BAB 2

Himpunan

Pelajarilah semesta ini. Jangan merasa kecewa jika dunia tidak mengenal anda, tetapi kecewalah jika anda tidak mengenal dunia.
(Kong Fu Tse - filusuf China)

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering membicarakan objek-objek diskrit, misalnya buku, komputer, mahasiswa, nilai ujian, dan lain-lain. Ilmu Komputer atau Informatika merupakan bidang ilmu yang *mengurusi* objek-objek diskrit. Di dalam komputer digital, objek-objek diskrit ini merupakan data masukan untuk program. Komputer digital diprogram untuk menyimpan, mengolah, dan memanipulasi objek-objek diskrit.

Dalam membicarakan objek diskrit, kita sering berhadapan dengan situasi yang berhubungan dengan sekumpulan objek di dalam suatu kelompok atau kelas, dan kita mengacu objek yang termasuk di dalam suatu kelompok. Misalnya, "semua mahasiswa Teknik Informatika ITB Angkatan 2002" adalah sebuah kelompok yang terdiri atas sejumlah mahasiswa ITB Angkatan 2002 dari Departemen Teknik Informatika.

Terminologi dasar tentang sekumpulan objek diskrit adalah **himpunan**. Himpunan digunakan untuk mengelompokkan objek secara bersama-sama. Himpunan merupakan struktur diskrit fundamental yang mendasari struktur diskrit lainnya seperti relasi, kombinasi, dan graf. Banyak konsep ilmu komputer/informatika yang diacu dalam terminologi himpunan.

http://www.pakteguh.com

2.1 Definisi Himpunan

Cukup banyak definisi himpunan disebutkan dalam berbagai literatur. Definisi himpunan yang kita pakai di sini diambil dari [LIU85].

DEFINISI 2.1. Himpunan (*set*) adalah kumpulan objek-objek yang *berbeda*.

Objek yang terdapat di dalam himpunan disebut **elemen**, **unsur**, atau **anggota**. Kita katakan bahwa himpunan mengandung elemen-elemennya. Kata "berbeda" di dalam definisi di atas adalah penting (sehingga dicetak miring) untuk menekankan maksud bahwa anggota himpunan tidak boleh sama.

2.2 Penyajian Himpunan

Terdapat banyak cara untuk menyajikan himpunan. Di sini dikemukakan 4 cara penyajian, yaitu mengenumerasi elemen-elemennya, menggunakan simbol-simbol baku, menyatakan syarat keanggotaan, dan menggunakan diagram Venn.

1. Enumerasi

Jika sebuah himpunan terbatas dan tidak terlalu besar, kita bisa menyaijkan himpunan dengan cara mengenumerasi, artinya menuliskan semua elemen himpunan yang bersangkutan di antara dua buah tanda kurung kurawal. Biasanya suatu himpunan diberi nama dengan menggunakan huruf kapital maupun dengan menggunakan simbol-simbol lainnya.

Contoh 2.1

Himpunan A yang berisi empat anngota 1, 2, 3, dan 4 dapat ditulis sebagai $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Perhatikan bahwa himpunan ditentukan oleh anggota-anggotanya dan bukan pada urutan anggota-anggotanya. Urutan anggota di dalam himpunan tidak mempunyai arti apa-apa. Jadi, kita bisa saja menuliskan A sebagai $A = \{2, 4, 1, 3\}$ atau $A = \{4, 3, 2, 1\}$. Karena itu, beberapa literatur menambahkan definisi himpunan sebagai kumpulan objek tak-terurut (*unordered collection*).

■

Contoh 2.2

Himpunan B yang berisi lima bilangan genap positif pertama adalah $B = \{4, 6, 8, 10\}$.

■

Selain masalah urutan, hal penting lain yang perlu diperhatikan adalah penulisan anggota yang berulang. Adalah berlebihan menuliskan A sebagai $A = \{1, 2, 2, 3, 4\}$,

http://www.pakteguh.com

karena dari Definisi 2.1 disebutkan bahwa himpunan mengandung anggota yang berbeda. Jadi, kalau kita ingin menyebutkan kumpulan buku di dalam perpustakaan, yang mana buku berjudul x ada 2 buah, sedangkan buku berjudul y dan z masing-masing 1 buah, maka himpunan $\{x, x, y, z\}$ adalah cara penulisan yang berlebihan. Kita bisa menuliskan himpunan tersebut menjadi $\{x_1, x_2, y, z\}$, yang dalam hal ini x_1 adalah *copy* 1 dari buku x dan x_2 adalah *copy* 2 dari buku x. Buku x_1 dan x_2 adalah objek yang berbeda di dalam himpunan yang terakhir.

Himpunan yang anggotanya boleh barulang adalah himpunan-ganda (multiset). Himpunan-ganda akan dibahas di dalam upa-bab tersendiri pada bagian akhir bab ini. Jika tidak disebutkan lain, maka himpunan yang kita maksudkan di dalam pembahasan adalah himpunan yang anggotanya berbeda satu sama lain.

Contoh 2.3

Meskipun himpunan biasanya digunakan untuk mengelompokkan objek yang mempunyai sifat mirip, tetapi dari definisi himpunan kita mengetahui bahwa sah-sah saja elemen-elemen di dalam himpunan tidak mempunyai hubungan satu sama lain, asalkan *berbeda*. Sebagai contoh, {kucing, a, Amir, 10, paku} adalah himpunan yang terdiri dari lima elemen, yaitu kucing, a, Amir, 10, dan paku. ■

Contoh 2.4

Contoh-contoh himpunan lainnya:

$R = \{ a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\} \}$
$C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$
$K = \{ \{\} \}$ ■

Perhatikan dari Contoh 2.4, C adalah himpunan yang terdiri dari 3 elemen, yaitu a, $\{a\}$, dan $\{\{a\}\}$. Contoh 2.4 memperlihatkan bahwa suatu himpunan dapat merupakan anggota himpunan lain. Perhatikan juga bahwa K hanya berisi satu elemen, yaitu $\{\}$. Lebih lanjut, $\{\}$ disebut himpunan kosong, sering dilambangkan dengan $\varnothing$ (lihat penjelasannya di dalam upabab 2.4).

Untuk menuliskan himpunan dengan jumlah anggota yang besar dan telah memiliki pola tertentu dapat dilakukan dengan menggunakan tanda '...' (*ellipsis*).

Contoh 2.5

Himpunan alfabet ditulis sebagai $\{ a, b, c, ..., x, y, z \}$, dan himpunan 100 buah bilangan asli pertama ditulis sebagai $\{1, 2, ..., 100 \}$. Catatan: beberapa literatur menyebutkan bilangan asli (*natural numbers*) dimulai 0.

■

---

http://www.pakteguh.com

Untuk menuliskan himpunan yang tidak berhingga banyak anggotanya, kita dapat juga menggunakan tanda '...' (*ellipsis*), seperti pada Contoh 2.6 berikut.

Contoh 2.6

Himpunan bilangan bulat positif ditulis sebagai $\{ 1, 2, 3, \ldots\}$, sedangkan himpunan bilangan bulat ditulis sebagai $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. ■

Terhadap suatu himpunan, suatu objek dapat menjadi anggota atau bukan anggota himpunan tersebut. Untuk menyatakan keanggotaan tersebut digunakan notasi berikut:

$x \in A$ untuk menyatakan x merupakan anggota himpunan A; dan

$x \notin A$ untuk menyatakan x bukan merupakan anggota himpunan A.

Contoh 2.7

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{ a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\} \}$, dan $K = \{\{\}\}$, maka

$3 \in A$

$5 \notin A$

$\{a, b, c\} \in R$

$\{a\} \notin R$

$a \in R$

$\{\} \in K$

■

Contoh 2.8

Bila $P_1 = \{a, b\}$, $P_2 = \{ \{a, b\} \}$, dan $P_3 = \{\{\{a, b\}\}\}$, maka

$a \in P_1$

$a \notin P_2$

$P_1 \in P_2$

$P_1 \notin P_3$

$P_2 \in P_3$ ■

2. Simbol-simbol Baku

Beberapa himpuna yang khusus ditulsikan dengan simbol-simbol yang sudah baku. Terdapat sejumlah simbol baku yang berbentuk huruf tebal (*boldface*) yang biasa digunakan untuk mendefinisikan himpunan yang sering digunakan, antara lain:

http://www.pakteguh.com

P = himpunan bilangan bulat positif = { 1, 2, 3, ... }
N = himpunan bilangan asli = { 1, 2, ... }
Z = himpunan bilangan bulat = { ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }
Q = himpunan bilangan rasional
R = himpunan bilangan riil
C = himpunan bilangan kompleks

Kadang-kadang kita berhubungan dengan himpunan-himpunan yang semuanya merupakan bagian dari sebuah himpunun yang universal. Himpunan yang universal ini disebut **semesta** dan disimbolkan dengan U. Himpunan U harus diberikan secara eksplisit atau diarahkan berdasarkan pembicaraan. Sebagai contoh, misalnya $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan A adalah himpunan bagian dari U, dengan $A = \{1, 3, 5\}$.

3. Notasi Pembentuk Himpunan

Cara lain menyajikan himpunan adalah dengan notasi pembentuk himpunan (*set builder*). Dengan cara penyajian ini, himpunan dinyatakan dengan menulis syarat yang harus dipenuhi oleh anggotanya.

