyonya rumah telah berjabat tangan? Buktikan jawaban Anda dengan induksi matematik.

6. Buktikan bahwa surat pos yang menggunakan perangko 24 sen atau lebih dapat hanya menggunakan perangko 5 sen atau 7 sen.

7. Untuk biaya pos berapa saja dapat menggunakan perangko 5 sen dan perangko 6 sen? Buktikan jawaban anda dengan menggunakan induksi matematik!

8. Sebuah kios penukaran uang hanya mempunyai pecahan uang senilai Rp2000 dan Rp5000. Untuk uang senilai berapa saja yang dapat ditukar dengan kedua pecahan tersebut? Buktikan jawaban anda dengan induksi matematik.

9. Suatu *string* biner panjangnya n bit. Jumlah *string* biner yang mempunyai bit 1 sejumlah genap adalah 2^{n-1}. Buktikan pernyataan tersebut untuk $n \geq 1$.

10. Misalkan bahwa $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$. Buktikan dengan induksi matematik bahwa

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$$

11. Perlihatkan bahwa $[(p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge \ldots \wedge (p_{n-1} \to p_n)] \to [(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{n-1}) \to p_n]$ adalah tautologi bilamana $p_1, p_2, \ldots, p_n$ adalah proposisi.

12. (Kalkulus diferensial) Gunakan induksi matematik untuk membuktikan bahwa turunan $f(x) = x^n$ sama dengan nx^{n-1}.

13. Gunakan induksi matematik untuk menunjukkan bahwa n garis lurus pada sebuah bidang membagi bidang tersebut menjadi $(n^2 + n + 2)/2$ daerah. Asumsikan bahwa tidak ada dua garis lurus yang sejajar dan tidak ada tiga garis lurus yang berpotongan pada satu titik persekutuan.

14. Buktikan dengan induksi matematik bahwa jika A, B_1, B_2, ..., B_n adalah himpunan, $n \geq 2$, maka

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots (A \cap B_n)$$

15. Gunakan induksi matematik untuk membuktikan bahwa suatu himpunan dengan n buah elemen ($n \geq 3$) mempunyai $n(n-1)(n-2)/6$ himpunan bagian yang mengandung tepat 3 buah elemen.

16. Temukan kesalahan dalam pembuktian berikut. Kita ingin membuktikan bahwa semua marmut di dalam kandang berwarna sama. Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan bahwa semua marmut di dalam kandang yang berkapasitas n ekor berwarna sama.
   (i) *Basis induksi.* Untuk $n = 1$ jelas benar karena hanya ada satu ekor marmut pastilah warnanya sama.

   (ii) *Langkah induksi.* Andaikan pernyataan tersebut benar untuk kandang yang berisi n ekor marmut. Kita harus memperlihatkan bahwa pernyataan tersebut juga benar untuk kandang yang berisi n+1 ekor. Misalkan kita gambar koleksi n+1 ekor marmut dan diberi nomor 1, 2, …, n+1 sebagai berikut:

$$\begin{array}{cccc} \bullet & \bullet \ldots & \bullet & \bullet \\ 1 & 2 & n & n+1 \end{array}$$

Jika kita pindahkan marmut ke-(n+1) dari kandang, maka kandang berisi n ekor marmut dengan susunan seperti berikut:

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet \ldots & \bullet \\ 1 & 2 & n \end{array}$$

Menurut hipotesis induksi, n ekor marmut di dalam kandang tersebut berwarna sama. Jika yang kita pindahkan adalah marmut pertama, maka kandang juga berisi n ekor marmut dengan susunan seperti berikut:

$$\begin{array}{ccc} \bullet \ldots & \bullet & \bullet \\ 2 & n & n+1 \end{array}$$

Menurut hipotesis induksi, n ekor marmut di dalam kandang tersebut juga berwarna sama. Hal ini mengimplikasikan bahwa semua n+1 marmut berwarna sama, karena kita tahu bahwa marmut

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet \ldots & \bullet \\ 1 & 2 & n \end{array}$$

berwarna sama dan marmut ke-(n+1) juga berwarna sama seperti marmut ke-n (faktanya, ia tidak hanya sama sewarna dengan marmut ke-n: ia juga sewarna dengan marmut 2, 3, …, n). Jadi marmut n+1 berwarna sama dengan marmut yang lain.

17. Apa yang salah dari pembuktian dengan induksi matematik untuk proposisi di bawah ini, yang secara praduga menunjukkan bahwa dua bilangan bulat positif sembarang adalah sama?

    Proposisi:
    Jika a dan b masing-masing adalah bilangan bulat positif dan n = maks$\{a, b\}$ maka $a = b$.

    (i) *Basis induksi.* Jika a dan b masing-masing bilangan bulat positif dan 1 = maks$\{a, b\}$, kita mempunyai $a = b = 1$, adalah benar.

    (ii) *Langkah induksi.* Andaikan pernyataan bahwa jika a dan b masing-masing bilangan bulat positif dan n = maks$\{a, b\}$ maka $a = b$, adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa pernyataan tersebut juga benar untuk n + 1. Andaikan bahwa a dan b keduanya bilangan bulat positif dan n + 1 = maks$\{a, b\}$ sehingga n = maks$\{a - 1, b - 1\}$. Menurut hipotesis induksi, $a - 1 = b - 1$. Jadi $a = b$.

    Karena kita sudah membuktikan basis induksi dan langkah induksi benar, maka menurut prinsip induksi matematik, dua bilangan bulat sembarang adalah sama!

18. Temukan kesalahan dalam pembuktian berikut. Kita ingin membuktikan bahwa $a^n = 1$ untuk semua bilangan bulat tak-negatif n bilamana a adalah bilangan riil tidak-nol. Kita akan membuktikan ini dengan prinsip induksi kuat.

   (i) *Basis induksi.* Untuk $n = 0$, jelas $a^0 = 1$ adalah benar sesuai definisi a^0.

   (ii) *Langkah induksi.* Misalkan pernyataan tersebut benar untuk 0, 1, 2, ..., n, yaitu $a^0 = 1$, $a^1 = 1$, $a^2 = 1$, ..., $a^n = 1$. Kita ingin memperlihatkan bahwa $a^{(n+1)} = 1$. Untuk menunjukkan hal ini, maka

$$a^{n+1} = \frac{a^n \cdot a^n}{a^{n-1}}$$

$$= \frac{1 \times 1}{1} \quad \text{(dari hipotesis induksi)}$$

$$= 1$$

19. Tinjau runtunan nilai yang didefinisikan sebagai berikut:

$$S_{1,1} = 5$$

Untuk semua pasang bilangan bulat positif (m, n), kecuali, (1,1) didefinisikan

$$S_{m,n} = \begin{cases} S_{m-1,n} + 2 & \text{jika } n = 1 \\ S_{m,n-1} + 2 & \text{jika } n \neq 1 \end{cases}$$

Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk semua pasangan bilangan bulat positif (m, n),

$$S_{m,n} = 2(m + n) + 1$$

Esensi dari matematika adalah kebebasannya.
(George Cantor)