BAB 3

Matriks, Relasi, dan Fungsi

Sebuah masalah yang telah jelas digambarkan
berarti telah terselesaikan sebagian.
(C.F. Kettering)

Hubungan (*relationship*) antara elemen himpunan dengan elemen himpunan lainnya sering dijumpai pada banyak masalah. Misalnya hubungan antara mahasiswa dengan mata kuliah yang diambil, hubungan antara orang dengan kerabatnya, hubungan antara bilangan genap dengan bilangan yang habis dibagi 2, dan sebagainya. Di dalam ilmu komputer, contoh hubungan itu misalnya hubungan antara program komputer dengan peubah yang digunakan, hubungan antara bahasa pemrograman dengan pernyataan (*statement*) yang sah, hubungan antara *plaintext* dan *chipertext* pada bidang kriptografi, dan sebagainya.

Hubungan antara elemen himpunan dengan elemen himpunan lain dinyatakan dengan struktur yang disebut **relasi**. Di dalam bab ini kita akan membicarakan relasi dan sifat-sifatnya, serta jenis khusus relasi yang disebut **fungsi**.

Sebelum membahas relasi dan fungsi, Bab 4 ini akan dimulai dengan pokok bahasan **matriks**. Di dalam matematika diskrit matriks digunakan untuk merepresentasikan struktur diskrit. Struktur diskrit adalah struktur matematika abstrak yang digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Struktur diskrit yang direpresentasikan dengan matriks antara lain relasi, graf, dan pohon.

3.1 Matriks

Materi matriks mungkin sudah tidak asing bagi mahasiswa karena matriks sudah dipelajari sejak di bangku sekolah menengah. Upabab ini hanya merangkum kembali materi yang berkaitan dengan matriks dan relevan dengan matematika diskrit.

DEFINISI 3.1. Matriks adalah adalah susunan skalar elemen-elemen dalam bentuk baris dan kolom. Matriks A yang berukuran dari m baris dan n kolom ($m \times n$) adalah:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Entri a_{ij} disebut elemen matriks pada baris ke-i dan kolom ke-j. Jika $m = n$, maka matriks tersebut dinamakan juga matriks bujursangkar *(square matrix)*. Menuliskan matriks dalam bentuk persegi panjang di atas adalah boros tempat, oleh karena itu kita lazim menuliskan matriks dengan notasi ringkas $A = [a_{ij}]$.

Contoh 3.2

Di bawah ini adalah sebuah matriks yang berukuran 3 × 4:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 6 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Matriks di atas disusun oleh 3 baris elemen, yaitu (2, 5, 0, 6), (8, 7, 5, 4), (3, 1, 1, 8), atau susunan dalam bentuk kolom-kolom:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ dan } \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

■

Beberapa Matriks Khusus

Terdapat beberapa matriks khusus yang ditemukan dalam pembahasan matematika, antara lain matriks diagonal, matriks identitas, dan matriks *transpose*.

1. Matriks diagonal

Matriks diagonal adalah matriks bujursangkar dengan $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$. Dengan kata lain, seluruh elemen yang tidak terdapat pada posisi $i \neq j$ bernilai 0.

Contoh 3.2

Di bawah ini adalah contoh-contoh matriks diagonal yang berukuran 3×3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

■

---

2. Matriks identitas

Matriks identitas, dilambangkan dengan I, adalah matriks diagonal dengan semua elemen diagonal = 1.

Contoh 3.3

Di bawah ini adalah contoh-contoh matriks I, masing masing 3×3 dan 4×4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

---

3. Matriks segitiga atas/bawah

Matriks segitiga atas/bawah adalah matrik jika elemen-elemen di atas/di bawah diagonal bernilai 0, yaitu $a_{ij} = 0$ jika $i < j$ ($i > j$).

Contoh 3.4

Di bawah ini adalah contoh matriks segitiga. Yang pertama matriks segitiga atas dan yang kedua matriks segitiga bawah.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

■

---

4. Matriks *transpose*

Matriks *transpose* adalah matriks yang diperoleh dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom. Misalkan $A = [a_{ij}]$ berukuran $m \times n$, maka *transpose* dari matriks A, ditulis A^T, adalah matriks $n \times m$ yang dalam hal ini jika $A^T = [b_{ij}]$, maka $b_{ij} = a_{ji}$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $j = 1, 2, \ldots, m$.

Contoh 3.5

Di bawah ini adalah sebuah matriks A dan transpose-nya, A^T.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

■

---

5. Matriks setangkup (*symmetry*)

A adalah matriks setangkup atau simetri jika $A^T = A$, yaitu jika $a_{ij} = a_{ji}$ untuk setiap i dan j. Dengan kata lain, pada matriks setangkup elemen di bawah diagonal adalah hasil pencerminan dari elemen di atas diagonal terhadap sumbu diagonal matriks.

Contoh 3.6

Di bawah ini adalah contoh-contoh matriks setangkup.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 & -4 \\ 6 & 3 & 7 & 3 \\ 6 & 7 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

■

---

6. Matriks 0/1 (*zero-one*)

Matriks 0/1 adalah matriks yang setiap elemennya hanya bernilai 0 atau 1. Matriks ini banyak digunakan untuk merepresentasikan relasi keterhubungan (lihat upabab 3.3 mengenai representasi relasi).

Contoh 3.7

Di bawah ini adalah contoh matriks 0/1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

Operasi Aritmetika Matriks

Operasi aritmetika yang biasa dilakukan terhadap matriks adalah operasi penjumlahan dan perkalian dua buah matriks, serta perkalian matriks dengan sebuah skalar.

1. Penjumlahan dua buah matriks

Dua buah matriks dapat dijumlahkan jika ukuran keduanya sama. Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ yang masing-masing berukuran $m \times n$. Jumlah A dan B, dilambangkan dengan $A + B$, menghasilkan matriks $C = [c_{ij}]$ yang berukuran $m \times n$, yang dalam hal ini $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ untuk setiap i dan j.

Catatan:

operasi pengurangan sama dengan operasi penjumlahan, tetapi dengan mengganti operator + dengan operator –.

Contoh 3.8

Penjumlahan dua buah matriks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 7 & -3 & 9 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 & 3+8 \\ 0+7 & 5-3 & -2+9 \\ 4+6 & 7+2 & 8+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 11 \\ 7 & 2 & 7 \\ 10 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

■

2. Perkalian dua buah matriks

Dua buah matriks dapat dikalikan jika jumlah kolom matriks pertama sama dengan jumlah baris matriks kedua. Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks $m \times n$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks $n \times p$. Maka, perkalian A dan B, dilambangkan dengan AB, menghasilkan matriks $C = [c_{ij}]$ yang berukuran $m \times p$, yang dalam hal ini

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Contoh 3.9

Perkalian dua buah matriks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(2)+(3)(3) & (1)(0)+3(-2) & (1)(-4)+(1)(6) \\ (2)(2)+(-1)(3) & (2)(0)+(-2)(-2) & (2)(-4)+(-1)(6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{bmatrix}$$

■

Sifat-sifat operasi perkalian matriks:

1. Perkalian matriks tidak komutatif, yaitu $AB \neq BA$.
2. Hukum asosiatif berlaku pada operasi matriks: $(AB)C = A(BC)$
3. Hukum distributif berlaku pada operasi matriks:
   (i) $A(B + C) = AB + AC$ (hukum distributif kiri)
   (ii) $(B + C)A = BA + CA$ (hukum distributif kanan)
4. Perkalian matriks dengan matriks identitas I tidak mengubah matriks, yaitu $AI = IA = A$.
5. Perpangkatan matriks didefinisikan sebagai berikut: $A^0 = I$, $A^k = \underbrace{AAA \cdots A}_{k \text{ kali}}$.
6. A adalah matriks ortogonal jika $AA^T = A^TA = I$.

3. Perkalian matriks dengan skalar.

Misalkan k adalah sebuah skalar. Perkalian matriks A dengan skalar k adalah mengalikan setiap elemen matriks dengan k.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Contoh 3.10

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } k = 3,$$

maka

$$3A = \begin{bmatrix} 3\times 2 & 3\times 1 & 3\times 0 \\ 3\times 3 & 3\times 7 & 3\times 5 \\ 3\times(-2) & 3\times 0 & 3\times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 9 & 21 & 15 \\ -6 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

■

3.2 Relasi

Di dalam Bab 2 mengenai himpunan kita sudah mengenal pasangan terurut (*ordered pairs*). Cara yang paling mudah menyatakan hubungan antara elemen dari dua himpunan adalah dengan himpunan pasangan terurut. Himpunan pasangan terurut diperoleh dari perkalian kartesian (*cartesian product*) antara dua himpunan.

Kita tulis kembali definisi perkalian kartesian. Perkalian kartesian (*cartesian products*) dari himpunan A dan B adalah himpunan yang elemennya semua pasangan terurut (*ordered pairs*) yang mungkin terbentuk dengan komponen pertama dari himpunan A dan komponen kedua dari himpunan B.

Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A$ dan b

Relasi antara himpunan A dan B –disebut **relasi biner**– didefinisikan sebagai berikut:

DEFINISI 3.2. Relasi biner R antara A dan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$.

Notasi: $R \subseteq (A \times B)$.

Jika $(a, b) \in R$, kita gunakan notasi $a\ R\ b$ yang artinya a dihubunganken dengan b oleh R, dan jika $(a, b) \notin R$, kita gunakan notasi $a \not R\ b$ yang artinya a tidak dihubungkan oleh b oleh relasi R. Himpunan A disebut **daerah asal** (*domain*) dari R, dan himpunan B disebut **daerah hasil** (*range* atau *codomain*) dari R.

Contoh 3.11

Misalkan A = {Amir, Budi, Cecep} adalah himpunan nama mahasiswa, dan B = {IF221, IF251, IF342, IF323} adalah himpunan kode mata kuliah di Jurusan Teknik Informatika. Perkalian kartesian antara A dan B menghasilkan himpunan pasangan terurut yang jumlah anggotanya adalah $|A| \cdot |B| = 3 \cdot 4 = 12$ buah, yaitu

$A \times B$ = {(Amir, IF221), (Amir, IF251), (Amir, IF342), (Amir, IF323),
(Budi, IF221), (Budi, IF251), (Budi, IF342), (Budi, IF323),
(Cecep, IF221), (Cecep, IF251), (Cecep, IF342), (Cecep, IF323) }

Misalkan R adalah relasi yang menyatakan mata kuliah yang diambil oleh mahasiswa pada Semester Ganjil, yaitu

R = {(Amir, IF251), (Amir, IF323), (Budi, IF221), (Budi, IF251), (Cecep, IF323) }

Kita dapat melihat bahwa $R \subseteq (A \times B)$, A adalah daerah asal R, dan B adalah daerah hasil R. Oleh karena (Amir, IF251) $\in R$, kita dapat menuliskan Amir R IF251, tetapi (Amir, IF342) $\notin R$ sehingga kita menuliskan Amir $\not R$ IF342. ■

Contoh 3.12

Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan

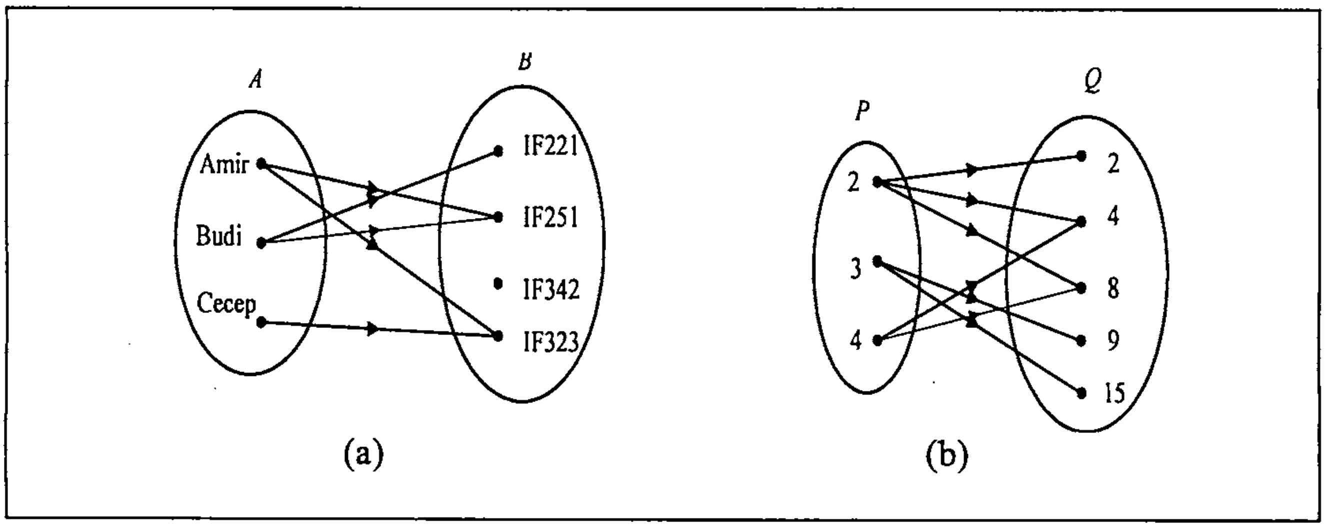
$(p, q) \in R$ jika p habis membagi q

maka kita peroleh

$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15) \}$

■

Pasangan terurut pada relasi dari himpunan A ke himpunan B dapat digambarkan dengan diagram panah. Gambarkan dua buah cakram/lingkaran, lalu tuliskan elemen-elemen A dan B pada masing-masing cakram. Jika $(a, b) \in R$, gambarkan panah dari a ke b yang menyatakan a berelasi dengan b. Diagram panah untuk masing-masing relasi pada Contoh 3.11 dan Contoh 3.12 diperlihatkan pada Gambar 3.1(a) dan (b).



Gambar 3.1 Diagram panah masing-masing untuk (a) Contoh 3.11 dan (b) Contoh 3.12

Daerah asal dan daerah hasil relasi bisa saja merupakan himpunan yang sama. Ini berarti relasi hanya didefinisikan pada sebuah himpunan. Misalnya R adalah relasi yang didefinisikan pada himpunan orang yang dalam hal ini $(x, y) \in R$ jika x adalah ibu dari y. Relasi yang didefinisikan hanya pada sebuah himpunan adalah relasi yang khusus. Definisi relasi khusus ini dikemukakan dengan definisi berikut:

DEFINISI 3.3. Relasi pada himpunan A adalah relasi dari $A \times A$.