Notasi: { x | syarat yang harus dipenuhi oleh x }

Aturan yang digunakan dalam penulisan syarat keanggotaan:

a. Bagian di kiri tanda '|' melambangkan elemen himpunan.
b. Tanda '|' dibaca *dimana* atau *sedemikian sehingga.*
c. Bagian di kanan tanda '|' menunjukkan syarat keanggotaan himpunan.
d. Setiap tanda ',' di dalam syarat keanggotaan dibaca sebagai *dan*

Contoh 2.9

(i) A adalah himpunan bilangan bulat positif yang kecil dari 5, dinyatakan sebagai

$A = \{ x \mid x$ adalah himpunan bilangan bulat positif lebih kecil dari $5\}$

atau dalam notasi yang lebih ringkas:

$$A = \{ x \mid x \in \mathbf{P}, x < 5 \}$$

yang sama dengan $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

(ii) B adalah himpunan bilangan genap positif yang lebih kecil atau sama dengan 8, dinyatakan sebagai

$B = \{ x \mid x$ adalah himpunan bilangan genap positif lebih kecil atau sama dari $8\}$

atau dalam notasi yang lebih ringkas:

$$B = \{ x \mid x/2 \in \mathbf{P}, 2 \le x \le 8 \}$$

yang sama dengan $B = \{2, 4, 6, 8\}$

http://www.pakteguh.com

(iii) Notasi pembentuk himpunan sangat berguna untuk menyajikan himpunan yang anggota-anggotanya tidak mungkin dienumerasikan. Misalnya **Q** adalah himpunan bilangan rasional, dinyatakan sebagai

$$\mathbf{Q} = \{ a/b \mid a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0 \}$$

(iv) M adallah himpunan mahasiswa yang mengambil kuliah Matematika Diskrit,

$M = \{ x \mid x$ adalah mahasiswa yang mengambil kuliah Matematika Diskrit $\}$

■

---

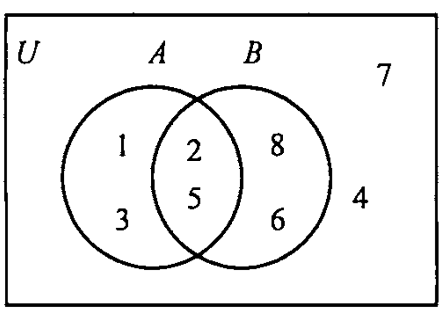
4. Diagram Venn

Diagram Venn meyajikan himpunan secara grafis. Cara penyajian himpunan ini diperkenalkan oleh matematikawan Inggris yang bernama John Venn pada tahun 1881. Di dalam diagram Venn, himpunan semesta (U) digambarkan sebagai suatu segi empat sedangkan himpunan lainnya digambarkan sebagai lingkaran di dalam segi empat tersebut. Anggota-anggota suatu himpunan berada di dalam lingkaran, sedangkan anggota himpunan lain di dalam lingkaran yang lain pula. Ada kemungkinan dua himpunan mempunyai anggota yang sama, dan hal ini digambarkan dengan lingakaran yang saling beririsan. Anggota U yang tidak termasuk di dalam himpunan manapun digambarkan di luar lingkaran.

Contoh 2.10

Misalkan $U = \{1, 2, \ldots, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 5\}$ dan $B = \{2, 5, 6, 8\}$. Ketiga himpunan tersebut digambarkan dengan diagram Venn pada Gambar 2.1. Perhatikan bahwa A dan B mempunyai anggota bersama, yaitu 2 dan 5. Anggota U yang lain, yaitu 7 dan 4 tidak termasuk di dalam himpuna A dan B.

■



Gambar 2.1 Diagram Venn untuk Contoh 1.10

http://www.pakteguh.com

2.3 Kardinalitas

DEFINISI 2.2. Sebuah himpunan dikatakan **berhingga** (*finite set*) jika terdapat n elemen berbeda (*distinct*) yang dalam hal ini n adalah bilangan bulat tak-negatif. Sebaliknya himpunan tersebut dinamakan **tak-berhingga** (*infinite set*).

Misalkan A merupakan himpunan berhingga, maka jumlah elemen berbeda di dalam A disebut **kardinal** dari himpunan A.

Notasi: $n(A)$ atau $\|A\|$

Catatan:
Di dalam buku ini, kita menggunakan notasi $|A|$ untuk menyatakan kardinalitas himpunan.

Contoh 2.11

Di bawah ini adalah contoh-contoh himpunan berhingga:

(i) $A = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari 20 $\}$, maka $|A| = 8$, dengan elemen-elemen A adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

(ii) B = {kucing, a, Amir, 10, paku} maka $|B| = 5$, dengan elemen-elemen B (yang berbeda) adalah kucing, a, Amir, 10, dan paku.

(iii) $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$, maka $|C| = 3$, dengan elemen-elemen A (yang berbeda) adalah a, $\{a\}$, dan $\{\{a\}\}$.

(iv) $D = \{ x \mid x$ adalah faktor dari 12$\}$, maka $|D| = 6$, dengan elemen-elemen D adalah 1, 2, 3, 4, 6, dan 12.

(v) $E = \{ x \mid x$ adalah bilangan bulat positif kurang dari 1$\}$, maka $|E| = 0$, karena tidak ada bilangan positif yang kurang dari 1.

(vi) F = $\{ x \mid x$ adalah kucing di Bandung $\}$, ini juga adalah himpunan berhingga, meskipun kita sangat sulit menghitung jumlah kucing di Bandung, tetapi ada jumlah tertentu yang berhingga kucing di Bandung.

■

Himpunan yang tidak berhingga mempunyai kardinal tidak berhingga pula. Sebagai contoh, himpunan bilangan riil mempunyai jumlah anggota tidak berhingga, maka $|\mathbf{R}| = \infty$, begitu juga himpunan bilangan bulat tak-negatif, himpuna garis yang melalui titik pusat koodinat, himpunan titik di sepanjang garis $y = 2x + 3$, dan lain-lain.

http://www.pakteguh.com

2.4 Himpunan Kosong

DEFINISI 2.2. Himpunan yang tidak memiliki satupun elemen atau himpunan dengan kardinal = 0 disebut **himpunan kosong** (*empty set*).

Notasi : $\varnothing$ atau $\{\}$

Contoh 2.12

(i) $E = \{ x \mid x < x \}$, maka $|E| = 0$
(ii) $P = \{$ orang Indonesia yang pernah ke bulan $\}$, maka $|P| = 0$
(iii) $A = \{x \mid x$ adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 5x + 10 = 0 \}$, $|A| = 0$

■

Perhatikan bahwa himpunan $\{\{ \}\}$ dapat juga ditulis sebagai $\{\varnothing\}$, begitu pula himpunan $\{\{ \}, \{\{ \}\}\}$ dapat juga ditulis sebagai $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. Perhatikan juga bahwa bahwa $\{\varnothing\}$ bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu $\varnothing$.

Istilah seperti *kosong*, *hampa*, *nihil*, ketiganya mengacu pada himpunan yang tidak mengandung elemen, tetapi istilah *nol* tidak sama dengan ketiga istilah di atas, sebab nol menyatakan sebuah bilangan tertentu.

2.5 Himpunan Bagian (*Subset*)

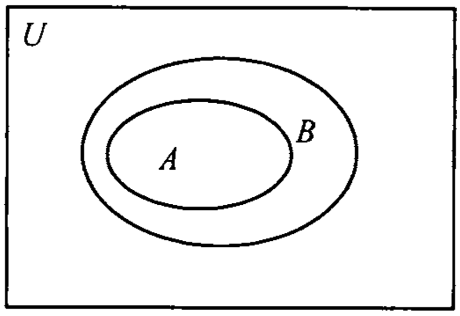
Sebuah himpunan dapat merupakan bagian dari himpunan lain. Anggota yang dikandung di dalam himpunan tersebut juga terkandung di dalam himpunan yang lain.

DEFINISI 2.3. Himpunan A dikatakan himpunan bagian (*subset*) dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B. Dalam hal ini, B dikatakan *superset* dari A.

Notasi: $A \subseteq B$

Dengan mengunakan diagram Venn, $A \subseteq B$ lebih mudah dimengerti maksudnya. $A \subseteq B$ digambarkan dengan diagram Venn pada Gambar 2.2.

http://www.pakteguh.com



Gambar 2.2 Diagram Venn untuk $A \subseteq B$

Contoh 2.13

(i) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
(ii) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
(iii) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$
(iv) Jika $A = \{ (x, y) \mid x + y < 4, x \geq 0, y \geq 0 \}$ dan $B = \{ (x, y) \mid 2x + y < 4,\ x \geq 0 \text{ dan } y \geq 0 \}$, maka $B \subseteq A$.

■

Contoh 2.14

$A = \{p, q, r\}$ bukan himpunan bagian dari $B = \{m, p, q, t, u\}$ karena $r \in A$ tetapi $r \notin B$.

■

TEOREMA 2.1. Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:
(a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).
(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A ($\varnothing \subseteq A$).
(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

Bukti untuk teorema 2.1(a) mudah ditunjukkan, karena elemen-elemen dari A adalah anggota dari A. Untuk membuktikan teorema 2.1(b) juga tidak sulit, karena kita harus memperlihatkan bahwa implikasi "Jika $x \in \varnothing$, maka $x \in A$ " selalu benar (sesuai dengan definisi himpunan bagian). Kita hanya perlu menyatakan bahwa bagian hipotesis (yaitu, $x \in \varnothing$) selalu bernilai salah karena $\varnothing$ tidak mempunyai anggota. Oleh karena itu, implikasi tersebut akan selalu bernilai benar tanpa bergantung kepada himpunan A. ■

Bukti untuk Teorema 2.1(c) diperlihatkan dari definisi bahwa jika jika setiap elemen dari himpunan A adalah elemen dari himpunan B, dan setiap elemen dari himpunan B adalah elemen dari himpunan C, maka jelas setiap elemen dari A juga adalah elemen dari C. ■

http://www.pakteguh.com

Dari Teorema 2.1(a) dan teorema 2.1(b) yang menyatakan bahwa $\varnothing \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka $\varnothing$ dan A disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan A. Sebagai contoh, jika $A = \{1, 2, 3\}$, maka $\{1, 2, 3\}$ dan $\varnothing$ adalah *improper subset* dari A, sedangkan himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari A adalah $\{1\}$, $\{2\}$ $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, dan $\{2, 3\}$.

Perhatikanlah bahwa penulisan $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$. Jika kita ingin menekankan bahwa A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$ maka kita menulis $A \subset B$, dan kita katakan bahwa A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari himpunan B [ROS03]. Sebagai contoh, himpunan $\{1\}$ dan $\{2, 3\}$ merupakan *proper subset* dari $\{1, 2, 3\}$. Sebaliknya, pernyataan $A \subseteq B$ digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B yang memungkinkan $A = B$.

Perhatikan juga juga bahwa himpunan $\{\varnothing\}$ bukan merupakan himpunan bagian dari himpunan $\{\{\varnothing\}\}$, namun ia merupakan anggota himpunan $\{\{\varnothing\}\}$.

Contoh 2.15

Tunjukkan bahwa $A = \{a, b, c\}$ adalah himpunan bagian sebenarnya dari $B = \{a, b, c, d, e, f\}$.

Penyelesaian:

Untuk menunjukkan bahwa A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B, perlihatkan bahwa setiap elemen di dalam A juga elemen di dalam B dan sekurang-kurangnya ada 1 elemen B yang tidak terdapat di dalam A.

Setiap elemen dari A adalah juga elemen dari B sehingga $A \subseteq B$. Sebaliknya, $d \in B$ tetapi $d \notin A$, oleh karena itu $A \neq$ B. Dengan demikian, A adalah himpuan bagian sebenarnya dari B, kita tuliskan $A \subset B$.

■

Contoh 2.16

Misalkan $X = \{4, 5, 6\}$ dan $Z = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Tentukan semua kemungkinan himpunan Y sedemikian hingga $X \subset Y$ dan $Y \subset Z$, yaitu X adalah *proper subset* dari Y dan Y adalah *proper subset* dari Z.

Penyelesaian:

Y harus mengandung semua elemen X dan sekurang-kurangnya satu elemen dari Z. Dengan demikian, $Y = \{4, 5, 6, 7\}$ atau $Y = \{4, 5, 6, 8\}$. Y tidak boleh memuat 7 dan 8 sekaligus karena Y adalah *proper subset* dari Z. ■

---

http://www.pakteguh.com

2.6 Himpunan yang Sama

Dua buah himpunan mungkin saja sama, yaitu semua anggota di dalam kedua himpunan tersebut sama, meskipun urutannya di dalam himpunan tidak sama. Kita mendefinisikan kesamaan dua buah himpunan melalui definisi 2.4 berikut ini.

DEFINISI 2.4. Himpunan A dikatakan sama dengan himpunan B jika dan hanya jika keduanya mempunyai elemen yang sama. Dengan kata lain, A sama dengan B jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A. Jika tidak demikian, maka kita katakan A tidak sama dengan B.

Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Contoh 2.17

(i) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x(x-1) = 0 \}$, maka $A = B$
(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$
(iii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$

■

Tiga hal yang perlu dicatat dalam memeriksa kesamaan dua buah himpunan:

1. Urutan elemen di dalam himpunan tidak penting.
   Jadi, $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 3, 2\}$

2. Pengulangan elemen tidak mempengaruhi kesamaan dua buah himpunan.
   Jadi, $\{1, 1, 1, 1 \} = \{1, 1\} = \{1\}$
   $\{1, 2, 3 \} = \{1, 2, 1, 3, 2, 1\}$

3. Untuk tiga buah himpunan, A, B, dan C berlaku aksioma berikut:
   (a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$
   (b) jika $A = B$, maka $B = A$
   (c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

2.7 Himpunan yang Ekivalen

Dua buah himpunan dapat mempunyai kardinal yang sama meskipun anggota kedua himpunan tersebut tidak sama. Kita katakan kedua himpunan tersebut ekivalen.

DEFINISI 2.5. Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.

http://www.pakteguh.com

Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

Contoh 2.18

Jika $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

■

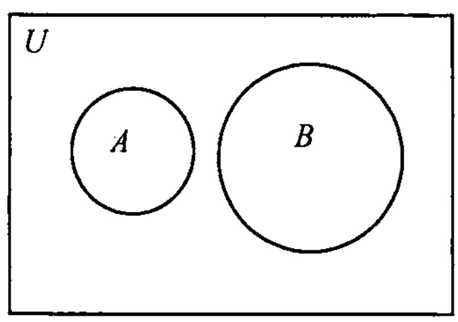
2.8 Himpunan Saling Lepas

Dua buah himpunan mungkin saja tidak memiliki anggota yang sama satu buah pun. Kedua himpunan tersebut dikatakan saling lepas (*disjoint*).

DEFINISI 2.6. Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.

Notasi : $A \,//\, B$

Diagram Venn yang menggambarkan dua himpunan yang saling lepas ditunjukkan pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Diagram Venn untuk $A \,//\, B$

Contoh 2.19

Jika $A = \{ x \mid x \in P, x < 8 \}$ dan $B = \{ 10, 20, 30, ... \}$, maka $A \,//\, B$.

■

http://www.pakteguh.com

2.9 Himpunan Kuasa

Satu terminologi yang banyak ditemui dalam literatur ilmu komputer adalah himpunan kuasa (*power set*). Himpunan kuasa dari suatu himpunan mengandung semua himpunan bagian dari himpunan yang dimaksud.

DEFINISI 2.7. Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.

Notasi : $P(A)$ atau 2^A

Catatan:
Pada kebanyakan literatur, notasi untuk himpunan kuasa adalah "$\wp$", tetapi untuk lebih memudahkan penulisan kita menggantinya dengan huruf "P" (dari huruf pertama kata "power")

Contoh 2.20

Jika $A = \{ 1, 2 \}$, maka $P(A) = \{ \varnothing, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \}\}$

■

Contoh 2.21

Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$, dan himpunan kuasa dari himpunan $\{\varnothing\}$ adalah $P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. ■

Berapa banyak anggota himpunan kuasa dari sembarang himpunan A? Jika $|A| = n$, maka $|P(A)| = 2^n$. Kardinalitas himpunan kuasa ini dapat dibuktikan sebagai berikut:

Bukti:
Susun elemen-elemen A sebagai barisan $(a_1, a_2, ..., a_n)$.
Bentuk himpunan bagian A_i dari A dan juga bentuk barisan-barisan biner

$$E_i = (e_{1i}, e_{2i}, ..., e_{ni})$$

dengan

$e_{ji} = 1$ bila a_j ada di dalam A_i
$e_{ji} = 0$ jika a_j tidak ada di dalam A_i.

Banyaknya kombinasi E_i yang mungkin muncul adalah $2^n - 1$. Mengingat himpunan kosong juga merupakan himpunan bagian A, maka terbukti bahwa jumlah himpunan bagian dari himpunan A sama dengan $2^n - 1 + 1 = 2^n$. ■

http://www.pakteguh.com

2.10 Operasi Terhadap Himpunan

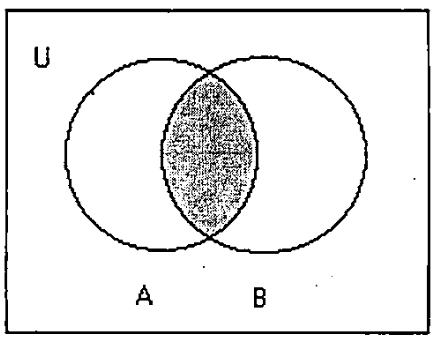
Terhadap dua buah himpunan atau lebih, kita dapat melakukan operasi untuk menghasilkan himpunan lain. Jenis operasi yang lazim digunakan terhadap himpunan adalah operasi irisan *(intersection)*, gabungan *(union)*, komplemen, selisih *(difference)*, perkalian kartesian *(cartesian product)*, dan beda-setangkup *(symmetric difference)*

a. IRISAN ***(intersection)***

DEFINISI 2.8. Irisan (*intersection*) dari himpunan A dan B adalah sebuah himpunan yang setiap elemennya merupakan elemen dari himpunan A dan himpunan B.

Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$

Diagram Venn untuk $A \cap B$ ditunjukkan pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 Diagram Venn untuk $A \cap B$ (daerah $A \cap B$ diarsir)

Jika dua himpunan saling lepas, maka irisannya adalah himpunan kosong, karena tidak ada elemen yang sama yang terdapat di dalam kedua himpunan tersebut.

Contoh 2.22

Tinjau (i), (ii), dan (iii) di bawah ini.

(i) Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$, maka $A \cap B = \{4, 10\}$

(ii) Jika $A = \{ (x, y) \mid x + y = 7, x, y \in R \}$ dan $B = \{ (x,y) \mid x - y = 3, x, y \in R \}$, maka $A \cap B = \{ (5,2) \}$, yang merupakan titik potong garis $x + y = 7$ dan $x - y = 3$.

(iii) Jika $A = \{ 3, 5, 9 \}$ dan $B = \{ -2, 6 \}$, maka $A \cap B = \varnothing$. Artinya: A // B

■

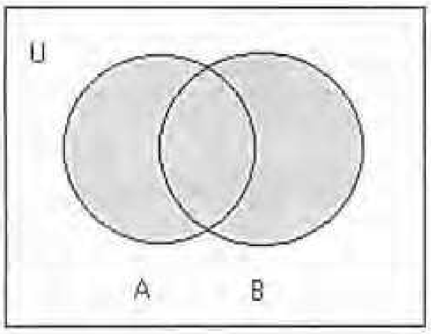
http://www.pakteguh.com

b. GABUNGAN *(union)*

DEFINISI 2.9. Gabungan (*union*) dari himpunan A dan B adalah himpunan yang setiap anggotanya merupakan anggota himpunan A atau himpunan B.

Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$

Diagram Venn untuk $A \cup B$ ditunjukkan pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Diagram Venn untuk $A \cup B$ (daerah $A \cup B$ diarsir)

Contoh 2.23

Tinjau (i) dan (ii) di bawah ini.

(i) Jika $A = \{ 2, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 7, 5, 22 \}$, maka $A \cup B = \{ 2, 5, 7, 8, 22 \}$

(ii) $A \cup \varnothing = A$

■

c. KOMPLEMEN *(complement)*

DEFINISI 2.10. Komplemen dari suatu himpunan A terhadap suatu himpunan semesta U adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemen U yang bukan elemen A.