Dengan kata lain, relasi pada himpunan A adalah himpunan bagian dari $A \times A$. Contoh 3.13 mengilustrasikan relasi semacam ini.

Contoh 3.13

Misalkan R adalah relasi pada $A = \{2, 3, 4, 8, 9\}$ yang didefinisikan oleh $(x, y) \in R$ jika x adalah faktor prima dari y. Maka

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 3), (3, 9)\}$$

■

3.3 Representasi Relasi

Selain dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut, ada banyak cara lain untuk merepresentasikan atau menyajikan relasi. Di bawah ini disajikan 3 cara yang lazim dipakai untuk merepresentasikan relasi, yaitu dengan tabel, matriks, dan graf berarah.

3.3.1 Representasi Relasi dengan Tabel

Relasi biner dapat direpresentasikan sebagai tabel. Kolom pertama tabel menyatakan daerah asal, sedangkan kolom kedua menyatakan daerah hasil.

Relasi R pada Contoh 3.11 dapat dinyatakan dengan Tabel 3.1, sedangkan relasi R pada Contoh 3.12 dinyatakan dengan Tabel 3.2.

Tabel 3.1

A	*B*
Amir	IF251
Amir	IF323
Budi	IF221
Budi	IF251
Cecep	IF323

Tabel 3.2

P	*Q*
2	2
2	4
4	4
2	8
4	8
3	9
3	15

Kita tidak merepresentasikan relasi pada sebuah himpunan dengan tabel, karena tidak lazim dilakukan.

3.3.2 Representasi Relasi dengan Matriks

Misalkan R adalah relasi dari $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Relasi R dapat disajikan dengan matriks $M = [m_{ij}]$,

$$M = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

yang dalam hal ini

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Dengan kata lain, elemen matriks pada posisi (i, j) bernilai 1 jika a_i dihubungkan dengan b_j, dan bernilai 0 jika a_i tidak dihubungkan dengan b_j. Matriks representasi relasi merupakan contoh matriks *zero-one*.

Relasi R pada Contoh 3.11 dapat dinyatakan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

yang dalam hal ini, a_1 = Amir, a_2 = Budi, a_3 = Cecep, dan b_1 = IF221, b_2 = IF251, b_3 = IF342, dan b_4 = IF323.

Relasi R pada Contoh 3.12 dapat dinyatakan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yang dalam hal ini, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, dan $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $b_3 = 8$, $b_4 = 9$, $b_5 = 15$.

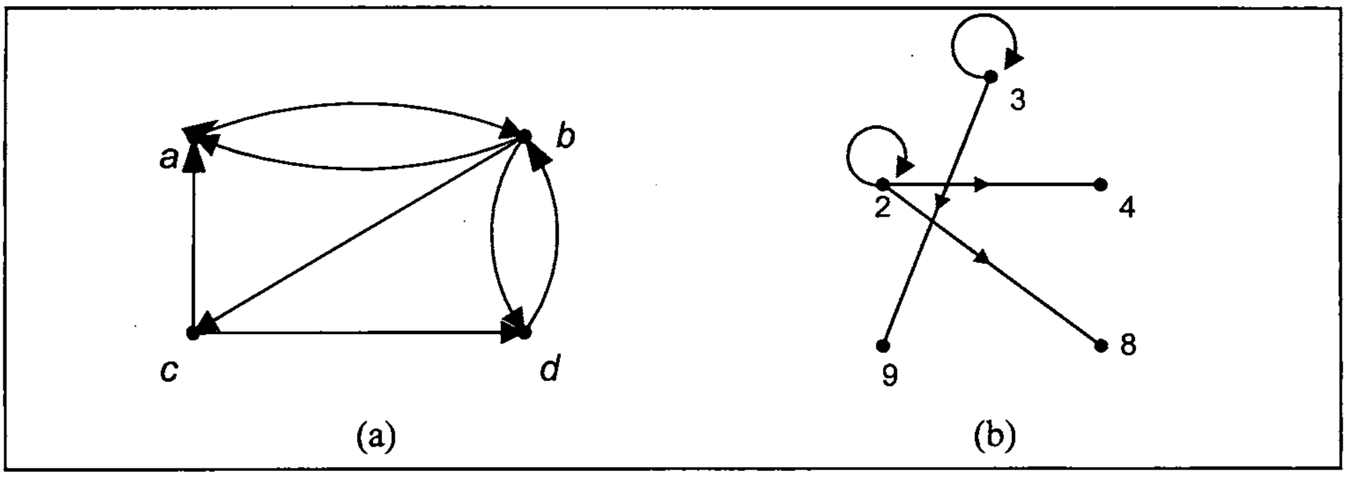
Relasi R pada sebuah himpunan adalah unik, yaitu mariks bujursangkar. Relasi pada sebuah himpunan pada Contoh 3.13 dapat dinyatakan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yang dalam hal ini, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$, $a_5 = 9$, dan $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_3 = 4$, $b_4 = 8$, $b_5 = 9$.

3.3.3 Representasi Relasi dengan Graf Berarah

Relasi pada sebuah himpunan dapat direpresentasikan secara grafis dengan **graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*) (Graf akan dibahas secara khusus di dalam Bab 8). Tiap elemen himpunan dinyatakan dengan sebuah titik (disebut juga simpul atau *vertex*), dan tiap pasangan terurut dinyatakan dengan busur (*arc*) yang arahnya ditunjukkan dengan sebuah panah. Dengan kata lain, jika $(a, b) \in R$, maka sebuah busur dibuat dari simpul a ke simpul b. Simpul a disebut **simpul asal** (*initial vertex*) dan simpul b disebut **simpul tujuan** (*terminal vertex*).



Gambar 3.2. (a) Representasi graf untuk relasi R = {(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, b)}
(b) Representasi graf untuk relasi R = {(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 3), (3, 9) pada Contoh 3.13.

Pasangan terurut (a, a) dinyatakan dengan busur dari simpul a ke simpul a sendiri. Busur semacam itu disebut **gelang** atau **kalang** (*loop*).

Sebagai contoh, misalkan R = {(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, b)} adalah relasi pada himpunan {a, b, c, d}. R direpresentasikan dengan graf berarah pada Gambar 3.2 (a). Perhatikan bahwa a mempunyai busur ke simpul a lagi. Busur yang mempunyai simpul asal sama dengan simpul tujuan dinamakan **kalang** (*loop*).

Relasi R pada Contoh 3.13 direpresentasikan dengan graf berarah pada Gambar 3.2(b).

Representasi dengan graf berarah umumnya digunakan untuk relasi pada sebuah himpunan. Relasi biner dari himpunan A ke himpunan B sebenarnya dapat juga direpresentasikan dengan graf berarah seperti diagram panah pada Gambar 3.1 (a). Setiap elemen pada himpunan A dan dinyatakan dengan sebuah simpul pada dan pada sisi yang lain setiap elemen pada himpunan B dinyatakan dengan sebuah simpul. Beberapa literatur matematika tidak mendefinisikan representasi graf berarah untuk relasi biner. Buku ini pun hanya menggunakan graf berarah untuk merepresentasikan relasi pada sebuah himpunan.

3.4 Relasi Inversi

Jika R adalah relasi pada himpunan orang-orang di mana $(a, b) \in R$ jika a adalah ayah dari b, maka kita dapat membuat kebalikan relasinya, yaitu (b, a) yang menyatakan b adalah anak dari a. Relasi baru tersebut dinamakan inversi dari relasi semula. Begitu pula relasi "lebih besar dari" mempunyai inversi "lebih kecil dari", relasi "lebih tua dari" mempunyai inversi "lebih muda dari".

Secara umum, jika diberikan relasi R dari himpunan A ke himpunan B, kita bisa mendefinisikan relasi baru dari B ke A dengan cara membalik urutan dari setiap pasangan terurut di dalam R. Relasi Definisi relasi inversi adalah sebagai berikut:

DEFINISI 3.4. Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B. Inversi dari relasi R, dilambangkan dengan R^{-1}, adalah relasi dari B ke A yang didefinisikan oleh

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

Contoh 3.14

Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan

$$(p, q) \in R \text{ jika } p \text{ habis membagi } q$$

maka kita peroleh

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$$

R^{-1} adalah *invers* dari relasi R, yaitu relasi dari Q ke P dengan

$$(q, p) \in R^{-1} \text{ jika } q \text{ adalah kelipatan dari } p$$

maka kita peroleh

$$R^{-1} = \{(2, 2), (4, 2), (4, 4), (8, 2), (8, 4), (9, 3), (15, 3)\}$$

Jika M adalah matriks yang merepresentasikan relasi R,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang merepresentasikan relasi R^{-1}, misalkan N, diperoleh dengan melakukan *transpose* terhadap matriks M,

$$N = M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

■

3.5 Mengkombinasikan Relasi

Karena relasi biner merupakan himpunan pasangan terurut, maka operasi himpunan seperti irisan, gabungan, selisih, dan beda setangkup antara dua relasi atau lebih juga berlaku. Hasil operasi tersebut juga berupa relasi. Dengan kata lain, jika R_1 dan R_2 masing-masing adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, maka operasi $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga adalah relasi dari A ke B.

Contoh 3.15

Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$. Relasi $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ dan relasi $R_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d)\}$ adalah relasi dari A ke B. Kita dapat mengkombinasikan kedua buah relasi tersebut untuk memperoleh/

$$R_1 \cap R_2 = \{(a, a)\}$$
$$R_1 \cup R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$$
$$R_1 - R_2 = \{(b, b), (c, c)\}$$
$$R_2 - R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d)\}$$
$$R_1 \oplus R_2 = \{(b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$$

■

Jika relasi R_1 dan R_2 masing-masing dinyatakan dengan matriks M_{R1} dan M_{R2}, maka matriks yang menyatakan gabungan dan irisan dari kedua relasi tersebut adalah

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2} \qquad \text{dan} \qquad M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang menyatakan $R_1 \cup R_2$ dan $R_1 \cap R_2$ adalah

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

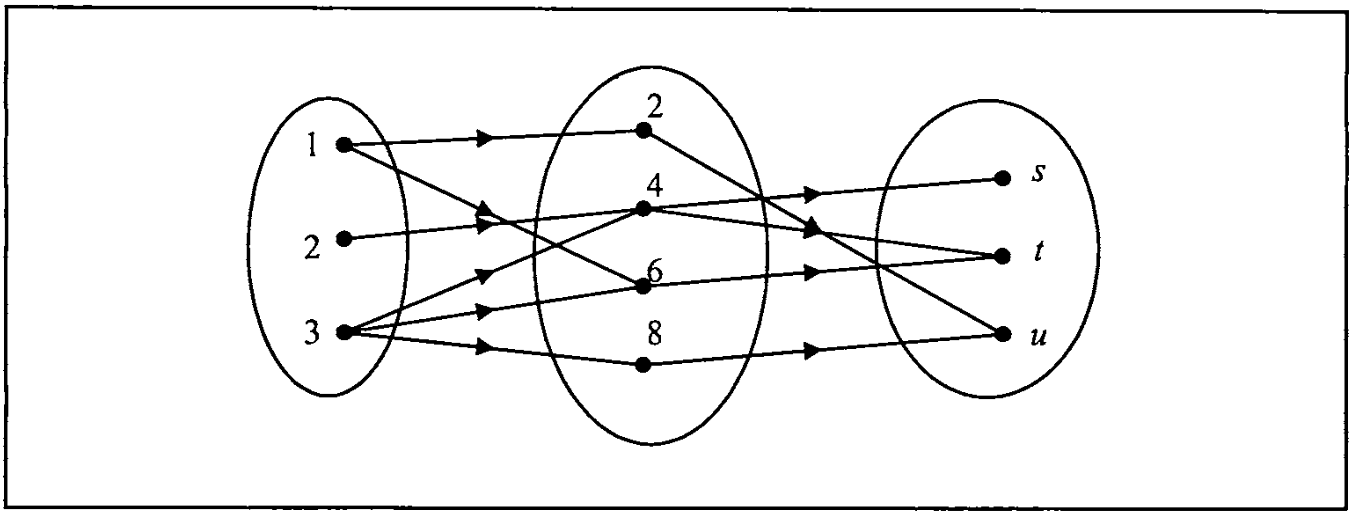
■

3.6 Komposisi Relasi

$$S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, \text{ dan untuk beberapa } b \in B, (a, b) \in R \text{ dan } (b, c) \in S\}$$

Dengan kata lain, menurut Definisi 3.5, kita menerapkan relasi R lebih dahulu, baru kemudian relasi S.

Contoh 3.17



Gambar 3.3 Diagram panah yang memperlihatkan komposisi relasi *R* dan *S* pada Contoh 3.17.

Jika relasi R_1 dan R_2 masing-masing dinyatakan dengan matriks M_{R1} dan M_{R2}, maka matriks yang menyatakan komposisi dari kedua relasi tersebut adalah

$$M_{R2 \circ R1} = M_{R1} \cdot M_{R2}$$

yang dalam hal ini operator "·" sama seperti pada perkalian matriks biasa, tetapi dengan mengganti tanda kali dengan "$\wedge$" dan tanda tambah dengan "$\vee$".

Contoh 3.18

Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang menyatakan $R_2 \circ R_1$ adalah

$$M_{R2 \circ R1} = M_{R1} \cdot M_{R2} = \begin{bmatrix} (1\wedge 0)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 0) & (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) \\ (1\wedge 0)\vee(1\wedge 0)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(1\wedge 0)\vee(0\wedge 0) & (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) \\ (0\wedge 0)\vee(0\wedge 0)\vee(0\wedge 1) & (0\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(0\wedge 0) & (0\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\vee(0\wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

■

Simbol R^n digunakan untuk mendefinisikan komposisi relasi dengan dirinya sendiri sebanyak n kali, yaitu

$$R^n = R \circ R \circ \ldots \circ R \qquad (\text{ sebanyak } n \text{ kali})$$

dan

$$M_{R^n} = M_R^{[n]}$$

Oleh karena

$$R^{n+1} = R^n \circ R$$

maka

$$M_{R^{n+1}} = M_R^{[n]} \cdot M_R$$

Contoh 3.19

Misalkan R = {(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2)} adalah relasi pada himpunan A = {1, 2, 3}. Tentukan R^2.

Penyelesaian:
Karena $R^2 = R \circ R$, maka

$R \circ R$ = {(1, 1), (1, 3), (1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (3, 2) }

Bila diselesaikan dengan menggunakan matriks, maka matriks yang merepresentasikan relasi R adalah

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$M_{R^2} = M_R^{[2]} = M_R \cdot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Periksalah bahwa matriks terakhir ini merepresentasikan {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3) } seperti jawaban di atas.

■

3.7 Sifat-sifat Relasi

Relasi pada sebuah himpunan adalah kasus yang paling sering dijumpai. Relasi ini mempunyai beberapa sifat. Sifat-sifat yang paling penting didefinisikan di bawah ini.

1. Refleksif (*reflexive*)

DEFINISI 3.6. Relasi R pada himpunan A disebut refleksif jika $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$.

Dengan kata lain, Definisi 3.6 menyatakan bahwa di dalam relasi refleksif setiap elemen di dalam A berhubungan dengan dirinya sendiri. Definisi 3.6 ini juga menyatakan bahwa relasi R pada himpunan A tidak refleksif jika ada $a \in A$ sedemikian sehingga $(a, a) \notin R$. Contoh-contoh berikut dapat memperjelas sifat relasi refleksif.

Contoh 3.20

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka

(a) Relasi $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ bersifat refleksif karena terdapat elemen relasi yang berbentuk (a, a), yaitu $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, dan $(4, 4)$.

(b) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ tidak bersifat refleksif karena $(3, 3) \notin R$. ■

Contoh 3.21

Relasi "habis membagi" pada himpunan bilangan bulat positif bersifat refleksif karena setiap bilangan bulat positif selalu habis membagi dirinya sendiri, sehingga $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$. ■

Contoh 3.22

Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif **N**.

$$R : x \text{ lebih besar dari } y, \qquad S : x + y = 5, \qquad T : 3x + y = 10$$

Tidak satupun dari ketiga relasi di atas yang refleksif karena, misalkan (2, 2) bukan anggota R, S, maupun T. ■

Ditinjau dari representasi relasi, relasi yang bersifat refleksif mempunyai matriks yang elemen diagonal utamanya semua bernilai 1, atau $m_{ii} = 1$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat refleksif dicirikan adanya gelang pada setiap simpulnya.

2. Setangkup (*symmetric*) dan Tolak-setangkup (*antisymmetric*)

DEFINISI 3.7. Relasi R pada himpunan A disebut **setangkup** jika $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \in R$, untuk semua $a, b \in A$.

Dengan kata lain, Definisi 3.7 menyatakan bahwa relasi R pada himpunan A tidak setangkup jika $(a, b) \in R$ sedemikian sehingga $(b, a) \notin R$. Sebagai contoh, misalkan A adalah himpunan mahasiswa di sebuah universitas dan R adalah relasi pada A sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ jika dan hanya jika a satu fakultas dengan b. Jelas bahwa b juga sefakultas dengan a. Jadi, R setangkup. Contoh lain, misalkan T adalah relasi pada himpunan bilangan bulat positif sedemikian sehingga $(a, b) \in T$ jika dan hanya jika $a \geq b$. Jelas T tidak setangkup, karena, misalnya $(6, 5) \in T$ tetapi $(5, 6) \notin T$.

DEFINISI 3.8. . Relasi R pada himpunan A disebut **tolak-setangkup** jika $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ maka $a = b$, untuk semua $a, b \in A$.

Definisi 3.8 menyatakan bahwa jika $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \notin R$ kecuali $a = b$. Definisi 3.8 juga menyatakan bahwa relasi R pada himpunan A tidak tolak-setangkup jika ada elemen berbeda a dan b sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$. Sebagai ilustrasi, misalkan A adalah himpunan tes yang diadakan untuk masuk sebuah perusahaan (misalnya tes tertulis, tes kesehatan, tes wawancara, dsb). Misalkan R adalah relasi pada A sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ jika tes a dilakukan sebelum tes b. Jelas, jika tes a dilakukan sebelum tes b, tes b tidak mungkin dilakukan sebelum tes a untuk dua tes a dan b yang berbeda. Dengan kata lain, $(b, a) \notin R$ kecuali $a = b$. Jadi, R adalah relasi tolak-setangkup.

Perhatikanlah bahwa istilah setangkup dan tolak-setangkup tidaklah berlawanan, karena suatu relasi dapat memiliki kedua sifat itu sekaligus. Namun, relasi tidak dapat memiliki kedua sifat tersebut sekaligus jika ia mengandung beberapa pasangan terurut berbentuk (a, b) yang mana $a \neq b$ [ROS03].

Contoh-contoh berikut dapat memperjelas sifat relasi setangkup dan tolak-setangkup.

Contoh 3.23

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka

(a) Relasi $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)\}$ bersifat setangkup karena jika $(a, b) \in R$ maka (b, a) juga $\in R$. Di sini $(1, 2)$ dan $(2, 1) \in R$, begitu juga $(2, 4)$ dan $(4, 2) \in R$.

(b) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2)\}$ tidak setangkup karena $(2, 3) \in R$, tetapi $(3, 2) \notin R$.

(c) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ tolak-setangkup karena $(1, 1) \in R$ dan $1 = 1$, $(2, 2) \in R$ dan $2 = 2$, $(3, 3) \in R$ dan $3 = 3$. Perhatikan bahwa R juga setangkup.

(d) Relasi $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$ tolak-setangkup karena $(1, 1) \in R$ dan $1 = 1$ dan, $(2, 2) \in R$ dan $2 = 2$ dan. Perhatikan bahwa R tidak setangkup.
(e) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 2)\}$ tidak tolak-setangkup karena $2 \neq 4$ tetapi (2, 4) dan (4, 2) anggota R. Relasi R pada (a) dan (b) di atas juga tidak tolak-setangkup.
(f) Relasi $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ tidak setangkup tetapi tolak-setangkup

■

Contoh 3.24

Relasi "habis membagi" pada himpunan bilangan bulat positif tidak setangkup karena jika a habis membagi b, b tidak habis membagi a, kecuali jika $a = b$. Sebagai contoh, 2 habis membagi 4, tetapi 4 tidak habis membagi 2. Karena itu, $(2, 4) \in R$ tetapi $(4, 2) \notin R$. Relasi "habis membagi" tolak-setangkup karena jika a habis membagi b dan b habis membagi a maka $a = b$. Sebagai contoh, 4 habis membagi 4. Karena itu, $(4, 4) \in R$ dan $4 = 4$.

■

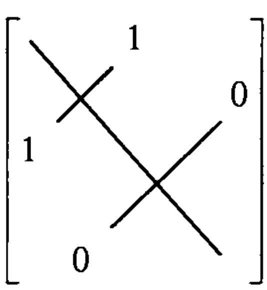
Contoh 3.25

Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif **N**.

$$R : x \text{ lebih besar dari } y, \qquad S : x + y = 6, \qquad T : 3x + y = 10$$

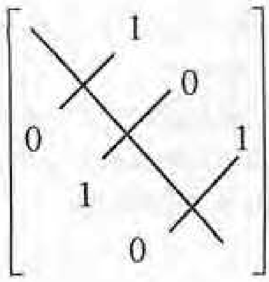
R bukan relasi setangkup karena, misalkan 5 lebih besar dari 3 tetapi 3 tidak lebih besar dari 5. S relasi setangkup karena (4, 2) dan (2, 4) adalah anggota S. T tidak setangkup karena, misalkan (3, 1) adalah anggota T tetapi (1, 3) bukan anggota T. S bukan relasi tolak-setangkup karena, misalkan $(4, 2) \in S$ dan $(4, 2) \in S$ tetapi $4 \neq 2$. Relasi R dan T keduanya tolak-setangkup (tunjukkan!). ■

Ditinjau dari representasi relasi, relasi yang bersifat setangkup mempunyai matriks yang elemen-elemen di bawah diagonal utama merupakan pencerminan dari elemen-elemen di atas diagonal utama, atau $m_{ij} = m_{ji} = 1$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Matriks dari relasi setangkup diperlihatkan seperti di bawah ini:



Sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat setangkup dicirikan oleh: jika ada busur dari a ke b, maka juga ada busur dari b ke a.

Matriks dari relasi tolak-setangkup mempunyai sifat yaitu jika $m_{ij} = 1$ dengan $i \neq j$, maka $m_{ji} = 0$. Dengan kata lain, matriks dari relasi tolak-setangkup adalah jika salah satu dari $m_{ij} = 0$ atau $m_{ji} = 0$ bila $i \neq j$. Matriks relasi tolak-setangkup diperlihatkan seperti berikut ini:



Sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat tolak-setangkup dicirikan oleh: jika dan hanya jika tidak pernah ada dua busur dalam arah berlawanan antara dua simpul berbeda.

3. Menghantar (*transitive*)

DEFINISI 3.9. Relasi R pada himpunan A disebut **menghantar** jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka $(a, c) \in R$, untuk semua $a, b, c \in A$.

Sebagai ilustrasi, misalkan A adalah himpunan orang, dan R adalah relasi pada A sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ jika dan hanya jika b adakah keturunan a. Jelas, jika b adalah keturunan a, yaitu $(a, b) \in R$, dan c adalah keturunan b, yaitu $(b, c) \in$ R, maka c juga keturunan a, yaitu $(a, c) \in R$. Jadi, R adalah relasi menghantar. Tetapi, jika T adalah relasi pada A sedemikian sehingga $(a, b) \in T$ jika a adalah ibu dari b, maka T tidak menghantar.

Contoh-contoh berikut dapat memperjelas sifat relasi menghantar dan tidak menghantar.

Contoh 3.26

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka

(a) $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$ bersifat menghantar. Periksa dengan membuat tabel berikut:

Pasangan berbentuk

(a, b)	(b, c)	(a, c)
(3, 2)	(2, 1)	(3, 1)
(4, 2)	(2, 1)	(4, 1)
(4, 3)	(3, 1)	(4, 1)
(4, 3)	(3, 2)	(4, 2)

(b) $R = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2)\}$ tidak manghantar karena $(2, 4)$ dan $(4, 2) \in R$, tetapi $(2, 2) \notin R$, begitu juga $(4, 2)$ dan $(2, 3) \in R$, tetapi $(4, 3) \notin R$.

(c) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ jelas menghantar (tunjukkan!).
(d) Relasi $R = \{(1, 2), (3, 4)\}$ menghantar karena tidak ada $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$ sedemikian sehingga $(a, c) \in R$.
(e) Relasi yang hanya berisi satu elemen seperti $R = \{(4, 5)\}$ selalu menghantar (alasannya sama seperti jawaban (d) di atas).

■

Contoh 3.27

Relasi "habis membagi" pada himpunan bilangan bulat positif bersifat menghantar. Misalkan bahwa a habis membagi b dan b habis membagi c. Maka terdapat bilangan positif m dan n sedemikian sehingga $b = ma$ dan $c = nb$. Di sini $c = nma$, sehingga a habis membagi c. Jadi, relasi "habis membagi" bersifat menghantar.

■

Contoh 3.28

Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif **N**.

$$R : x \text{ lebih besar dari } y, \qquad S : x + y = 6, \qquad T : 3x + y = 10$$

R adalah relasi menghantar karena jika $x > y$ dan $y > z$ maka $x > z$. S tidak menghantar karena, misalkan (4, 2) dan (2, 4) adalah anggota S tetapi $(4, 4) \notin S$. Sebaliknya, $T = \{(1, 7), (2, 4), (3, 1)\}$ tidak menghantar. ■

Ditinjau dari representasi relasi, relasi yang bersifat menghantar tidak mempunyai ciri khusus pada matriks representasinya, tetapi sifat menghantar pada graf berarah ditunjukkan oleh: jika ada busur dari a ke b dan dari b ke c, maka juga terdapat busur berarah dari a ke c.

Suatu relasi dapat mengandung beberapa sifat sekaligus atau sama sekali tidak mengandung sifat apa pun sama sekali. Contoh 3.29 dan Contoh 3.30 di bawah ini mengilustrasikan hal ini.

Contoh 3.29

Misalkan R adalah relasi yang didefinisikan pada himpunan bilangan bulat (*integer*), yang dalam hal ini $(x, y) \in R$ jika x adalah kelipatan dari y. Tentukan apakah R refleksif, setangkup, tolak-setangkup, dan/atau menghantar dengan menyebutkan masing-masing alasannya.

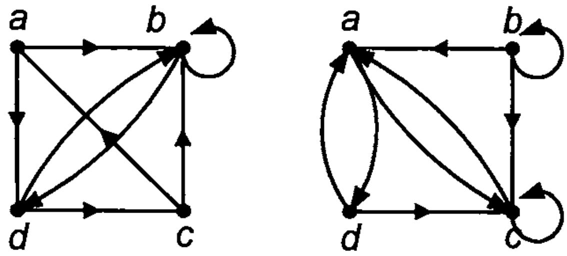
Penyelesaian:
Berdasarkan pernyataan "$(x, y) \in R$ jika x adalah kelipatan dari y" kita dapat menuliskannya sebagai $x = ky$, yang dalam hal ini $k = 0, 1, 2, \ldots$ Jadi $(x, y) = (ky, y) \in R$..
R bersifat refleksif, tolak-setangkup dan menghantar, tetapi R tidak setangkup:
(i) R refleksif sebab untuk $k = 1$, $(y, y) \in R$. Misalnya, (4, 4), (5, 5), dst adalah $\in R$.
(ii) R tidak setangkup sebab $x \geq y$ sehingga tidak mungkin y adalah kelipatan dari x kecuali jika $x = y$.