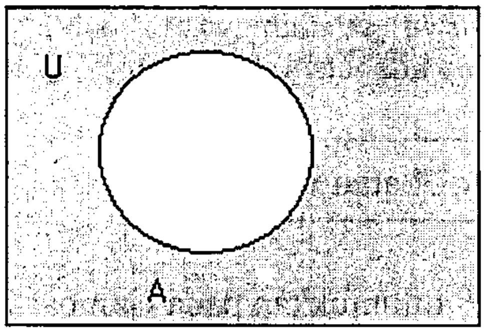
Notasi : $\overline{A} = \{ x \mid x \in U \text{ dan } x \notin A \}$

Diagram Venn untuk $\overline{A}$ ditunjukkan pada Gambar 2.6.

Catatan:

Beberapa literatur menuliskan lambang komplemen sebagai A^C atau A'.

http://www.pakteguh.com



Gambar 2.6 Diagram Venn untuk $\overline{A}$ (daerah $\overline{A}$ diarsir)

Contoh 2.24

Misalkan $U = \{ 1, 2, 3, ..., 9 \}$,

(i) jika $A = \{1, 3, 7, 9\}$, maka $\overline{A} = \{2, 4, 6, 8\}$

(ii) jika $A = \{ x \mid x/2 \in P, x < 9 \}$, maka $\overline{A} = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

■

Contoh 2.25

Misalkan:

A = himpunan semua mobil buatan dalam negeri
B = himpunan semua mobil impor
C = himpunan semua mobil yang dibuat sebelum tahun 1990
D = himpunan semua mobil yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta
E = himpunan semua mobil milik mahasiswa universitas tertentu

(i) pernyataan "semuah mobil mahasiswa di universitas ini produksi dalam negeri atau diimpor dari luar negeri" dapat dinyatakan dalam notasi himpunan sebagai $(E \cap A) \cup (E \cap B)$ atau $E \cap (A \cup B)$

(ii) pernyataan "semua mobil produksi dalam negeri yang dibuat sebelum tahun 1990 yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta" dapat dinyatakan dalam notasi himpunan sebagai $A \cap C \cap D$

(iii) pernyataan "semua mobil impor buatan setelah tahun 1990 yang mempunyai nilai jual lebih dari Rp 100 juta" dapat dinyatakan dalam notasi himpunan sebagai $\overline{C} \cap \overline{D} \cap B$

■

http://www.pakteguh.com

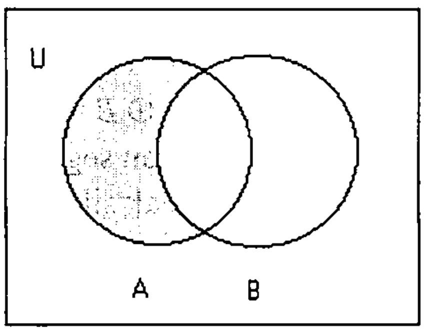
d. SELISIH *(difference)*

DEFINISI 2.11. Selisih dari dua himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemen dari A tetapi bukan elemen dari B. Selisih antara A dan B dapat juga dikatakan sebagai komplemen himpunan B relatif terhadap himpunan A.

Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$

Perhatikan bahwa komplemen dari sembarang himpunan A terhadap semesta U dapat juga didefinisikan sebagai $\overline{A} = U - A$.

Diagram Venn untuk $A - B$ ditunjukkan pada Gambar 2.7.



Gambar 2.7 Diagram Venn untuk A - B (daerah A - B diarsir)

Contoh 2.26

Tinjau (i), (ii), dan (iii) di bawah ini.

(i) Jika $A = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$, maka $A - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ dan $B - A = \varnothing$.

(ii) $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

(iii) A = himpunan fungsi menerus (kontinu) dan terbatas di dalam selang $[0,1]$.
B = himpunan fungsi *differentiable* di dalam selang $[0,1]$.
$B - A$ = himpunan fungsi *differentiable* tak terbatas di dalam selang $[0, 1]$.

■

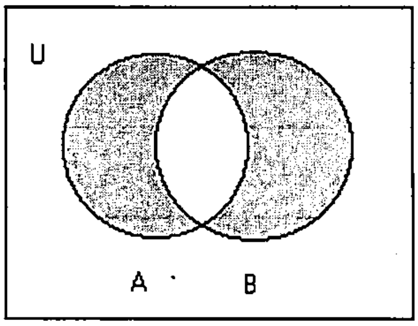
e. BEDA SETANGKUP *(Symmetric Difference)*

DEFINISI 2.12. Beda setangkup dari himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang elemennya ada pada himpunan A atau B, tetapi tidak pada keduanya.

Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

http://www.pakteguh.com

Diagram Venn untuk $A \oplus B$ diarsir ditunjukkan pada Gambar 2.8.



Gambar 2.8 Diagram Venn untuk $A \oplus B$ (daerah $A \oplus B$ diarsir)

Contoh 2.27

(i) Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$, maka $A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$
(ii) A = himpunan segitiga sama kaki, B = himpunan segitiga siku-siku
$A \oplus B$ = himpunan segitiga sama kaki yang tidak siku-siku dan segitiga siku-siku yang tidak sama kaki

■

Contoh 2.28

Misalkan

U = himpunan mahasiswa
P = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 80
Q = himpunan mahasiswa yang nilain ujian UAS di atas 80

Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 80, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 80. Maka, dalam notasi himpunan

(i) pernyataan "semua mahasiswa yang mendapat nilai A" adalah $P \cap Q$
(ii) pernyataan "semua mahasiswa yang mendapat nilai B" adalah $P \oplus Q$
(iii) pernyataan "semua mahasiswa yang mendapat nilai C" adalah $U - (P \cup Q)$

■

TEOREMA 2.2. Beda setangkup memenuhi hukum-hukum berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)
(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

http://www.pakteguh.com

f. PERKALIAN KARTESIAN *(cartesian product)*

DEFINISI 2.13. Perkalian kartesian dari himpunan A dan B adalah himpunan yang elemennya semua pasangan berurutan (*ordered pairs*) yang dibentuk dari komponen pertama dari himpunan A dan komponen kedua dari himpunan B.

Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Contoh 2.29

Tinjau (i) dan (ii) di bawah ini.

(i) Misalkan $C = \{1, 2, 3\}$, dan $D = \{a, b\}$, maka perkalian kartesian C dan D adalah $C \times D = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

(ii) Misalkan $A = B$ = himpunan semua bilangan riil, maka $A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

■

Catatlah bahwa:

1. Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka: $|A \times B| = |A|\,|B|$.
2. Pasangan berurutan (a, b) berbeda dengan (b, a), dengan kata lain $(a, b) \neq (b, a)$.
3. Perkalian kartesian tidak komutatif, yaitu $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong. Pada Contoh 2.29(i) di atas, $D \times C = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\} \neq C \times D$.
4. Jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$, maka $A \times B = B \times A = \varnothing$

Contoh 2.30

Misalkan

A = himpunan makanan = { s = soto, g = gado-gado, n = nasi goreng, m = mie rebus }

B = himpunan minuman = { c = coca-cola, t = teh, d = es dawet }

Berapa banyak kombinasi makanan dan minuman yang dapat disusun dari kedua himpunan di atas? Jawabnya adalah $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 4 \cdot 3 = 12$ kombinasi dan minuman, yaitu $\{(s, c), (s, t), (s, d), (g, c), (g, t), (g, d), (n, c), (n, t), (n, d), (m, c), (m, t), (m, d)\}$. ■

Contoh 2.31

Daftarkan semua anggota himpunan berikut:

(a) $P(\varnothing)$ (b) $\varnothing \times P(\varnothing)$ (c) $\{\varnothing\} \times P(\varnothing)$ (d) $P(P(\{3\}))$

http://www.pakteguh.com

Penyelesaian:

(a) $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$
(b) $\varnothing \times P(\varnothing) = \varnothing$ (ket: jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$ maka $A \times B = \varnothing$)
(c) $\{\varnothing\} \times P(\varnothing) = \{\varnothing\} \times \{\varnothing\} = \{(\varnothing,\varnothing))$
(d) $P(P(\{3\})) = P(\{ \varnothing, \{3\} \}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{3\}\}, \{\varnothing, \{3\}\} \}$

■

2.11 Perampatan Operasi Himpunan

Operasi himpunan dapat dilakukan terhadap 2 atau lebih himpunan. Dalam hal ini kita melakukan perampatan (*generalization*) operasi himpunan dengan menggunakan dasar perampatan yang ada pada operasi aritmatika biasa.

Misalkan $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ merupakan himpunan, maka:

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$$

Notasi perampatan di atas dapat mempermudah penulisan ekspresi yang panjang, misalnya:

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$$

menjadi:

$$A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

Contoh 2.32

Misalkan:

$A_1 = \{ 0, 2, 3 \}$
$A_2 = \{ 1, 2, 3, 6 \}$
$A_3 = \{ -1, 0, 3, 9 \}$

http://www.pakteguh.com

maka,

$$\bigcap_{i=1}^{3} A_i = \{3\} \quad \text{dan} \quad \bigcup_{i=1}^{3} A_i = \{-1, 0, 1, 2, 3, 6, 9\}$$ ■

Contoh 2.33

Misalkan $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$, dan $C = \{\alpha, \beta\}$, maka
$A \times B \times C = \{(1, a, \alpha), (1, a, \beta), (1, b, \alpha), (1, b, \beta), (2, a, \alpha), (2, a, \beta), (2, b, \alpha), (2, b, \beta)\}$
■

2.12 Hukum-hukum Aljabar Himpunan

Terdapat beberapa sifat yang berlaku pada operasi antara dua himpunan atau lebih. Sifat-sifat tersebut dinyatakan dalam kesamaan himpunan (*set identities*). Kesamaan tersebut diberi nama "hukum" yang menyatakan bahwa bila dua himpunan atau lebih dioperasikan, maka hukum-hukum yang mengatur operasi tersebut berlaku. Cukup banyak hukum yang terdapat pada himpunan (yang ditemukan pada sejumlah referensi), namun Tabel 2.1 di bawah ini hanya mendaftarkan 11 buah hukum yang penting saja. Beberapa hukum tersebut mirip dengan hukum aljabar pada sistem bilangan riil seperti $a(b + c) = ab + bc$, yaitu hukum distributif, sehingga kadang-kadang hukum-hukum pada himpunan dinamakan juga **hukum-hukum aljabar himpunan**.