(iii) R tolak-setangkup karena $(x, y) \in R$ dan $(y, x) \in R$ jika $x = y$.
(iv) R menghantar sebab jika $x = ky$ dan $y = mz$, maka di sini $x = kmz$, sehingga x juga kelipatan z. Contohnya, jika $(8, 4) \in R$ dan $(4, 2) \in R$, maka $(8, 2) \in R$

■

Contoh 3.30

Diketahui dua buah relasi, R dan S, yang masing-masing didefinisikan pada himpunan $A = \{a, b, c, d\}$. Masing-masing relasi direpresentasikan dalam graf berarah berikut ini:



R S

Tentukan apakah R dan S refleksif, setangkup, tolak-setangkup, dan/atau menghantar. Jelaskan alasannya.

Penyelesaian:
Relasi R:
(i) R tidak refleksif sebab pada simpul a, c, dan d tidak ada busur *loop*
(i) R tidak setangkup sebab dari simpul a ke d ada busur berarah, sedangkan dari d ke a tidak ada. Begitu juga dari d ke c, dari c ke b, dan dari a ke b.
(ii) R tidak menghantar sebab ada busur dari b ke d dan busur dari d ke c tetapi tidak ada busur dari b ke c
(iii) R tidak tolak-setangkup sebab ada busur dari b ke d begitu juga sebaliknya dari d ke b, padahal $b \neq d$.

Relasi S:
(i) S tidak refleksif sebab pada simpul a dan d tidak ada sisi *loop*
(ii) S tidak setangkup sebab dari simpul b ke a ada sisi berarah, sedangkan dari a ke b tidak ada. Begitu juga dari b ke c dan dari d ke c.
(iii) S tidak menghantar sebab ada sisi dari c ke a dan sisi dari a ke d tetapi tidak ada sisi dari c ke d.
(iv) S tidak tolak-setangkup sebab ada busur dari a ke d begitu juga sebaliknya dari d ke a, padahal $a \neq d$. Begitu juga untuk busur (a, c) dan (c, a).

■

3.8 Relasi Kesetaraan

Contoh 3.29 memperlihatkan bahwa sebuah relasi dapat memiliki beberapa sifat sekaligus. Jika sebuah relasi mempunyai sifat setangkup, refleksif, dan menghantar sekaligus, maka relasi tersebut dinamakan relasi kesetaraan (*equivalence relation*).

DEFINISI 3.10. Relasi R pada himpunan A disebut **relasi kesetaraan** (*equivalence relation*) jika ia refleksif, setangkup dan menghantar.

Secara intuitif, di dalam relasi kesetaraan, dua benda berhubungan jika keduanya memiliki beberapa sifat yang sama atau memenuhi beberapa persyaratan yang sama [LIU85].

Dua elemen yang dihubungkan dengan relasi kesetaraan dinamakan **setara** (*equivalent*). Berdasarkan sifat yang dimilikinya, kesetaraan tersebut dijelaskan sebagai berikut: Karena relasi bersifat setangkup, maka dua elemen yang dihubungkan relasi adalah setara. Karena relasi bersifat refleksif, maka setiap elemen setara dengan dirinya sendiri. Karena relasi bersifat menghantar, maka jika a dan b setara dan b dan c setara, maka a dan c setara.

Sebagai contoh, misalkan R adalah relasi pada himpunan mahasiswa sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ jika a satu angkatan dengan b. Karena setiap mahasiswa seangkatan dengan dirinya sendiri, maka R jelas refleksif. Perhatikan, jika a seangkatan dengan b, maka b pasti seangkatan dengan a. Jadi, R setangkup. Selanjutnya, jika a seangkatan dengan b dan b seangkatan dengan c, maka pastilah a seangkatan dengan c. Jelas, R bersifat menghantar. Dengan demikian, R adalah relasi kesetaraan.

3.9 Relasi Pengurutan Parsial

Relasi sering digunakan untuk mengurutkan elemen-elemen di dalam himpunan. Misalnya, elemen-elemen di dalam himpunan bilangan bulat terurut oleh relasi $\leq$ (lebih besar atau sama dengan). Karena elemen-elemen tersebut terurut berdasarkan relasi $\leq$, maka jika diberikan sebuah bilangan bulat, kita dapat menentukan bilangan bulat berikutnya (*successor*) atau bilangan bulat sebelumnya (*predecessor*). Definisi keterurutan pada relasi dinyatakan oleh definisi berikut:

DEFINISI 3.11. Relasi R pada himpunan S dikatakan **relasi pengurutan parsial** (*partial ordering relation*) jika ia refleksif, tolak-setangkup, dan menghantar. Himpunan S bersama-sama dengan relasi R disebut **himpunan terurut secara parsial** (*partially ordered set*, atau *poset*), dan dilambangkan dengan (S, R).

Relasi $\geq$ pada himpunan bilangan bulat adalah relasi pengurutan parsial. Hal ini dijelaskan sebagai berikut: Karena $a \geq a$ untuk setiap bilangan bulat a, relasi $\geq$ refleksif. Relasi $\geq$ tolak-setangkup, karena jika $a \geq b$ dan $b \geq a$, maka $a = b$. Relasi $\geq$ menghantar, karena jika $a \geq b$ dan $b \geq c$ maka $a \geq c$.

Relasi "habis membagi" pada himpunan bilangan bulat juga adalah relasi pengurutan parsial. Hal ini dijelaskan sebagai berikut: Karena setiap bilangan bulat habis membagi dirinya sendiri, relasi "habis membagi" bersifat refleksif. Relasi "habis membagi" bersidat tolak-setangkup, karena a habis membagi b berarti b tidak habis membagi a, kecuali jika $a = b$. Terakhir, relasi ini menghantar karena jika a habis membagi b, dan b habis membagi c, maka a habis membagi c. Tinjau kembali Contoh 3.21, Contoh 3.24, dan Contoh 3.27 yang menjelaskan sifat pada relasi "habis membagi" ini.

Secara intuitif, di dalam relasi pengurutan parsial, istilah pengurutan berarti dua buah benda saling berhubungan jika salah satunya lebih kecil (lebih besar) daripada, atau lebih rendah (lebih tinggi) daripada lainnya menurut sifat atau kriteria tertentu. Istilah pengurutan itu sendiri memang menyatakan bahwa benda-benda di dalam himpunan tesrebut dirutkan berdasarkan sifat atau kriteria tersebut. Akan tetapi, ada juga kemungkinan dua buah benda di dalam himpunan tidak berhubungan dalam suatu relasi pengurutan parsial. Dalam hal demikian, kita tidak dapat membandingkan keduanya sehingga tidak dapat diidentifikasi mana yang lebih besar atau lebih kecil. Itulah alasan digunakan istilah pengurutan parsial atau pengurutan tak-lengkap [LIU85].

3.10 Klosur Relasi

Misalkan R adalah relasi yang tidak refleksif. Kita dapat membuat relasi baru yang mengandung R sedemikian sehingga relasi baru tersebut menjadi refleksif. Relasi baru tersebut haruslah relasi terkecil yang mengandung R. Sebagai contoh, relasi $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ pada himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ tidak refleksif. Bagaimana membuat relasi refleksif yang sesedikit mungkin dan mengandung R? Untuk melakukan hal ini, kita hanya perlu menambahkan (2, 2) dan (3, 3) ke dalam R karena dua elemen relasi ini yang belum terdapat di dalam R. Relasi baru yang terbentuk, dilambangkan dengan S, mengandung R, yaitu

$$S = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

Sekarang, S bersifat refleksif. Relasi S disebut **klosur refleksif** (*reflexive closure*) dari R. Sembarang relasi lain yang mengandung R harus juga memuat (2, 2) dan (3, 3). Catat juga bahwa S adalah himpunan bagian dari sembarang relasi refleksif lain yang memuat R.

Contoh lain, misalkan $R = \{(1, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ pada himpunan $A = \{1, 2, 3\}$. Jelas, R tidak setangkup. Bagaimana membuat relasi setangkup yang sesedikit mungkin dan mengandung R? Untuk melakukan hal ini, kita hanya perlu menambahkan (3, 1) dan (2, 3) ke dalam R karena dua elemen relasi ini yang belum terdapat di dalam S agar S menjadi setangkup. Relasi baru yang terbentuk mengandung R yaitu

$$S = \{(1, 3), (3, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 3), (3, 3)\}$$

Sekarang, S bersifat setangkup. Relasi S disebut **klosur setangkup** (*symmetric closure*) dari R.

Secara umum, misalkan R adalah relasi pada himpunan A. R dapat memiliki atau tidak memiliki sifat **P**, seperti refleksif, setangkup, atau menghantar. Jika terdapat relasi S dengan sifat **P** yang mengandung R sedemikian sehingga S adalah himpunan bagian dari setiap relasi dengan sifat P yang mengandung R, maka S disebut **klosur** (*closure*) atau tutupan dari R [ROS03].

Ada tiga jenis klosursi, yaitu klosur refleksif (*reflexive closure*), klosur setangkup (*symmetric closure*), dan klosur menghantar (*transitive closure*). Cara-cara membentuk ketiga klosur tersebut dijelaskan di bawah ini.

Klosur Refleksif

Misalkan R adalah sebuah relasi pada himpunan A. Klosur refleksif dari R adalah $R \cup \Delta$, yang dalam hal ini $\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\}$. Pada contoh kita di atas, $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ adalah relasi pada himpunan $A = \{1, 2, 3\}$, maka $\Delta = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, sehingga klosur refleksif dari R adalah

$$\begin{aligned} R \cup \Delta &= \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2)\} \cup \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \\ &= \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\} \end{aligned}$$

Contoh 3.31

Misalkan R adalah relasi $\{(a, b) \mid a \neq b\}$ pada himpunan bilangan bulat. Maka, klosur refleksif dari R adalah

$$R \cup \Delta = \{(a, b) \mid a \neq b\} \cup \{(a, a) \mid a \in \mathbf{Z}\} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$$

■

Klosur Setangkup

Misalkan R adalah sebuah relasi pada himpunan A. Klosur setangkup dari R adalah $R \cup R^{-1}$, yang dalam hal ini $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b)\ a \in R\}$. Pada contoh kita di atas, $R = \{(1, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ adalah relasi pada himpunan $A = \{1, 2, 3\}$, maka $R^{-1} = \{(3, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$ sehingga klosur setangkup dari R adalah

$$\begin{aligned} R \cup R^{-1} &= \{(1, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (3, 3)\} \cup \{(3, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3)\} \\ &= \{(1, 3), (3, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 3), (3, 3)\} \end{aligned}$$

Contoh 3.32

Misalkan R adalah relasi $\{(a, b) \mid a$ habis membagi $b\}$ pada himpunan bilangan bulat. Maka, klosur setangkup dari R adalah

$$\begin{aligned} R \cup R^{-1} &= \{(a, b) \mid a \text{ habis membagi } b\} \cup \{(b, a) \mid b \text{ habis membagi } a\} \\ &= \{(a, b) \mid a \text{ habis membagi } b \text{ atau } b \text{ habis membagi } a\} \end{aligned}$$

■

Klosur Menghantar

Pembentukan klosur menghantar lebih sulit daripada dua buah klosur sebelumnya. Sebagai contoh, misalkan $R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$ adalah relasi pada himpunan $A = \{1, 2, 3\}$. Relasi ini tidak transitif karena tidak mengandung semua pasangan (a, c) sedemikian sehingga (a, b) dan (b, c) di dalam R. Pasangan (a, c) yang tidak terdapat di dalam R adalah (1, 1), (2, 2), (2, 4), dan (3, 1). Penambahan semua pasangan ini ke dalam R sehingga menjadi

$$S = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1)\}$$

tidak menghasilkan relasi yang bersifat menghantar karena, misalnya terdapat $(3, 1) \in S$ dan $(1, 4) \in S$, tetapi $(3, 4) \notin S$.

Menemukan klosur menghantar dari sebuah relasi ekivalen dengan menentukan pasangan-pasangan simpul simpul mana di dalam graf berarah yang terhubung dengan sebuah lintasan. Teorema berikut berguna untuk menemukan klosur menghantar [ROS03].

TEOREMA 3.1. Klosur menghantar dari relasi R adalah

$$R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

Ingatlah bahwa $R^n = R \circ R \circ \ldots \circ R$. Bukti untuk teorema ini tidak ditulis di sini dan dapat ditemukan di dalam [ROS03].

LEMMA 3.1. Misalkan A adalah himpunan dengan n elemen, dan R adalah relasi pada himpunan A. Jika terdapat lintasan dengan panjang minimal 1 di dalam R dari a ke b, maka lintasan semacam itu panjangnya tidak melebihi n.

Dari *lemma* ini kita dapat menunjukkan bahwa klosur menghantar dari R adalah

$$R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$$

karena terdapat lintasan di dalam R^* antara dua simpul jika dan hanya jika terdapat lintasan antara simpul-simpul ini di dalam R^i, untuk i positif dengan $i \le n$.

Jika M_R adalah matriks yang merepresentasikan relasi R pada sebuah himpunan dengan n elemen, maka matriks klosur menghantar R^* adalah

$$M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} \vee \ldots \vee M_R^{[n]}$$

Contoh 3.33

Misalkan $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$ adalah relasi pada himpunan $A = \{1, 2, 3\}$. Tentukan klosur menghantar dari R.

Penyelesaian:
Matriks yang merepresentasikan relasi R adalah

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka, matriks klosur menghantar dari R adalah

$$M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]}$$

Karena

$$M_R^{[2]} = M_R \cdot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } M_R^{[3]} = M_R^{[2]} \cdot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

maka

$$M_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

■

Klosur menghantar mempunyai banyak aplikasi, salah satunya di bidang komunikasi data. Klosur menghantar menggambarkan bagaimana pesan dapat dikirim dari satu kota ke kota lain baik melalui hubungan komunikasi langsung atau melalui kota antara sebanyak mungkin [LIU85]. Misalkan jaringan komputer mempunyai pusat data di Jakarta, Bandung, Surabaya, Medan, Makassar, dan Kupang. Misalkan R adalah relasi yang mengandung (a, b) jika terdapat saluran telepon dari kota a ke kota b. Gambar 3.4 memperlihatkan graf berarah yang merepresentasikan relasi R ini. Karena tidak semua *link* langsung dari satu kota ke kota lain, maka pengiriman data dari Jakarta ke Surabaya tidak dapat dilakukan secara langsung. Relasi R tidak menghantar karena ia tidak mengandung semua pasangan pusat data yang dapat dihubungkan (baik *link* langsung atau tidak langsung). Klosur menghantar adalah relasi yang paling minimal yang berisi semua pasangan pusat data yang mempunyai link langsung atau tidak langsung dan mengandung R.

Gambar 3.4 Graf berarah yang merepresentasikan relasi saluran telepon antar pusat data.

3.11 Relasi *n-ary*

Relasi biner hanya menghubungkan antara dua buah himpunan. Relasi yang lebih umum menghubungkan lebih dari dua buah himpunan. Relasi tersebut dinamakan relasi *n-ary* (baca: ener). Jika $n = 2$, maka relasinya dinamakan relasi biner (bi = 2). Relasi *n-ary* mempunyai terapan penting di dalam basisdata.

DEFINISI 3.12 Misalkan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah himpunan. Relasi *n-ary* R pada himpunan-himpunan tersebut adalah himpunan bagian dari $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, atau dengan notasi $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Himpunan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ disebut daerah asal (*domain*) relasi dan n disebut **derajat**.

Contoh 3.34

Misalkan

NIM = {13598011, 13598014, 13598015, 13598019, 13598021, 13598025}
$Nama$ = {Amir, Santi, Irwan, Ahmad, Cecep, Hamdan}
$MatKul$ = {Matematika Diskrit, Algoritma, Struktur Data, Arsitektur Komputer}
$Nilai$ = {A, B, C, D, E}

berturut-turut adalah himpunan Nomor Induk Mahasiswa, himpunan nama-nama mahasiswa, himpunan nama-nama mata kuliah, dan himpunan nilai mata kuliah. Relasi MHS yang terdiri dari 5-tupel (NIM, $Nama$, $MatKul$, $Nilai$) merepresentasikan hubungan antara nomor induk mahasiswa, namanya, mata kuliah yang diambilnya, dan nilai mata kuliah,

$$MHS \subseteq NIM \times Nama \times MatKul \times Nilai$$

Satu contoh relasi yang bernama *MHS* adalah

MHS = {(13598011, Amir, Matematika Diskrit, A), (13598011, Amir, Arsitektur Komputer, B),
(13598014, Santi, Arsitektur Komputer, D), (13598015, Irwan, Algoritma, C),
(13598015, Irwan, Struktur Data C), (13598015, Irwan, Arsitektur Komputer, B),
(13598019, Ahmad, Algoritma , E), (13598021, Cecep, Algoritma, A),
(13598021, Cecep, Arsitektur Komputer, B), (13598025, Hamdan, Matematika Diskrit, B),
(13598025, Hamdan, Algoritma, A, B), (13598025, Hamdan, Struktur Data, C),
(13598025, Hamdan, Ars. Komputer, B)
}

Relasi *MHS* di atas juga dapat ditulis dalam bentuk Tabel 3.4.

Tabel 3.4

NIM	*Nama*	*MatKul*	*Nilai*
13598011	Amir	Matematika Diskrit	A
13598011	Amir	Arsitektur Komputer	B
13598014	Santi	Algoritma	D
13598015	Irwan	Algoritma	C
13598015	Irwan	Struktur Data	C
13598015	Irwan	Arsitektur Komputer	B
13598019	Ahmad	Algoritma	E
13598021	Cecep	Algoritma	B
13598021	Cecep	Arsitektur Komputer	B
13598025	Hamdan	Matematika Diskrit	B
13598025	Hamdan	Algoritma	A
13598025	Hamdan	Struktur Data	C
13598025	Hamdan	Arsitektur Komputer	B

Basisdata (*database*) adalah kumpulan tabel. Salah satu model basisdata adalah **model basisdata relasional** (*relational database*). Model basisdata ini didasarkan pada konsep relasi *n-ary*. Pada basisdata relasional, satu tabel menyatakan satu relasi. Setiap kolom pada tabel disebut **atribut**. Daerah asal dari atribut adalah himpunan tempat semua anggota atribut tersebut berada. Setiap tabel pada basisdata diimplementasikan secara fisik sebagai sebuah *file*. Satu baris data pada tabel menyatakan sebuah *record*, dan setiap atribut menyatakan sebuah *field*. Dengan kata lain, secara fisik basisdata adalah kumpulan *file*, sedangkan *file* adalah kumpulan *record*, setiap *record* terdiri atas sejumlah *field*.

Teori basisdata didasarkan pada konsep relasi *n-ary*, karena setiap tabel dapat mengandung lebih dari dua buah atribut (kolom). Meskipun secara fisik sebuah tabel dapat hanya mengandung sebuah atribut, namun secara teori hal ini bertentangan dengan konsep relasi *n*-ary.

Atribut khusus pada tabel yang mengidentifikasikan secara unik elemen relasi disebut **kunci primer** (*primary key*). Atribut kunci membedakan suatu baris tabel dengan baris tabel lainnya. Pada Contoh 3.34 di atas, *NIM* merupakan atribut kunci primer, karena setiap mahasiswa dibedakan dari *NIM*-nya (tidak ada dua mahasiswa yang mempunyai *NIM* sama). Atribut *Nama* tidak dapat menjadi kunci primer karena nama yang sama mungkin saja dimiliki oleh beberapa orang.

Operasi yang dilakukan terhadap basisdata dilakukan dengan perintah pertanyaan yang disebut *query*. Satu contoh *query* misalnya,

"Tampilkan semua mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematika Diskrit"
"Tampilkan daftar nilai mahasiswa dengan NIM = 13598015"
"Tampilkan daftar mahasiswa yang terdiri atas NIM dan mata kuliah yang diambil"

Pada hakekatnya, *query* terhadap basis data relasional dapat dinyatakan secara abstrak dengan operasi pada relasi *n-ary*. Ada beberapa operasi yang dapat digunakan, diantaranya adalah seleksi, proyeksi, dan *join*.

Seleksi

Operasi seleksi memilih baris tertentu dari suatu tabel yang memenuhi persyaratan tertentu.
Operator: σ

Contoh 3.35

Misalkan untuk relasi *MHS* kita ingin menampilkan daftar mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematik Diskrit. Operasi seleksinya adalah

$$\sigma_{Matkul=\text{"Matematika Diskrit"}}(MHS)$$

yang menghasilkan tupel (13598011, Amir, Matematika Diskrit, A) dan (13598025, Hamdan, Matematika Diskrit, B) ■

Proyeksi

Operasi proyeksi memilih kolom tertentu dari suatu tabel. Jika ada beberapa baris yang sama nilainya, maka hanya diambil satu kali.
Operator: π

Contoh 3.36

Operasi proyeksi

$$\pi_{Nama,\ MatKul,\ Nilai}(MHS)$$

menghasilkan Tabel 3.5. Sedangkan operasi proyeksi

$$\pi_{NIM,\ Nama}\ (MHS)$$

menghasilkan Tabel 3.6. ■

Tabel 3.5

Nama	*MatKul*	*Nilai*
Amir	Matematika Diskrit	A
Amir	Arsitektur Komputer	B
Santi	Algoritma	D
Irwan	Algoritma	C
Irwan	Struktur Data	C
Irwan	Arsitektur Komputer	B
Ahmad	Algoritma	E
Cecep	Algoritma	B
Cecep	Arsitektur Komputer	B
Hamdan	Matematika Diskrit	B
Hamdan	Algoritma	A
Hamdan	Struktur Data	C
Hamdan	Arsitektur Komputer	B

Tabel 3.6

NIM	*Nama*
13598011	Amir
13598014	Santi
13598015	Irwan
13598019	Ahmad
13598021	Cecep
13598025	Hamdan

Join

Operasi *join* menggabungkan dua buah tabel menjadi satu bila kedua tabel mempunyai atribut yang sama. Sebagai contoh, suatu tabel mengandung *NIM*, *Nama*, *JenisKelamin* (*JK*), dan tabel lain mengandung *NIM*, *Nama*, *MatKul*, *Nilai*. Gabungan keduanya menghasilkan tabel baru yang mengandung atribut *NIM*, *Nama*, *JenisKelamin*, *MatKul*, dan *Nilai*.
Operator: τ

Contoh 3.37

Misalkan relasi *MHS1* dinyatakan dengan Tabel 3.7 dan relasi *MHS2* dinyatakan dengan Tabel 3.8. Operasi *join*

$$\tau_{NIM,\ Nama}(MHS1,\ MHS2)$$

menghasilkan Tabel 3.9. ■

Tabel 3.7

NIM	*Nama*	*JK*
13598001	Hananto	L
13598002	Guntur	L
13598004	Heidi	W
13598006	Harman	L
13598007	Karim	L

Tabel 3.8

NIM	*Nama*	*MatKul*	*Nilai*
13598001	Hananto	Algoritma	A
13598001	Hananto	Basisdata	B
13598004	Heidi	Kalkulus I	B
13598006	Harman	Teori Bahasa	C
13598006	Harman	Agama	A
13598009	Junaidi	Statisitik	B
13598010	Farizka	Otomata	C

Tabel 3.9

NIM	*Nama*	*JK*	*MatKul*	*Nilai*
13598001	Hananto	L	Algoritma	A
13598001	Hananto	L	Basisdata	B
13598004	Heidi	W	Kalkulus I	B
13598006	Harman	L	Teori Bahasa	C
13598006	Harman	L	Agama	A

SQL

Bahasa khusus untuk *query* di dalam basisdata disebut *SQL* (*Structured Query Language*). Bahasa ini dirancang sedemikian sehingga dapat merealisasikan *query-query* abstak yang sudah dijelaskan di atas. Misalnya,

```
SELECT NIM, Nama, MatKul, Nilai
FROM MHS
WHERE MatKul = 'Matematika Diskrit'
```

adalah bahasa *SQL* yang bersesuaian untuk *query* abstrak

$$\sigma_{Matkul=\text{"Matematika Diskrit"}}(MHS)$$

yang menghasilkan tupel (13598011, Amir, Matematika Diskrit, A) dan (13598025, Hamdan, Matematika Diskrit, B).

3.12 Fungsi

Berapa lama waktu yang dibutuhkan komputer untuk mengeksekusi sebuah program? Jawabannya bergantung pada ukuran masukan yang diberikan. Kalau program kita mengalikan matriks yang berukuran 10×10 tentu kebutuhan waktunya berbeda jika matriknya berukuran 100×100. Ini berarti ada hubungan antara ukuran masukan dengan kebutuhan waktu program. Dengan kata lain, kebutuhan waktu sebuah program adalah *fungsi* dari ukuran masukan.

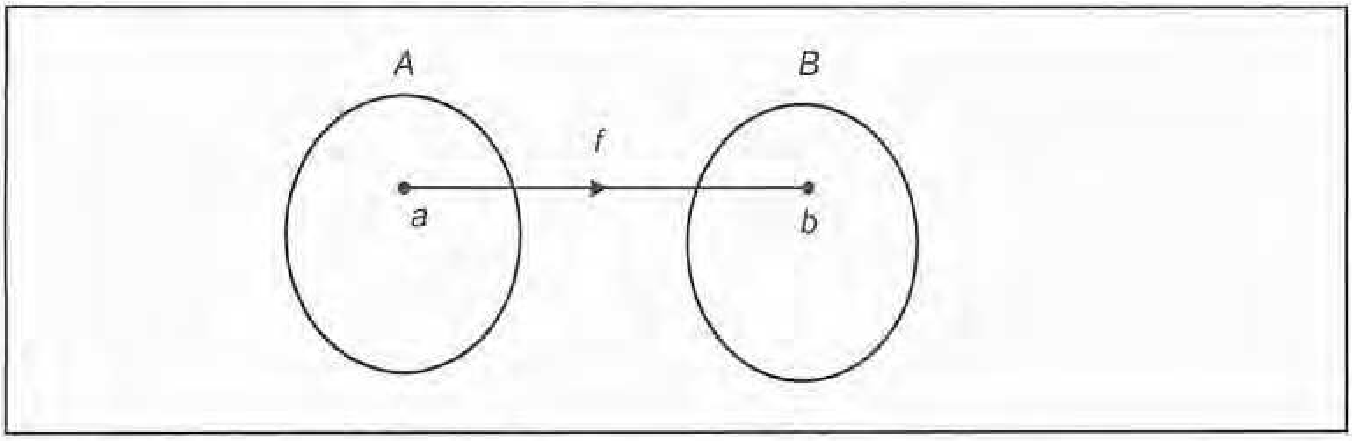
Konsep fungsi sangat penting di dalam matematika diskrit. Fungsi sering dipakai untuk mentransformasikan elemen di sebuah himpunan dengan elemen di himpunan lain. Definisi fungsi yang kita gunakan di dalam buku ini adalah:

DEFINISI 3.13. Misalkan A dan B himpunan. Relasi biner f dari A ke B merupakan suatu fungsi jika setiap elemen di dalam A dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B. Jika f adalah fungsi dari A ke B kita menuliskan

$$f : A \rightarrow B$$

yang artinya f **memetakan** A ke B.

Nama lain untuk fungsi adalah **pemetaan** atau **transformasi**. Kita menuliskan $f(a) = b$ jika elemen a di dalam A dihubungkan dengan elemen b di dalam B. Himpunan A disebut **daerah asal** (*domain*) dari f dan himpunan B disebut **daerah hasil** (*codomain*) dari f. Jika $f(a) = b$, maka b dinamakan **bayangan** (*image*) dari a dan a dinamakan **pra-bayangan** (*pre-image*) dari b. Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f disebut **jelajah** (*range*) dari f. Perhatikan bahwa jelajah dari f adalah himpunan bagian (mungkin *proper subset*) dari B. Gambar 3.5 merepresentasikan fungsi dari A ke B..



Gambar 3.5 Fungsi f memetakan A ke B

Fungsi adalah relasi yang khusus. Kekhususan ini tercakup pada dua hal penting [DOE85]:

1. Tiap elemen di dalam himpunan A, yang merupakan daerah asal f, harus digunakan oleh prosedur atau kaidah yang mendefinisikan f.
2. Frasa "dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B" berarti bahwa jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$, maka $b = c$.