Pembuktian hukum-hukum di atas tidak diberikan di sini, dan diserahkan kepada anda sebagai latihan. Lihat upabab 2.17 mengenai metode-metode pembuktian untuk himpunan. Perhatikanlah bahwa terdapat kemiripan antara hukum-hukum himpunan di atas dengan hukum-hukum logika (lihat upabab 1.4). Notasi $\wedge$, $\vee$, F, T, pada hukum-hukum logika masing-masing berkoresponden dengan notasi $\cap$, $\cup$, $\varnothing$, dan U pada himpunan.

Tabel 2.1 Hukum-hukum aljabar Himpunan

1. Hukum identitas: (i) $A \cup \varnothing = A$ (ii) $A \cap U = A$	2. Hukum *null*/dominasi: (i) $A \cap \varnothing = \varnothing$ (ii) $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen: (i) $A \cup \overline{A} = U$ (ii) $A \cap \overline{A} = \varnothing$	4. Hukum idempoten: (i) $A \cup A = A$ (ii) $A \cap A = A$

http://www.pakteguh.com

5. Hukum involusi: $\overline{(\overline{A})} = A$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): (i) $A \cup (A \cap B) = A$ (ii) $A \cap (A \cup B) = A$
7. Hukum komutatif: (i) $A \cup B = B \cup A$ (ii) $A \cap B = B \cap A$	8. Hukum asosiatif: (i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
9. Hukum distributif: (i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	10. Hukum De Morgan: (i) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
11. Hukum 0/1 (atau hukum komplemen 2) (i) $\overline{\varnothing} = U$ (ii) $\overline{U} = \varnothing$	

2.13 Prinsip Dualitas

Prinsip dualitas banyak ditemukan pada beberapa situasi. Prinsip ini menyatakan bahwa dua konsep yang berbeda dapat dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar. Misalnya di negara Amerika Serikat kemudi mobil terletak di depan bagian kiri, sedangkan di negara Inggris (juga di Indonesia) kemudi mobil terletak di depan bagian kanan. Kedua letak kemudi ini menimbulkan peraturan yang berbeda pada kedua negara [LIU85]:

(a) di Amerika Serikat,
- mobil harus berjalan di bagian *kanan* jalan,
- pada jalan yang berlajur banyak, lajur *kiri* untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok *kanan* boleh langsung

(b) di Inggris,
- mobil harus berjalan di bagian *kiri* jalan,
- pada jalur yang berlajur banyak, lajur *kanan* untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok *kiri* boleh langsung

Jadi, konsep kiri dan kanan dapat dipertukarkan pada kedua negara tersebut sehingga peraturan yang berlaku di Amerika Serikat menjadi berlaku pula di Inggris. Prinsip inilah yang dinamakan dengan prinsip **dualitas**.

http://www.pakteguh.com

Prinsip dualitas juga ditemukan di dalam teori himpunan. Di dalam Tabel 2.1 kita dapat melihat bahwa beberapa sifat operasi himpunan merupakan analog satu sama lain. Sebagai contoh, pada hukum komplemen, $A \cup \overline{A} = U$ analog dengan $A \cap \overline{A} = \varnothing$, begitu juga pada hukum asosiatif, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ analog dengan $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. Hukum yang kedua diperoleh dari hukum yang pertama dengan cara mengganti tanda $\cap$ dengan $\cup$, $\cup$ dengan $\cap$, $\varnothing$ dengan U, U dengan $\varnothing$, dan membiarkan komplemen tetap seperti dinyatakan sebelumnya.

DEFINISI 2.14 (Prinsip Dualitas pada Himpunan). Misalkan S adalah suatu kesamaan yang melibatkan himpunan (*set identity*) dan operasi-operasi seperti $\cup$, $\cap$, dan komplemen. Jika S^* diperoleh dari S dengan mengganti $\cup$ menjadi $\cap$, $\cap$ menjadi $\cup$, $\varnothing$ menjadi U, dan U menjadi $\varnothing$, sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka kesamaan S^* juga benar dan disebut dual dari kesamaan S.

Contoh 2.34

Dual dari $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$ adalah $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$. Dualitas ini berarti bahwa $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$ adalah kesamaan yang benar, dan dualnya, $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$, juga benar.

■

Prinsip dualitas merupakan prinsip yang penting di dalam aljabar himpunan. Kita dapat menggunakan prinsip ini untuk menurunkan kesamaan himpunan (*set identities*) lain yang mengandung operator $\cup$ dan $\cap$, dan himpunan $\varnothing$ dan U atau membuktikan dual dari kesamaan himpunan lain. Tabel 2.2 memperlihatkan bahwa hukum-hukum aljabar himpunan merupakan contoh dualitas.

Tabel 2.2 Dualitas dari hukum-hukum aljabar Himpunan

1. Hukum identitas: $A \cup \varnothing = A$	Dualnya: $A \cap \mathrm{U} = A$
2. Hukum *null*/dominasi: $A \cap \varnothing = \varnothing$	Dualnya: $A \cup \mathrm{U} = \mathrm{U}$
3. Hukum komplemen: $A \cup \overline{A} = \mathrm{U}$	Dualnya: $A \cap \overline{A} = \varnothing$
4. Hukum idempoten: $A \cup A = A$	Dualnya: $A \cap A = A$

http://www.pakteguh.com

5. Hukum penyerapan: $A \cup (A \cap B) = A$	Dualnya: $A \cap (A \cup B) = A$
6. Hukum komutatif: $A \cup B = B \cup A$	Dualnya: $A \cap B = B \cap A$
7. Hukum asosiatif: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Dualnya: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
8. Hukum distributif: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Dualnya: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. Hukum De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Dualnya: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
10. Hukum 0/1 $\overline{\varnothing} = \mathrm{U}$	Dualnya: $\overline{\mathrm{U}} = \varnothing$

2.14 Prinsip Inklusi-Eksklusi

Berapa banyak anggota di dalam gabungan dua buah himpunan A dan B? Penggabungan dua buah himpunan menghasilkan himpunan baru yang elemen-elemennya berasal dari himpunan A dan himpunan B. Himpunan A dan himpunan B mungkin saja memiliki elemen-elemen yang sama. Banyaknya elemen bersama antara A dan B adalah $|A \cap B|$. Setiap unsur yang sama itu telah dihitung dua kali, sekali pada $|A|$ dan sekali pada $|B|$, meskipun ia seharusnya dianggap sebagai satu buah elemen di dalam $|A \cup B|$. Karena itu, jumlah elemen hasil penggabungan seharusnya adalah jumlah elemen di masing-masing himpunan dikurangi dengan jumlah elemen di dalam irisannya, atau

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \qquad (2.1)$$

Prinsip ini dikenal dengan nama prinsip **inklusi-eksklusi**. Sejumlah *lemma* dan teorema yang berkaitan dengan prinsip ini dituliskan sebagai berikut:

LEMMA 2.1. Misalkan A dan B adalah himpunan berhingga yang saling lepas (*disjoint*), maka $|A \cup B| = |A| + |B|$

TEOREMA 2.3. Misalkan A dan B adalah himpunan berhingga, maka $|A \cup B|$ berhingga dan $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

http://www.pakteguh.com

Dengan cara yang sama, kita dapat menghitung jumlah elemen hasil operasi beda setangkup:

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B| \qquad (2.2)$$

Contoh 2.35

Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

Penyelesaian:

Misalkan,

A = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3,
B = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5,
$A \cap B$ = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 (yaitu himpunan bilangan bulat yang habis dibagi oleh KPK – Kelipatan Persekutuan Terkecil – dari 3 dan 5, yaitu 15),

yang ditanyakan adalah $|A \cup B|$.

Terlebih dahulu kita harus menghitung

$$|A| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33, \qquad |B| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20, \qquad |A \cap B| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$$

untuk mendapatkan

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 33 + 20 - 6 = 47$$

Jadi, ada 47 buah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5. ■

Prinsip inklusi-eksklusi dapat dirampatkan untuk operasi lebih dari dua buah himpunan. Untuk tiga buah himpunan A, B, dan C, berlaku teorema berikut:

TEOREMA 2.4. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan berhingga, maka $|A \cup B \cup C|$ berhingga dan

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

dan untuk r buah himpunan berlaku teorema berikut:

TEOREMA 2.4. Misalkan $A_1, A_2, \ldots, A_r$ adalah himpunan berhingga, maka berlaku

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r| = \sum_i |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le r} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i \le j \le k \le r} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r|$$

http://www.pakteguh.com

Contoh 2.36

Sebanyak 1232 orang mahasiswa mengambil kuliah Bahasa Inggris, 879 orang mengambil kuliah Bahasa Perancis, dan 114 mengambil kuliah Bahasa Jerman. Sebnayak 103 orang mengambil kuliah Bahasa Inggris dan Perancis, 23 orang mengambil kuliah Bahasa Inggris dan Jerman, dan 14 orang mengambil kuliah Bahasa Perancis dan Bahasa Jerman. Jika 2092 orang mengambil paling sedikit satu buah kuliah Bahas Inggris, Bahasa Perancis, dan Bahasa Jerman, berapa banyak mahasiswa yang mengambil kuliah ketiga buah bahasa tersebut?