Fungsi dapat dispesifikasikan dalam berbagai bentuk, diantaranya:

1. Himpunan pasangan terurut.
   Ingatlah bahwa fungsi adalah relasi, sedangkan relasi biasanya dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut.

2. Formula pengisian nilai (*assignment*).
Di dalam kuliah aljabar atau kalkulus, fungsi dispesifikasikan dalam bentuk rumus pengisian nilai (*assignment*), misalnya $f(x) = 2x + 10$, $f(x) = x^2$, dan $f(x) = 1/x$. Jika himpunan daerah asal maupun daerah hasil fungsi tidak dinyatakan secara spesifik, maka diasumsikan daerah asal fungsi adalah **R** dan daerah hasilnya juga **R**. Dalam himpunan pasangan terurut kita mendefinisikan fungsi sebagai $f = \{(x, x_2) \mid x \in \mathbf{R}\}$.

3. Kata-kata
Fungsi dapat dinyatakan secara eksplisit dalam rangkaian kata-kata. Misalnya "f adalah fungsi yang memetakan jumlah bit 1 di dalam suatu *string* biner".

4. Kode program (*source code*)
Fungsi dispesifikasikan dalam bentuk kode program komputer. Misalnya dalam Bahasa Pascal, fungsi yang mengembalikan nilai mutlak dari sebuah bilangan bulat x, yaitu $|x|$, ditulis sebagai berikut:

```
function abs(x : integer) : integer;
begin
   if x < 0 then
      abs := -x
   else
      abs := x;
end;
```

Daerah asal dari fungsi `abs` di atas secara jelas dinyatakan himpunan bilangan bulat (**integer**), dan daerah hasilnya juga himpunan bilangan bulat.

Contoh 3.37

Relasi $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B. Di sini $f(1) = u$, $f(2) = v$, dan $f(3) = w$. Daerah asal dari f adalah A dan daerah hasil adalah B. Jelajah dari f adalah $\{u, v, w\}$, yang dalam hal ini sama dengan himpunan B.

■

Contoh 3.38

Relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B, meskipun u merupakan bayangan dari dua elemen A. Daerah asal fungsi adalah A, daerah hasilnya adalah B, dan jelajah fungsi adalah $\{u, v\}$.

■

Contoh 3.39

Relasi $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena tidak semua elemen A dipetakan ke B.

■

Contoh 3.40

Relasi $f = \{(1, u), (1, v), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena 1 dipetakan ke dua buah elemen B, yaitu u dan v (ingat Definisi 3.13).

■

Contoh 3.41

Misalkan f : $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2$. Daerah asal dan daerah hasil dari f adalah himpunan bilangan bulat, dan jelajah dari f adalah himpunan bilangan bulat tidak-negatif (karena kuadrat dari sembarang bilangan bulat tidak mungkin negatif).

■

Contoh 3.42

Misalkan A adalah himpunan mahasiswa di ITB. Manakah dari pemetaan berikut yang mendefinisikan sebuah fungsi pada himpunan A?
(i) Setiap mahasiswa memetakan NIM (Nomor Induk Mahasiswa).
(ii) Setiap mahasiswa memetakan nomor *handphone*-nya.
(iii) Setiap mahasiswa memetakan dosen walinya.
(iv) Setiap mahasiswa memetakan anaknya.

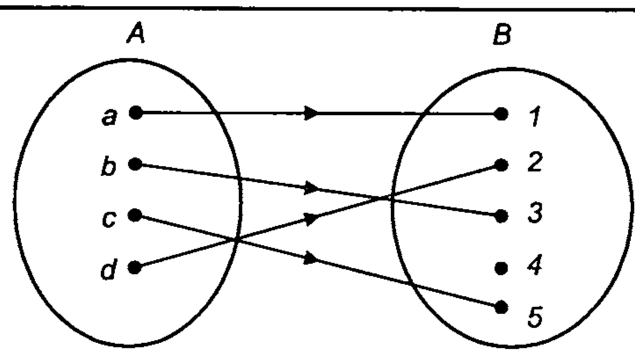
Penyelesaian:
(i) Ya, karena setiap mahasiswa hanya mempunyai satu buah NIM.
(ii) Tidak, karena ada mahasiswa yang mempunyai lebih dari satu nomor HP atau tidak mempunyai HP sama sekali.
(iii) Ya, karena setiap mahasiswa hanya mempunyai 1 orang dosen wali.
(iv) Tidak, jika ada mahasiwa yang belum menikah.

■

Bergantung pada bayangan, fungsi dibedakan menjadi fungsi satu-ke-satu (*one-to-one*), fungsi pada (*onto*), atau bukan salah satu dari keduanya. Kita tinjau definisi jenis setiap fungsi tersebut berikut ini.

DEFINISI 3.14. Fungsi f dikatakan **satu-ke-satu** (*one-to-one*) atau **injektif** (*injective*) jika tidak ada dua elemen himpunan A yang memiliki bayangan sama. Dengan kata lain, jika a dan b adalah anggota himpunan A, maka $f(a) \neq f(b)$ bilamana $a \neq b$. Jika $f(a) = f(b)$ maka implikasinya adalah $a = b$.

Gambar 3.6 mengilustrasikan fungsi satu-ke-satu.



Gambar 3.6 Fungsi satu-ke-satu

Contoh 3.43

Relasi $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w, x\}$ adalah fungsi satu-ke-satu. Relasi $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ juga fungsi satu-ke-satu, tetapi relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena $f(1) = f(2) = u$.

■

Contoh 3.44

Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi satu-ke-satu?

Penyelesaian:

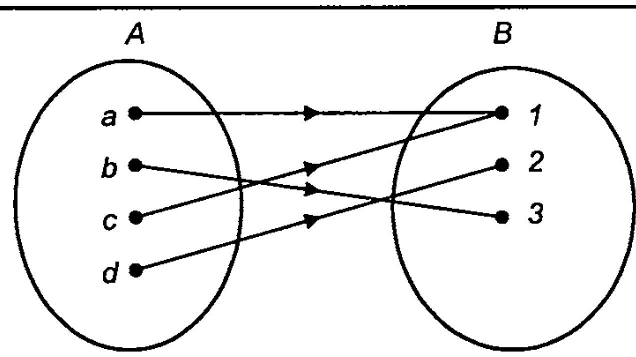
(i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena untuk dua x yang bernilai mutlak sama tetapi tandanya berbeda nilai fungsinya sama, misalnya $f(2) = f(-2) = 5$ padahal $-2 \neq 2$.

(ii) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi satu-ke-satu karena untuk $a \neq b$, $a - 1 \neq b - 1$. Misalnya untuk $x = 2$, $f(2) = 1$ dan untuk $x = -2$, $f(-2) = -3$.

■

DEFINISI 3.14. Fungsi f dikatakan **pada** (*onto*) atau **surjektif** (*surjective*) jika setiap elemen himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan A. Dengan kata lain seluruh elemen B merupakan jelajah dari f. Fungsi f disebut fungsi pada himpunan B.

Gambar 3.7 mengilustrasikan fungsi pada.



Gambar 3.7 Fungsi pada

Contoh 3.45

Relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi pada karena w tidak termasuk jelajah dari f. Relasi $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi pada karena semua anggota B merupakan jelajah dari f.

■

Contoh 3.46

Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi pada?

Penyelesaian:

(i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi pada, karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari f. Misalnya tidak ada nilai x yang membuat nilai fungsi sama dengan 0, yaitu $x^2 + 1 = 0$ tidak dipenuhi untuk nilai x berapapun.

(ii) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi pada karena untuk setiap bilangan bulat y, selalu ada nilai x yang memenuhi, yaitu $y = x - 1$ akan dipenuhi untuk $x = y + 1$.

■

DEFINISI 3.14. Fungsi f dikatakan **berkoresponden satu-ke-satu** atau **bijeksi** (*bijection*) jika ia fungsi satu-ke-satu dan juga fungsi pada.

Contoh 3.47

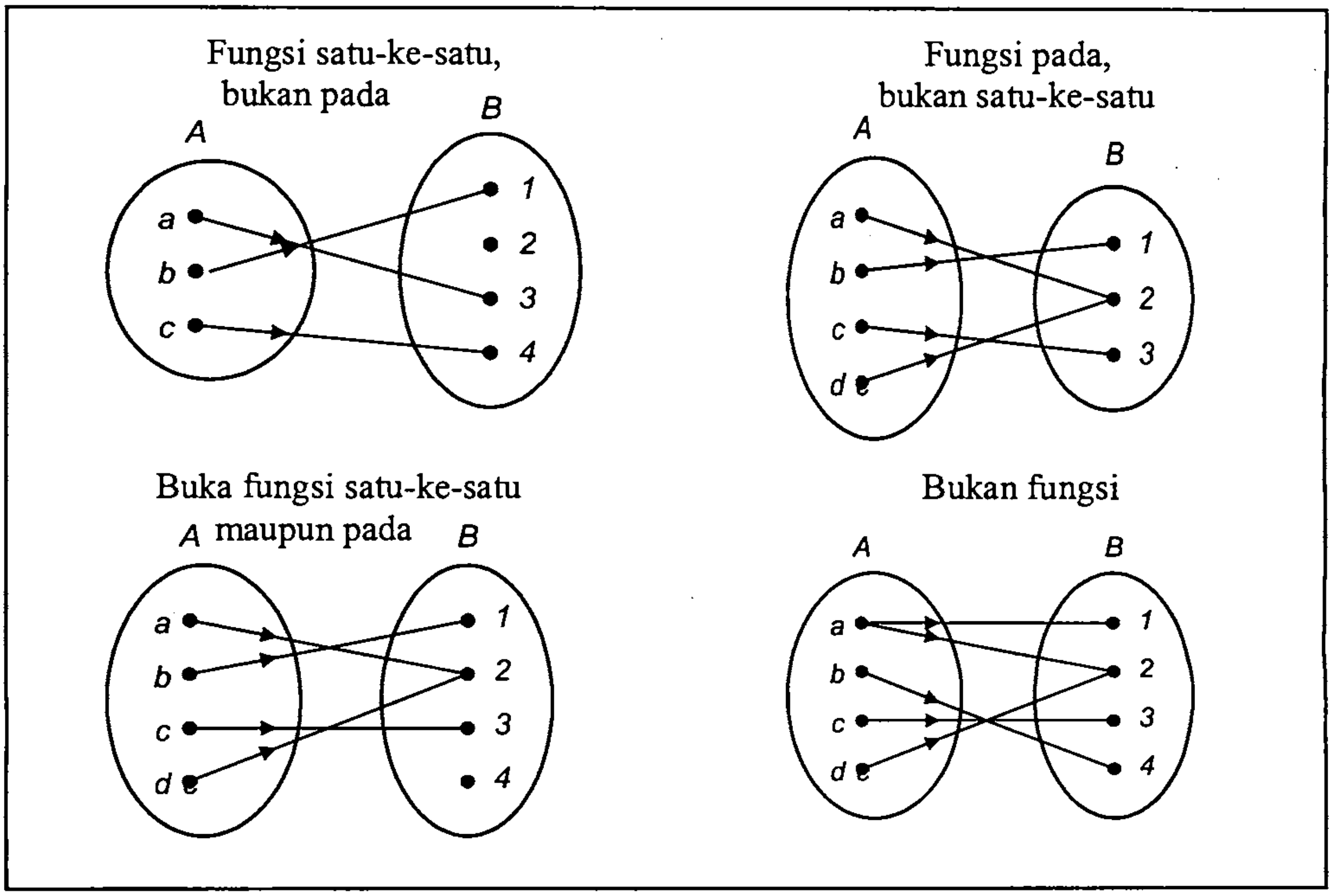
Relasi $f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

■

Contoh 3.48

Fungsi $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada. ■

Gambar 3.8 memperlihatkan perbedaan antara fungsi satu-ke-satu tetapi bukan pada, fungsi pada tetapi bukan satu-ke-satu, bukan fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada, dan bukan fungsi.

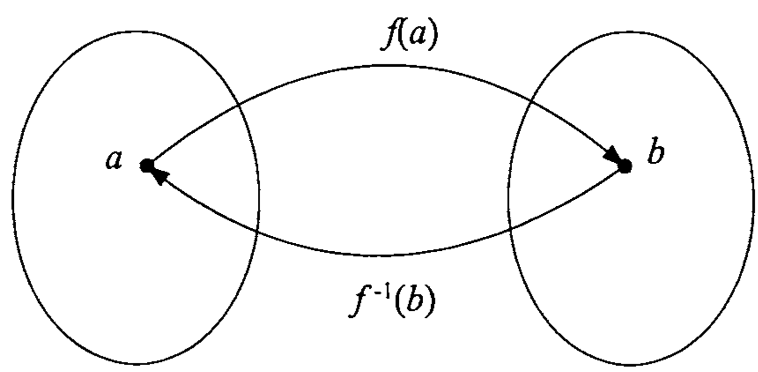


Gambar 3.8 Perbedaan empat tipe korespondensi

3.13 Fungsi Inversi

Jika f adalah fungsi berkoresponden satu-ke-satu dari A ke B, maka kita dapat menemukan **balikan** atau **inversi** (*invers*) dari f. Fungsi inversi dari f dilambangkan dengan f^{-1}. Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$. Gambar 3.9 memperlihatkan diagram panah yang menggambarkan f^{-1} sebagai inversi fungsi f.

Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu sering dinamakan juga fungsi yang *invertible* (dapat dibalikkan), karena kita dapat mendefinisikan fungsi balikannya. Sebuah fungsi dikatakan *not invertible* (tidak dapat dibalikkan) jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena fungsi balikannya tidak ada.



Gambar 3.9 Fungsi f^{-1} sebagai inversi fungsi f

Contoh 3.49

Relasi $f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu. Inversi fungsi f adalah $f^{-1} = \{(u, 1), (w, 2), (v, 3)\}$. Jadi, f adalah fungsi *invertible*.

■

Contoh 3.50

Tentukan inversi fungsi $f(x) = x - 1$.

Penyelesaian:
Dari Contoh 3.48 kita sudah menyimpulkan bahwa $f(x) = x - 1$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, jadi balikan fungsi tersebut ada. Misalkan $f(x) = y$, sehingga $y = x - 1$, maka $x = y + 1$. Jadi, inversi fungsi balikannya adalah $f^{-1}(y) = y + 1$.

■

Contoh 3.51

Tentukan inversi fungsi $f(x) = x^2 + 1$.

Penyelesaian:
Dari Contoh 3.41 dan 3.44 kita sudah menyimpulkan bahwa $f(x) = x - 1$ bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, sehingga fungsi inversinya tidak ada. Jadi, $f(x) = x^2 + 1$ adalah fungsi yang *not invertible.*

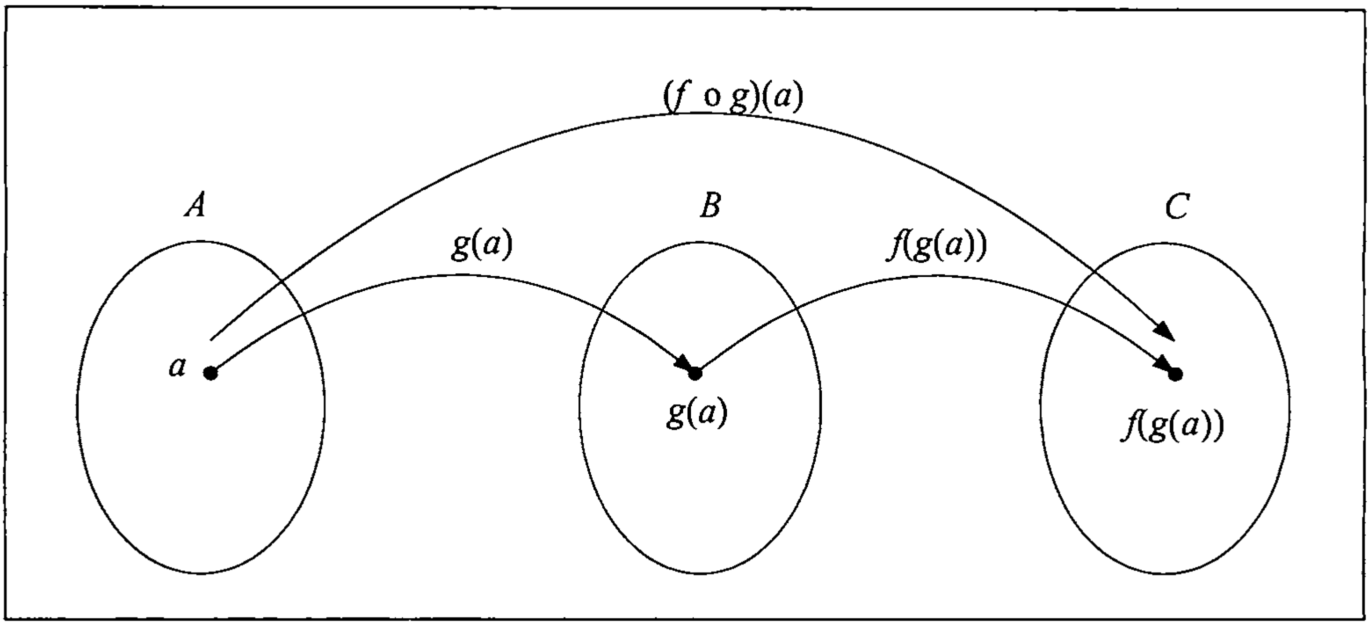
■

3.14 Komposisi Fungsi

Karena fungsi merupakan bentuk khusus dari relasi, kita juga dapat melakukan komposisi dari dua buah fungsi. Misalkan g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan f adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi f dan g, dinotasikan dengan $f \circ g$, adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

Dengan kata lain, $f \circ g$ adalah fungsi yang memetakan nilai dari $g(a)$ ke f. Gambar 3.10 mengilustrasikan komposisi dua buah fungsi.



Gambar 3.10 Komposisi dua buah fungsi

Contoh 3.52

Diberikan fungsi $g = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ yang memetakan $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$, dan fungsi $f = \{(u, y), (v, x), (w, z)\}$ yang memetakan $B = \{u, v, w\}$ ke $C = \{x, y, z\}$. Fungsi komposisi dari A ke C adalah

$$f \circ g = \{(1, y), (2, y), (3, x)\}$$

■

Contoh 3.53

Diberikan fungsi $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.

Penyelesaian:

(i) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = x^2 + 1 - 1 = x^2$.

(ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 1) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$.

■

Contoh 3.53 ini memperlihatkan bahwa komposisi dua fungsi, f dan g, tidak komutatif, kecuali jika $f = g$.

3.15 Beberapa Fungsi Khusus

Bagian ini memberikan beberapa fungsi yang dipakai di dalam ilmu komputer, yaitu fungsi *floor*, *ceiling*, modulo, faktorial, perpangkatan, dan logaritmik.

1. Fungsi *Floor* dan *Ceiling*

Misalkan x adalah bilangan riil, berarti x berada di antara dua bilangan bulat. Fungsi *floor* dari x, dilambangkan dengan $\lfloor x \rfloor$ dan fungsi *ceiling* dari x dilambangkan dengan $\lceil x \rceil$. Definisi kedua fungsi tersebut adalah:

$\lfloor x \rfloor$ menyatakan nilai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x

$\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x

Dengan kata lain, fungsi *floor* membulatkan x ke bawah, sedangkan fungsi *ceiling* membulatkan x ke atas.

Contoh 3.53

Beberapa contoh nilai fungsi *floor* dan *ceiling*:

$$\begin{array}{ll}
\lfloor 3.5 \rfloor = 3 & \lceil 3.5 \rceil = 4 \\
\lfloor 0.5 \rfloor = 0 & \lceil 0.5 \rceil = 1 \\
\lfloor 4.8 \rfloor = 4 & \lceil 4.8 \rceil = 5 \\
\lfloor -0.5 \rfloor = -1 & \lceil -0.5 \rceil = 0 \\
\lfloor -3.5 \rfloor = -4 & \lceil -3.5 \rceil = -3
\end{array}$$

■

Contoh 3.54

Di dalam komputer, data dikodekan dalam untaian *byte*, satu *byte* terdiri atas 8 bit. Jika panjang data 125 bit, maka jumlah *byte* yang diperlukan untuk merepresentasikan data adalah $\lceil 125/8 \rceil = 16$ *byte*. Perhatikanlah bahwa $16 \times 8 = 128$ bit, sehingga untuk *byte* yang terakhir perlu ditambahkan 3 bit ekstra agar satu byte tetap 8 bit (bit ekstra yang ditambahkan untuk menggenapi 8 bit disebut *padding bits*). ■

2. Fungsi modulo

Misalkan a adalah sembarang bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat positif. Fungsi modulo adalah fungsi dengan operator **mod**, yang dalam hal ini:

a mod m memberikan sisa pembagian bilangan bulat bila a dibagi dengan m

Secara lebih rinci, a mod $m = r$ sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 \leq r < m$. Lebih jauh mengenai aritmetika modulo akan dibicarakan di dalam Bab 5.

Contoh 3.55

Beberapa contoh fungsi modulo

25 mod 7 = 4
15 mod 4 = 3
3612 mod 45 = 12
0 mod 5 = 0
–25 mod 7 = 3 (sebab $-25 = 7 \cdot (-4) + 3$)

■

Contoh 3.56

Misalkan f adalah fungsi dari $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ke X yang didefinisikan oleh $f(x) = 4x$ mod 5. Tuliskan f sebagai himpunan pasangan terurut. Apakah f fungsi satu-ke-satu (*one-to-one*) atau dipetakan pada (*onto*)?

Penyelesaian:

$x = 0 \rightarrow f(0) = 4(0) \bmod 5 = 0$
$x = 1 \rightarrow f(1) = 4(1) \bmod 5 = 4$
$x = 2 \rightarrow f(0) = 4(2) \bmod 5 = 3$
$x = 3 \rightarrow f(0) = 4(3) \bmod 5 = 2$
$x = 4 \rightarrow f(0) = 4(4) \bmod 5 = 1$

Jadi, $f = \{(0,0), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$

Jelas fungsi f adalah fungsi satu-ke-satu karena tidak ada dua elemen di X yang mempunyai peta yang sama di himpunan hasil. Fungsi f juga fungsi dipetakan pada (*onto*) karena setiap elemen di X adalah peta dari himpunan daerah asal (yaitu X juga). Dengan kata lain, f adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu (*bijective*). ■

---

3. Fungsi Faktorial

Untuk sembarang bilangan bulat tidak-negatif n, faktoral dari n, dilambangkan dengan $n!$, didefinisikan sebagai

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 1 \times 2 \times \cdots . \times (n-1) \times n & , n > 0 \end{cases}$$

Contoh 3.57

Beberapa contoh fungsi faktorial

$0! = 1$
$1! = 1$
$4! = 1 . 2 .$
$5! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120$ ■

4. Fungsi Eksponensial dan Logaritmik

Fungsi eksponensial berbentuk

$$a^n = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n} & , n > 0 \end{cases}$$

Untuk kasus perpangkatan negatif,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Fungsi logaritmik berbentuk

$$y = {}^a\log x \leftrightarrow x = a^y$$

Contoh 3.58

Beberapa contoh fungsi eksponensial dan logaritmik

$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

$4^{-3} = \frac{1}{64}$

${}^4\log 64 = 3$ karena $64 = 4^3$

$\lfloor {}^2\log 1000 \rfloor = 9$ karena $2^9 = 512$ tetapi $2^{10} = 1024$

■

3.16 Fungsi Rekursif

Tinjau kembali fungsi untuk menghitung faktorial dari bilangan bulat tak-negatif n yang didefinisikan sebagai berikut:

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 1 \times 2 \times \cdots . \times (n-1) \times n & , n > 0 \end{cases}$$

Sebagai contoh,

$$0! = 1$$
$$1! = 1$$
$$2! = 1 \times 2$$
$$3! = 1 \times 2 \times 3$$
$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$$

Sekarang coba perhatikan bahwa faktorial dari n dapat didefinisikan dalam terminologi faktorial juga:

$$0! = 1$$
$$1! = 1 \times 0!$$
$$2! = 2 \times 1!$$
$$3! = 3 \times 2!$$
$$4! = 4 \times 3!$$

Nyatalah, bahwa untuk $n > 0$ kita melihat bahwa

$$n! = 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n = (n-1)! \times n.$$

Dengan menggunakan notasi matematika, maka $n!$ didefinisikan dalam hubungan rekursif sebagai berikut:

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ n \times (n-1)! & , n > 0 \end{cases}$$

Jika kita misalkan $f(n) = n!$, maka fungsi faktorial di atas dapat juga ditulis sebagai

$$f(n) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ n \times f(n-1) & , n > 0 \end{cases}$$

Kita dapat melihat bahwa dalam proses perhitungan faktorial bilangan tak-negatif n terdapat definisi faktorial itu sendiri. Cara pendefinisian seperti itu, yang mendefiniskan sebuah objek dalam terminologi dirinya sendiri dinamakan definisi rekursif.

DEFINISI 3.15. Fungsi f dikatakan fungsi rekursif jika definisi fungsinya mengacu pada dirinya sendiri.

Nama lain dari fungsi rekursif adalah **relasi rekursif** (*recurrence relation*). Ingatlah bahwa fungsi adalah bentuk khusus dari relasi.

Fungsi rekursif disusun oleh dua bagian:

(a) *Basis*
Bagian yang berisi nilai awal yang tidak mengacu pada dirinya sendiri. Bagian ini juga sekaligus menghentikan definisi rekursif (dan memberikan sebuah nilai yang terdefinisi pada fungsi rekursif).

(b) *Rekurens*

Bagian ini mendefinisikan argumen fungsi dalam terminologi dirinya sendiri. Setiap kali fungsi mengacu pada dirinya sendiri, argumen dari fungsi harus lebih dekat ke nilai awal (basis).

Tinjau kembali perhitungan $n!$ secara rekursif. Dengan mengingat kembali definisi rekursif dari faktorial:

(a) basis:

$n! = 1 \quad , \text{jika } n = 0$

(b) rekurens:

$n! = n \times (n - 1)! \quad , \text{jika } n > 0$

maka 5! dihitung dengan langkah berikut:

(1) $5! = 5 \times 4!$ (rekurens)
(2) $4! = 4 \times 3!$
(3) $3! = 3 \times 2!$
(4) $2! = 2 \times 1!$
(5) $1! = 1 \times 0!$
(6) $0! = 1$

Pada baris (6) kita memperoleh nilai yang terdefinisi secara langsung dan bukan faktorial dari bilangan lainnya. Dengan melakukan runut-balik (*backtrack*) dari baris (6) ke baris (1), kita mendapatkan nilai pada setiap baris untuk menghitung hasil pada baris sebelumnya:

(6') $0! = 1$
(5') $1! = 1 \times 0! = 1 \times 1 = 1$
(4') $2! = 2 \times 1! = 2 \times 1 = 2$
(3') $3! = 3 \times 2! = 3 \times 2 = 6$
(2') $4! = 4 \times 3! = 4 \times 6 = 24$
(1') $5! = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$

Jadi, $5! = 120$.

Contoh 3.59

Di bawah ini adalah contoh-contoh fungsi rekursif lainnya:

1. $F(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ 2F(x-1) + x^2 & , x \neq 0 \end{cases}$

2. Fungsi Chebysev

$$T(n,x)=\begin{cases}1 & ,n=0\\ x & ,n=1\\ 2xT(n-1,x)-T(n-2,x) & ,n>1\end{cases}$$

Fungsi Chebysev di atas mempunyai dua buah basis, yaitu jika n = 0 dan n = 1.

3. Fungsi Fibonacci:

$$f(n)=\begin{cases}0 & ,n=0\\ 1 & ,n=1\\ f(n-1)+f(n-2) & ,n>1\end{cases}$$

■

Contoh 3.59

Nyatakan perpangkatan a^n (a bulat dan $n > 0$) sebagai fungsi rekursif.