Penyelesaian:

Misalkan,

I = himpunan mahasiswa yang mengambil kuliah Bahasa Inggris,
P = himpunan mahasiswa yang mengambil kuliah Bahasa Perancis,
J = himpunan mahasiswa yang mengambil kuliah Bahasa Jerman.

maka,

$$|I| = 1232, \quad |P| = 879, \quad |J| = 114$$

$$|I \cap P| = 103, \quad |I \cap J| = 23, \quad |P \cap J| = 14$$

dan

$$|I \cup P \cup J| = 2092$$

Penyulihan nilai-nilai di atas pada persamaan

$$|I \cup P \cup J| = |I| + |P| + |J| - |I \cap P| - |I \cap J| - |P \cap J| + |I \cap P \cap J|$$

memberikan

$$2092 = 1232 + 879 + 114 - 103 - 23 - 14 + |I \cap P \cap J|$$

sehingga

$$|I \cap P \cap J| = 7$$

Jadi, ada 7 orang mahasiswa yang mengambil ketiga buah kuliah Bahasa Inggris, Perancis, dan Jerman. ■

2.15 Partisi

Tinjau sekumpulan mahasiswa di sebuah kelas. Bagaimana cara dosen membagi mahasiswa menjadi sejumlah kelompok? Dosen dapat membagi himpunan mahasiswa menjadi beberapa buah himpunan bagian, yang dalam hal ini setiap himpunan bagian mungkin berisi 1 orang mahasiswa, 2 orang mahasiswa, dan

http://www.pakteguh.com

seterusnya, bahkan kosong. Tidak ada mahasiswa yang sama berada di dalam dua atau lebih himpunan bagian yang berbeda. Gabungan dari seluruh himpunan bagian itu adalah seluruh mahasiswa di dalam kelas.

DEFINISI 2.15. Partisi dari sebuah himpunan A adalah sekumpulan himpunan bagian tidak kosong $A_1, A_2, \ldots$ dari A sedemikian sehingga:
(a) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = A$, dan
(b) himpunan bagian A_i saling lepas, yaitu $A_i \cap A_j = \varnothing$ untuk $i \neq j$

Contoh 2.37

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, maka $\{ \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{7, 8\}, \{5, 6\} \}$ adalah partisi dari A. ■

Catatlah bahwa partisi membagi himpunan A menjadi beberapa buah "blok". Pada contoh di atas, himpunan A dibagi menjadi 4 buah blok, yaitu $\{1\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{7, 8\}$, dan $\{5, 6\}$. Jika himpunan A terbatas jumlah elemennya, maka jumlah partisi yang dapat dibentuk tidak lebih banyak dari $|A|$.

2.16 Pembuktian Proposisi Himpunan

Proposisi himpunan adalah pernyataan yang menggunakan notasi himpunan. Pernyataan dapat berupa kesamaan (*set identity*), misalnya "$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$" adalah sebuah kesamaan himpunan, atau dapat berupa implikasi seperti "Jika $A \cap B = \varnothing$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka selalu berlaku bahwa $A \subseteq C$".

Terdapat beberapa metode untuk membuktikan kebenaran proposisi himpunan. Untuk suatu proposisi himpunan, kita dapat membuktikannya dengan beberapa metode yang menghasilkan kesimpulan yang sama. Di bawah ini dikemukakan beberapa metode pembuktian proposisi perihal himpunan.

1. Pembuktian dengan menggunakan diagram Venn

Buatlah diagram Venn untuk bagian ruas kiri keramaan dan diagram Venn untuk ruas kanan kesamaan. Jika diagram Venn keduanya sama, berarti kesaman tersebut benar.

Contoh 2.38

Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dengan diagram Venn.

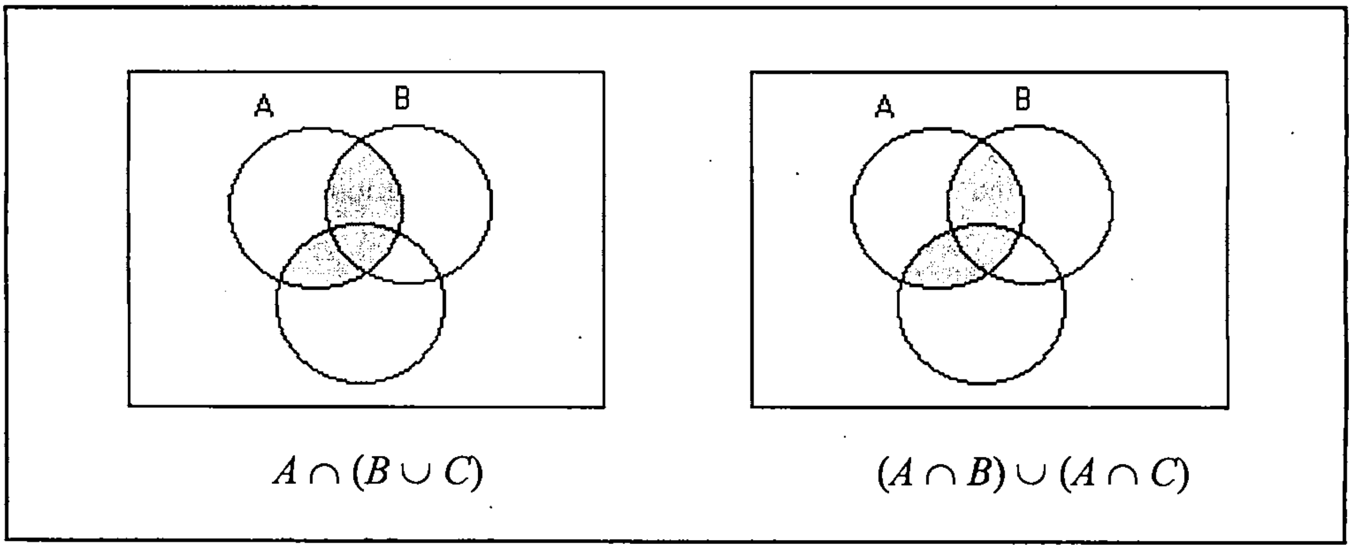
Penyelesaian:

Diagram Venn untuk ruas kiri dan ruas kanan masing-masing ditunjukkan pada Gambar 2.9. Dari diagram Venn untuk masing-masing ruas di atas, keduanya memberikan area arsiran yang sama. Jadi, terbukti bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

■

---

http://www.pakteguh.com



Gambar 2.9 Diagram Venn untuk pembuktian $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Dengan diagram Venn, pembuktian dapat dilakukan dengan cepat. Ini adalah kelebihan metode ini. Namun, kekurangannya, diagram Venn hanya dapat digunakan jika himpunan yang digambarkan tidak banyak jumlahnya. Selain itu, metode ini *mengilustrasikan* ketimbang membuktikan fakta. Banyak matematikawan tidak menganggapnya sebagai metode yang valid untuk pembuktian secara formal. Oleh karena itu, pembuktian dengan diagram Venn kurang dapat diterima.

2. Pembuktikan dengan menggunakan tabel keanggotaan

Kesamaan himpunan juga dapat dibuktikan dengan menggunakan **tabel keanggotaan** (*membership tables*). Kita menggunakan angka 1 untuk menyatakan bahwa suatu elemen adalah anggota himpunan, dan 0 untuk menyatakan bukan himpunan (nilai ini dapat dianalogikan *true* dan *false*).

Contoh 2.39

Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Tabel keanggotaan untuk kesamaan tersebut adalah seperti di bawah ini. Karena kolom $A \cap (B \cup C)$ dan kolom $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ sama, maka kesamaan tersebut benar.

■

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

http://www.pakteguh.com

Penjelasan: pandang baris kedua dari tabel di atas:

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	1	1	0	0	0	0

Arti dari baris tersebut adalah: misalkan $x \notin A$ (nilai 0), $x \notin B$ (nilai 0), $x \notin C$ (nilai 0), maka x pasti $\in B \cup C$ (nilai 1), tetapi $x \notin A \cap (B \cup C)$ (nilai 0), $x \notin A \cap B$ (nilai 0), $x \notin A \cap C$ (nilai 0), dan $x \notin ((A \cap B) \cup (A \cap C))$ (nilai 0).

3. Pembuktian dengan menggunakan aljabar himpunan.

Aljabar himpunan mengacu pada hukum-hukum yang dikemukakan pada upabab 2.12, termasuk di dalamnya teorema-teorema (yang ada buktinya), definisi suatu operasi himpunan dan penerapan prinsip dualitas.

Contoh 2.40

Misalkan A dan B himpunan. Buktikan bahwa $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) &= A \cap (B \cup \overline{B}) && \text{(Hukum distributif)}\\
&= A \cap U && \text{(Hukum komplemen)}\\
&= A && \text{(Hukum identitas)}
\end{aligned}
$$

■

Contoh 2.41

Misalkan A dan B himpunan. Buktikan bahwa $A \cup (B - A) = A \cup B$

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
A \cup (B - A) &= A \cup (B \cap \overline{A}) && \text{(Definisi operasi selisih)}\\
&= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) && \text{(Hukum distributif)}\\
&= (A \cup B) \cap U && \text{(Hukum komplemen)}\\
&= A \cup B && \text{(Hukum identitas)}
\end{aligned}
$$

■

Contoh 2.42

Misalkan A dan B himpunan.Tunjukkan bahwa $(A - B) - C = (A - C) - B$

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
(A - B) - C &= (A \cap \overline{B}) - C && \text{(Definisi operasi selisih)}\\
&= (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} && \text{(Definisi operasi selisih)}\\
&= (A \cap \overline{C}) \cap \overline{B} && \text{(Hukum asosiatif)}\\
&= (A - C) \cap \overline{B} && \text{(Definisi operasi selisih)}\\
&= (A - C) - B && \text{(Definisi operasi selisih)}
\end{aligned}
$$

■

---

http://www.pakteguh.com

Contoh 2.43

Tunjukkan bahwa $A \cup \overline{(A \cup B)} = A \cup \overline{B}$

Penyelesaian:

$A \cup (\overline{A \cup B})$	$= A \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$	(Hukum De Mogran)
	$= (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B})$	(Hukum distributif)
	$= U \cap (A \cup \overline{B})$	(Hukum komplemen)
	$= A \cup \overline{B}$	(Hukum identitas)

■

Contoh 2.44

Buktikan untuk sembarang himpunan A dan B, bahwa

(i) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$ dan
(ii) $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$

Penyelesaian:

(i) $A \cup (\overline{A} \cap B)$	$= (A \cup (A \cap B)) \cup (\overline{A} \cap B)$	(Hukum penyerapan)
	$= A \cup \{ (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \}$	(Hukum asosiatif)
	$= A \cup \{ (A \cup \overline{A})\} \cap B \}$	(Hukum distributif)
	$= A \cup (U \cap B)$	(Hukum komplemen)
	$= A \cup B$	(Hukum identitas)

■

(ii) $A \cap (\overline{A} \cup B)$	$= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$	(Hukum distributif)
	$= \varnothing \cup (A \cap B)$	(Hukum komplemen)
	$= A \cap B$	(Hukum identitas)

■

atau, dapat juga melalui dualitas dari (i) sebagai berikut:

$A \cap (\overline{A} \cup B)$	$= \{A \cap (A \cup B)\} \cap (\overline{A} \cup B)$	(Hukum penyerapan)
	$= A \cap \{ (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \}$	(Hukum asosiatif)
	$= A \cap \{ (A \cap \overline{A})\} \cup B \}$	(Hukum distributif)
	$= A \cap (\varnothing \cup B)$	(Hukum komplemen)
	$= A \cap B$	(Hukum identitas)

■

Contoh 2.45

Jika A dan B masing-masing adalah himpunan, buktikan bahwa

$$(A \oplus B) \cap A = A \cap \overline{B}$$

http://www.pakteguh.com

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
(A \oplus B) \cap A &= [(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})] \cap A && \text{(Definisi operasi beda-setangkup)}\\
&= [(A \cap \overline{B}) \cap A] \cup [(B \cap \overline{A}) \cap A] && \text{(Hukum distributif)}\\
&= [(A \cap A) \cap \overline{B})] \cup [(A \cap \overline{A}) \cap B] && \text{(Hukum asosiatif)}\\
&= (A \cap \overline{B}) \cup [(A \cap \overline{A}) \cap B] && \text{(Hukum idempoten)}\\
&= (A \cap \overline{B}) \cup (\varnothing \cap B) && \text{(Hukum komplemen)}\\
&= (A \cap \overline{B}) \cup \varnothing && \text{(Hukum Null)}\\
&= A \cap \overline{B} && \text{(Hukum identitas)}
\end{aligned}
$$

■

Contoh 2.46

Buktikan hukum penyerapan: (a) $A \cup (A \cap B) = A$ dan (b) $A \cap (A \cup B) = A$

Penyelesaian:

(a)
$$
\begin{aligned}
A \cup (A \cap B) &= (A \cap U) \cup (A \cap B) && \text{(Hukum identitas)}\\
&= A \cap (U \cup B) && \text{(Hukum distributif)}\\
&= A \cap U && \text{(Hukum identitas)}\\
&= A && \text{(Hukum identitas)}
\end{aligned}
$$

■

(b) Bukti mengikuti prinsip dualitas dari jawaban (a)

$$
\begin{aligned}
A \cap (A \cup B) &= (A \cup \varnothing) \cap (A \cup B) && \text{(Hukum identitas)}\\
&= A \cup (\varnothing \cap B) && \text{(Hukum distributif)}\\
&= A \cup \varnothing && \text{(Hukum identitas)}\\
&= A && \text{(Hukum identitas)}
\end{aligned}
$$

■

---

4. Pembuktian dengan menggunakan definisi.

Metode ini digunakan untuk membuktikan proposisi himpunan yang tidak berbentuk kesamaan, tetapi proposisi yang berbentuk implikasi. Biasanya di dalam implikasi tersebut terdapat notasi himpunan bagian ($\subseteq$ atau $\subset$).

Contoh 2.47

Misalkan A dan B himpunan. Jika $A \cap B = \varnothing$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka $A \subseteq C$. Buktikan!

Penyelesaian:

(i) Dari definisi himpunan bagian, $P \subseteq Q$ jika setiap $x \in P$ juga $\in Q$. Misalkan $x \in A$. Karena $A \subseteq (B \cup C)$, maka dari definisi himpunan bagian, x juga $\in (B \cup C)$. Dari definisi operasi gabungan ($\cup$), $x \in (B \cup C)$ berarti $x \in B$ atau $x \in C$.

http://www.pakteguh.com

(ii) Karena $x \in A$ dan $A \cap B = \varnothing$, maka $x \notin B$

Dari (i) dan (ii), $x \in C$ harus benar. Karena $\forall x \in A$ juga berlaku $x \in$ C, maka dapat disimpulkan $A \subseteq C$. ■

Contoh 2.48

Misalkan A, B, dan C adalah tiga buah himpunan. Buktikan jika $A \subseteq B$ maka $A \cap C \subseteq B \cap C$.

Penyelesaian:

(i) Karena $A \cap C \subseteq B \cap C$, maka dari definisi himpunan bagian, $\forall x \in (A \cap C)$ juga adalah $\in (B \cap C)$

(ii) Karena $A \cap C$, maka dari definisi operasi irisan, jika $x \in (A \cap C)$, maka $x \in A$ dan $x \in C$.

(iii) Karena $A \subseteq B$, maka dari definisi himpunan bagian, $\forall y \in A$ juga $\in B$. Jika simbol y diganti dengan x, maka $\forall x \in A$ juga $\in B$.

Dari (ii) telah diketahui $x \in A$ dan $x \in C$. Dari (iii) telah diketahui $x \in B$ jika $x \in A$. Maka, $x \in A$ dan $x \in C$, yang berarti $x \in (B \cap C)$.

Dari (ii) dan (iii) dapat disimpulkan bahwa $A \cap C \subseteq B \cap C$. ■

2.17 Himpunan Ganda

Dari definisi himpunan, himpunan adalah kumpulan elemen yang berbeda. Namun pada beberapa situasi, adakalanya elemen himpunan tidak seluruhnya berbeda, misalnya himpunan nama-nama mahasiswa di sebuah kelas. Nama-nama mahasiswa di dalam sebuah kelas mungkin ada yang sama, karena itu ada perulangan elemen yang sama di dalam himpunan tersebut. Himpunan yang elemennya boleh berulang (tidak harus berbeda) disebut **himpunan ganda** (*multiset*). Contohnya, $\{a, a, a, b, b, c\}$, $\{2, 2, 2\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{\}$ adalah himpunan ganda. **Multiplisitas** dari suatu elemen pada himpunan ganda adalah jumlah kemunculan elemen tersebut di dalam himpunan ganda. Sebagai contoh: Jika $M = \{ 0, 1, 01, 1, 0, 001, 0001, 00001, 0, 0, 1 \}$, maka multiplisitas elemen 0 adalah 4. Cara lain menyatakan himpunan-ganda adalah dengan menggunakan multiplisitasnya, misalnya $\{3 \cdot a, 2 \cdot b, 1 \cdot c\}$, yang sama dengan $\{a, a, a, b, b, c\}$.

Himpunan (*set*) merupakan contoh khusus dari suatu himpunan ganda, yang dalam hal ini multiplisitas dari setiap elemennya adalah 1 atau 0.

http://www.pakteguh.com

Kardinalitas dari suatu himpunan ganda didefinisikan sebagai kardinalitas himpunan padanannya (ekivalen), dengan mengasumsikan elemen-elemen di dalam himpunan ganda semuanya berbeda.

Operasi pada himpunan ganda sedikit berbeda dengan operasi pada himpunan biasa. Untuk himpunan ganda, definisi operasi himpunan adalah sebagai berikut:

DEFINISI 2.16. Misalkan P dan Q adalah himpunan ganda:

1. $P \cup Q$ adalah suatu himpunan ganda yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas maksimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q.

   Contoh: Jika $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q = \{ a, a, b, c, c \}$, maka $P \cup Q =$ $\{ a, a, a, b, c, c, d, d \}$

2. $P \cap Q$ adalah suatu himpunan ganda yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas minimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q.

   Contoh: Jika $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q = \{ a, a, b, c, c \}$ maka $P \cap Q =$ $\{ a, a, c \}$

3. $P - Q$ adalah suatu himpunan ganda yang multiplisitas elemennya sama dengan:
   - multiplisitas elemen tersebut pada P dikurangi multiplisitasnya pada Q, jika selisihnya positif
   - 0, jika selisihnya nol atau negatif.

   Contoh: Jika $P = \{ a, a, a, b, b, c, d, d, e \}$dan $Q = \{ a, a, b, b, b, c, c, d, d, f \}$ maka $P - Q = \{ a, e \}$

4. $P + Q$, yang didefinisikan sebagai jumlah (*sum*) dua buah himpunan ganda, adalah suatu himpunan ganda yang multiplisitas elemennya sama dengan penjumlahan dari multiplisitas elemen tersebut pada P dan Q. Catatan: Beda setangkup tidak didefinisikan pada himpunan ganda.

   Contoh: Jika $P = \{ a, a, b, c, c \}$ dan $Q = \{ a, b, b, d \}$ maka $P + Q =$ $\{ a, a, a, b, b, b, c, c, d \}$

2.18 Tipe *Set* dalam Bahasa Pascal

Bahasa Pascal menyediakan tipe data khusus untuk himpunan, yang bernama set. Tipe set menyatakan himpunan kuasa dari tipe ordinal.