Penyelesaian:

(i) Nyatakan a^n dalam argumen rekursif

$$a^n = a \times a \times a \times \ldots \times a \qquad \text{(sebanyak } n \text{ kali)}$$
$$= a \times a^{n-1} \qquad \text{(rekurens)}$$

(ii) Tentukan kasus eksplisit yang tidak memerlukan pemanggilan rekursif lagi (basis)

$$a^n = 1 \quad \text{jika } n = 0 \qquad \text{(basis)}$$

Jadi, fungsi rekursif untuk perpangkatan adalah:

$$a^n=\begin{cases}1 & ,n=0\\ a\times a^{n-1} & ,n>0\end{cases}$$

■

3.17 Ragam Soal dan Penyelesaian

Contoh 3.60

Misalkan $\perp$ adalah relasi tegak lurus dari himpunan garis-garis di bidang Euclidean. Apakah relasi $\perp$ setangkup? Refleksif? Tolak-setangkup? Menghantar?

Penyelesaian:

$(a, b) \in \perp$ jika dan hanya jika garis $a \perp$ garis b. Jelas, jika garis a tegak lurus dengan garis b, maka garis b juga tegak lurus dengan garis a. Berarti, $(b, a) \in \perp$, yang menunjukkan bahwa relasi $\perp$ bersifat setangkup.

$\perp$ tidak refleksif karena $(a, a) \notin \perp$ untuk setiap garis di dalam himpunan garis, artinya setiap garis tidak tegak lurus dengan dirinya sendiri.

Kita juga dapat memperlihatkan bahwa $\perp$ tidak tolak-setangkup dan tidak menghantar (tunjukkan!).

■

Contoh 3.61

Misalkan relasi R pada himpunan bilangan bulat positif sedemikian sehingga $R = \{(a, b) \mid a < b\}$. Apa klosur setangkup dari R?

Penyelesaian:
Klosur setangkup dari relasi R adalah

$$R \cup R^{-1} = \{(a, b) \mid a < b\} \cup \{(b, a) \mid b < a\} = \{(a, b) \mid a \neq b\}$$

■

Contoh 3.62

Misalkan relasi R pada himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ direpresentasikan dengan menggunakan matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apakah relasi R merupakan relasi kesetaraan?

Penyelesaian:
Relasi kesetaraan harus memiliki sifat setangkup, refleksif, dan transitif. Relasi R setangkup dilihat dari matriksnya yang setangkup terhadap diagonal. Relasi R menghantar, ini dapat dilihat dari penyajian relasi dengan himpunan pasangan terurut: $\{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$; dapat dilihat bahwa selalu ada $(a, c) \in R$ jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$. Relasi R tidak refleksif karena $(2, 2) \notin R$. Relasi R tidak refleksif karena $(2, 2) \notin R$. Karena R tidak refleksif, maka R bukan relasi kesetaraan.

■

Contoh 3.63

Fungsi manakah dari yang berikut ini yang mempunyai balikan atau inversi?
(a) $f(x) = 2x + 1$ (b) $f(x) = x^4 + 1$ (c) $f(x) = x^3$

Penyelesaian:
Syarat fungsi mempunyai inversi adalah fungsi tersebut berkoresponden satu-ke-satu atau bijeksi. Fungsi f dikatakan berkoresponden satu-ke-satu jika ia fungsi satu-ke-satu dan juga fungsi pada. Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu adalah fungsi a dan c. Fungsi b tidak berkoresponden satu-ke-satu karena ia tidak satu-ke-satu, karena untuk dua nilai x yang bernilai mutlak sama tetapi tandanya berbeda nilai fungsinya sama, misalnya $f(1) = f(-1) = 2$ padahal $1 \neq -1$. Jadi, fungsi yang mempunyai balikan adalah fungsi a dan c saja.

■

Contoh 3.64

Misalkan n menyatakan bilangan bulat positif. Misalkan sebuah fungsi f didefinisikan secara rekursif sebagai berikut:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & ,n = 1 \\ f(\lfloor n/2 \rfloor + 1 & ,n > 1 \end{cases}$$

(a) Tentukan $f(25)$. (b) Fungsi apakah f tersebut?

Penyelesaian:

(a) $f(25) = f(12) + 1$
$= [f(6) + 1] + 1 = f(6) + 2$
$= [f(3) + 1] + 2 = f(3) + 3$
$= [f(1) + 1] + 3 = f(1) + 4$
$= 0 + 4 = 4$

(b) f adalah bilangan bulat terbesar sedemikian sehingga $2^f \leq n$. Dengan demikian, $f(n) = \lfloor {}^2\log n \rfloor$

■

Soal Latihan

1. Tuliskan pasangan terurut pada relasi R dari $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{0, 1, 2, 3\}$ yang dalam hal ini pasangan terurut $(a, b) \in R$ jika dan hanya jika $a > b$.

2. Tuliskan anggota dari relasi R pada $\{1, 2, 3, 4\}$ yang didefinisikan oleh $(x, y) \in R$ jika $x^2 \geq y$.

3. Nyatakan relasi $R = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3), (1, 1), (2, 2)\}$ pada $X = \{1, 2, 3\}$ dalam bentuk tabel, matriks, dan graf berarah.

4. Untuk tiap relasi pada $\{1, 2, 3, 4\}$ berikut, tentukan apakah ia refleksif, setangkup, tak-setangkup, dan menghantar.
   (a) $\{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$
   (b) $\{(2, 4), (4, 2)\}$
   (c) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
   (d) $\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$

5. Tentukan apakah relasi R pada himpunan orang bersifat refleksif, setangkup, tak-setangkup, dan/atau menghantar, yang dalam hal ini $(a, b) \in$ R jika dan hanya jika
   (a) a lebih tinggi daripada b
   (b) a dan b lahir pada hari yang sama
   (c) a mempunyai nama pertama yang sama dengan b

6. Misalkan R adalah relasi $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$ dan S adalah relasi $\{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 2)\}$. Tentukan $S \circ R$ dan $R \circ S$.

7. Misalkan $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ dan $S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4)$ adalah relasi dari $\{1, 2, 3\}$ ke $\{1, 2, 3, 4\}$. Tentukan
   (a) $R \cup S$
   (b) $R \cap S$
   (c) $R - S$
   (d) $S - R$
   (e) $R \oplus S$

8. Misalkan R adalah relasi pada himpunan orang yang terdiri dari pasangan (a, b) yang dalam hal ini a adalah ayah dari b. Misalkan S adalah relasi pada himpunan orang yang terdiri dari pasangan (a, b) yang dalam hal ini a dan b adalah saudara kandung. Nyatakan $R \circ S$.

9. Nyatakan pasangan terurut dari relasi pada $\{1, 2, 3\}$ yang berkoresponden dengan matriks berikut:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

10. Gambarkan graf berarah dari relasi yang dinyatakan oleh matriks pada soal nomor 9.

11. Misalkan bahwa relasi R dan S pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan matriks yang menyatakan

(a) $R \cup S$ (b) $R \cap S$ (c) $R \circ S$

12. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan $R = \{(1, 1), (2, 3), (4, 4), (2, 1)\}$ adalah relasi pada himpunan A.
    (a) Dari keempat sifat ini: refleksif, menghantar, setangkup, dan anti-setangkup, sifat apa yang dimiliki oleh relasi R? Jelaskan alasannya.
    (b) Nyatakan hasil operasi R^2 sebagai himpunan pasangan terurut.

13. Sebuah relasi R yang didefinisikan pada sebuah himpunan yang beranggotan 4 buah elemen disajikan dalam matriks M sebagai berikut:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan apakah relasi tersebut refleksif/tidak refleksif, setangkup/tidak setangkup, menghantar/tidak menghantar, tolak-setangkup/tidak tolak-setangkup.

14. Tinjau matriks relasi pada soal nomor 12 di atas. Tentukan matriks yang merepresentasikan:

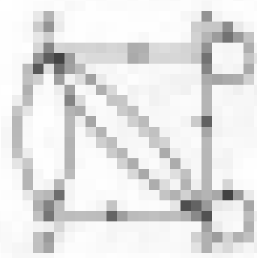
(a) R^{-1} (b) $\overline{R}$ (c) R^2 (d) R^3

14. Sebuah relasi R yang didefinisikan pada sebuah himpunan yang beranggotakan 4 buah elemen disajikan dalam matriks M sebagai berikut:

$$M_R = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ b & c & 1 & 1 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & j \end{bmatrix}$$

Tentukan nilai a, b, c, d, e, f, g, h, i, dan j agar relasi tersebut bersifat:
(a) refleksif
(b) setangkup
(c) tolak-setangkup

15. Diketahui relasi R yang didefinisikan pada himpunan $A = \{a, b, c, d\}$. Relasi direpresentasikan dalam graf berarah berikut ini:



(a) Jelaskan alasan mengapa relasi R tidak bersifat menghantar. Tambahkan busur tambahan yang diperlukan sehingga R bersifat menghantar.
(b) Jika didefinisikan bahwa $R^n = R \circ R \circ \ldots \circ R$ (sebanyak n kali), tentukan matriks dan graf berarah yang merepresentasikan R^2 (graf berarah R yang digunakan adalah graf pada gambar soal)

16. Misalkan $R = \{(0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 0)\}$ adalah relasi pada himpunan $\{0, 1, 2, 3\}$. Tentukan klosur refleksif dan klosur setangkup dari R.

17. Misalkan relasi R pada himpunan A dinyatakan dengan matriks M_R. Tunjukkan bahwa matriks yang merepresentasikan klosur setangkup adalah $M_R \vee M_R^T$.

18. Temukan klosur menghantar dari relasi $\{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$ pada himpunan $\{1, 2, 3, 4\}$.

20. Manakah realsi pada $\{1, 2, 3\}$ berikut yang merupakan relasi kesetaraan?
(a) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
(b) $\{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$
(c) $\{(0, 0),)1\ 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
(d) $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 3)\}$

21. Manakah relasi pada himpunan orang berikut ini yang merupakan relasi kesetaraan?
(a) $\{(a, b) \mid a$ and b berumur sama $\}$
(b) $\{(a, b) \mid a$ and b berbicara dengan bahasa yang sama $\}$
(c) $\{(a, b) \mid a$ and b pernah bertemu $\}$
(d) $\{(a, b) \mid a$ and b mempunyai orangtua yang sama $\}$

22. Misalkan R adalah relasi pada himpunan pasangan terurut dari bilangan bulat positif sedemikian sehingga $((a, b), (c, d)) \in R$ jika dan hanya jika $ad = bc$. Tunjukkan bahwa R adalah relasi kesetaraan.

23. Misalkan R adalah relasi pada himpunan *URL* (alamat *Web*) sedemikians sehingga xRy jika dan hanya jika halaman *Web* pada x sama dengan halaman *Web* pada y. Tunjukkan bahwa R adalah relasi kesetaraan.

24. Manakah dari berikut ini yang merupakan *poset*?
(a) $(\mathbf{Z}, =)$ (b) $(\mathbf{Z}, \neq)$ (c) $(\mathbf{Z}, <)$

25. Manakah relasi yang disajikan dengan matriks berikut yang merupakan relasi pengurutan parsial?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

26. Mengapa persaman berikut bukan merupakan fungsi dari $\mathbf{R}$ ke $\mathbf{R}$?
(a) $f(x) = 1/x$
(b) $f(x) = \sqrt{x}$
(c) $f(x) = \pm\sqrt{(x^2 + 1)}$

27. Tentukan fungsi mana yang merupakan fungsi satu-ke-satu dari $\mathbf{Z}$ ke $\mathbf{Z}$:
(a) $f(n) = n + 2$
(b) $f(n) = n^3$
(c) $f(n) = \lceil n/2 \rceil$

28. Tentukan apakah setiap fungsi berikut satu-ke-satu?
    (a) Setiap orang di bumi memetakan jumlah usianya.
    (b) Setiap negara di dunia memetakan letak garis lintang dan garis bujur ibukotanya.
    (c) Setiap buku yang ditulis oleh pengarangnya memetakan nama pengarangnya.
    (d) Setiap negara di dunia yang mempunyai seorang presiden memetakan nama presidennya.

29. Misalkan $g = \{(1, b), (2, c), (3, a), (4, b)\}$ adalah fungsi dari $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{a, b, c, d\}$ dan $f = \{(a, x), (b, y), (c, w), (d, z), \}$ adalah fungsi dari B ke $C = \{w, x, y, z\}$.
    (a) tuliskan $f \circ g$ sebagai himpunan pasangan terurut.
    (b) apakah $f \circ g$ merupakan fungsi *injektif*, *surjektif*, atau *bijektif*?

30. Jika diberikan $g = \{(1, b), (2, c), (3, a)\}$ adalah fungsi dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{a, b, c, d\}$ dan $f = \{(a, x), (b, x), (c, z), (d, w)\}$ adalah fungsi dari B ke $C = \{w, x, y, z\}$, tuliskan $f \circ g$ sebagai himpunan pasangan terurut.

31. Berapa banyak *byte* yang dibutuhkan untuk mengkodekan data yang panjangnya 1001 bit?

32. Di dalam suatu jaringan komputer, data dikirim dalam bentuk blok-blok bit. Setiap blok panjangnya 128 *byte*. Jika data dikirim melalui media transmisi dengan kecepatan 500 *kbps* (*kilobits per second*), maka selama 1 menit berapa banyak blok data dapat dikirim? (Catatan: 1 kilobit = 1000 bit).

33. Misalkan f adalah fungsi dari $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ke X yang didefinisikan oleh $f(x) = 3x \bmod 5$. Tuliskan f sebagai himpunan pasangan terurut. Apakah f satu-ke-satu atau pada?

34. Nyatakan $a \times b$ sebagai fungsi rekursif.

35. Fungsi Ackermann adalah fungsi rekursif dengan dua buah peubah bilangan bulat yang didefinisikan sebagai berikut:
    a. Jika $m = 0$ maka $A(m, n) = n + 1$
    b. Jika $m \neq 0$ tetapi $n = 0$ maka $A(m, n) = A(m - 1, 1)$
    c. Jika $m \neq 0$ dan $n \neq 0$ maka $A(m, n) = A(m - 1, A(m, n - 1))$

    Tentukan nilai $A(1, 3)$.