Contohnya:

```
type
   HurufBesar = 'A'..'Z';
   Huruf = set of HurufBesar;
var
   HurufKu : Huruf;
```


http://www.pakteguh.com

Nilai untuk peubah HurufKu dapat diisi dengan pernyataan berikut:

```
HurufKu:=['A', 'C', 'D'];
HurufKu:=['M'];
HurufKu:=[];           { himpunan kosong }
```

Operasi yang dapat dilakukan pada tipe himpunan adalah operasi gabungan, irisan, dan selisih seperti pada contoh berikut:

```
HurufKu:=['A', 'C', 'D'] + ['C', 'D', 'E']; {gabungan}
HurufKu:=['A', 'C', 'D'] * ['C', 'D', 'E']; {irisan}
HurufKu:=['A', 'C', 'D'] - ['C', 'D', 'E']; {selisih}
```

Uji keanggotaan sebuah elemen di dalam himpunan dilakukan dengan menggunakan opeator *in* seperti contoh berikut:

```
if 'A' in HurufKu then
        ...
```

Di dalam kakas pemrograman *Delphi*, *set* sering digunakan untuk mengindikasikan *flag*. Misalnya himpunan *icon* untuk *window*:

```
type
  TBorderIcon=(biSystemMenu,biMinimize, biMaximaze);
  Huruf = set of TBoderIcon;
```

2.19 Pengantar Logika dan Himpunan *Fuzzy*

(upabab ini hanya sekadar pengetahuan tambahan)

Logika *fuzzy* pertama kali dikembangkan oleh Lotfi A. Zadeh, seorang ilmuwan Amerika Serikat berkebangsaan Iran dari Universitas California di Barkeley, melalui tulisannya pada tahun 1965. Meskipun logika *fuzzy* dikembangkan di Amerika, namun ia lebih populer dan banyak diaplikasikan secara luas oleh praktisi Jepang dengan mengadaptasikannya ke bidang kendali (*control*). Makanya, tidak heran, kalau saat ini banyak dijual produk elektronik buatan Jepang yang menerapkan prinsip logika *fuzzy*, seperti mesin cuci, AC, dan lain-lain.

Mengapa logika *fuzzy* yang ditemukan di Amerika malah lebih banyak ditemukan aplikasinya di negara Jepang? Salah satu penjelasannya kultur orang Barat yang cenderung memandang suatu persoalan sebagai hitam-putih, ya-tidak, bersalah-tidak bersalah, sukses-gagal, atau yang setara dengan dunia logika biner Aristoteles, sedangkan kultur orang Timur lebih dapat menerima dunia "abu-abu" atau *fuzzy*.

http://www.pakteguh.com

Logika *fuzzy* umumnya diterapkan pada masalah-masalah yang mengandung unsur ketidakpastian (*uncertainty*).

Contoh a: Seseorang dikatakan "tinggi" jika tinggi badannya di atas 1,7 meter. Apakah orang yang mempunyai tinggi badan 1,6999 meter atau 1,65 meter termasuk kategori orang tinggi? Menurut persepsi manusia, orang yang mempunyai tinggi badan sekitar 1,7 meter dikatakan "kurang lebih tinggi" atau "agak tinggi".

Contoh b: Kecepatan "pelan" didefinisikan di bawah 20 km/jam. Bagaimana dengan kecepatan 20,001 km/jam, apakah masih dapat dikatakan pelan? Kita, manusia, mungkin mengatakan bahwa kecepatan 20,001 km/jam itu "agak pelan".

Kedua contoh di atas memperlihatkan bahwa ketidapastian dalam kasus ini disebabkan oleh kaburnya pengertian "agak", "kurang lebih", "sedikit", dan sebagainya.

Logika *fuzzy* dikembangkan dari teori himpunan *fuzzy*. Sementara, himpunan yang telah kita bahas sebelum ini adalah himpunan klasik yang seringkali disebut **himpunan tegas** (*crisp set*). Keanggotaan suatu unsur di dalam himpunan dinyatakan secara tegas, apakah objek tersebut anggota himpunan atau bukan. Untuk sembarang himpunan A, sebuah unsur x adalah anggota himpunan apabila x terdapat atau terdefinisi di dalam A. Sebagai contoh, misalkan $A = \{0, 4, 7, 8, 11\}$, maka jelaslah $7 \in A$, tetapi $5 \notin A$.

Kita sudah mempelajari bahwa himpunan dapat disajikan dalam berbagai cara. Selain keempat cara penyajian yang sudah disebutkan di dalam upabab 2.2, ada cara lain untuk menyajikan himpunan, yaitu dengan menggunakan **fungsi karakteristik**. Fungsi karakteristik, dilambangkan dengan χ, mendefinisikan apakah suatu unsur dari semesta pembicaraan merupakan anggota suatu himpunan atau bukan, yaitu

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$$

Jadi, χ_A memetakan X ke himpunan $\{ 0, 1 \}$, yang dalam hal ini X adalah semesta pembicaraan.

Contoh 2.49.

Misalkan $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan $A \subseteq X$, yang dalam hal ini $A = \{1, 2, 5\}$. Dengan fungsi karakteristik, kita menyatakan A sebagai

http://www.pakteguh.com

$A = \{(1,1), (2,1), (3,0), (4,0), (5,1), (6,0)\}$

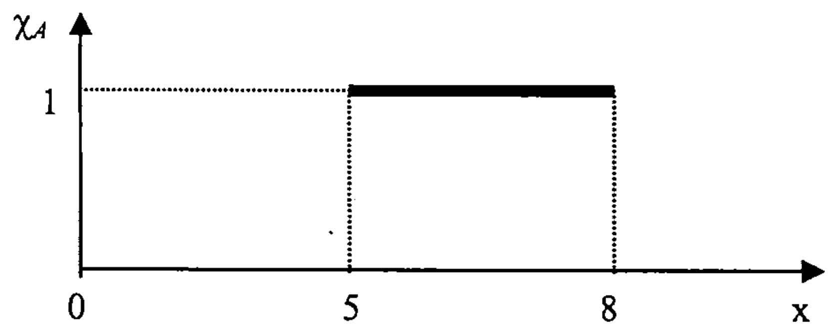
Keterangan: (2,1) berarti $\chi_A(2) = 1$; (4,0) berarti $\chi_A(4) = 0$, ■

Contoh 2.50.

Misalkan $X = \{ x \mid 0 \le x \le 10, x \in \mathbf{R} \}$. Misalkan $A \subseteq X$, yang dalam hal ini $A = \{x \mid 5 \le x \le 8, x \in \mathbf{R} \}$. Maka, kita dapat menyatakan bahwa

$$\chi_A(6) = 0$$
$$\chi_A(4{,}8) = 0$$
$$\chi_A(7) = 1$$
$$\chi_A(8{,}654) = 1$$

Grafik pada Gambar 2.10 memperlihatkan hubungan antara nilai-nilai x di dalam X dan fungsi karakteristiknya. Garis tebal antara 5 dengan 8 menyatakan bahwa nilai-nilai x di dalam selang tersebut secara tegas mempunyai keanggotaan 1, sedangkan di luar selang tersebut mempunyai nilai keanggotaan 0.



Gambar 2.10 Grafik fungsi karakteristik $A = \{ x \mid 5 \le x \le 8, x \in \mathrm{R} \}$

Sekarang, tinjau V = himpunan kecepatan pelan (yaitu $v \le 20$ km/jam). Apakah kecepatan $v = 20{,}01$ km/jam termasuk ke dalam himpunan kecepatan pelan? Menurut himpunan tegas, 20,01 km/jam $\notin V$, tetapi menurut himpunan *fuzzy*, 20,01 km/jam tidak ditolak ke dalam himpunan V, tetapi diturunkan derajat keanggotaannya.

Di dalam teori himpunan *fuzzy*, keanggotaan suatu elemen di dalam himpunan dinyatakan dengan **derajat keanggotaan** (*membership values*) yang nilainya terletak di dalam selang [0, 1].

Derajat keanggotaan ditentukan dengan **fungsi keanggotaan**:

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$$

bandingkan fungsi keanggotaan pada teori himpunan tegas:

$$\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$$

http://www.pakteguh.com

Arti derajat keanggotaan adalah sebagai berikut:

(a) jika $\mu_A(x) = 1$, maka x adalah anggota penuh dari himpunan A
(b) jika $\mu_A(x) = 0$, maka x bukan anggota himpunan A
(c) jika $\mu_A(x) = \mu$, dengan $0 < \mu < 1$, maka x adalah anggota himpunan A dengan derajat keanggotaan sebesar μ.

Cara Mendefinisikan Himpunan *Fuzzy*

Misalkan himpunan *fuzzy* A didefinisikan pada semesta pembicaraan $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Di bawah ini dijelaskan tiga cara mendefinisikan himpunan *fuzzy*:

Cara 1: Sebagai himpunan pasangan berurutan

$$A = \{ (x_1, \mu_A(x_1)), (x_2, \mu_A(x_2)), \ldots, (x_n, \mu_A(x_n)) \}$$

Contoh 2.51.

Misalkan

X = { becak, sepeda motor, mobil kodok(VW), mobil kijang, mobil *carry* }
A = himpunan kendaraan yang nyaman dipakai untuk bepergian jarak jauh oleh keluarga besar (terdiri dari ayah, ibu, dan empat orang anak)

Didefinisikan bahwa,

x_1 = becak, $\mu_A(x_1) = 0$
x_2 = sepeda motor, $\mu_A(x_2) = 0.1$
x_3 = mobil kodokbecak, $\mu_A(x_3) = 0.5$
x_4 = mobil kijang, $\mu_A(x_4) = 1.0$
x_5 = mobil *carry*, $\mu_A(x_5) = 0.8$

maka, dalam himpunan *fuzzy*,

A = { (becak, 0), (sepeda motor, 0.1), (mobil kodok, 0.5), (mobil kijang, 0.5), (mobil carry, 0.8) }

■

Cara pertama ini hanya dapat digunakan apabila anggota himpunan *fuzzy* bernilai diskrit. Untuk anggota himpunan *fuzzy* yang bernilai riil, kita tidak dapat menggunakannya.

Cara 2: Dinyatakan dengan menyebut fungsi keanggotaan.
Cara ini digunakan bila anggota himpunan *fuzzy* bernilai menerus (riil).

http://www.pakteguh.com

Contoh 2.52.

Misalkan

A = himpunan bilangan riil yang dekat 2

maka, dalam himpunan *fuzzy*,

$A = \{(x, \mu(x)) \mid \mu(x) = 1/(1 + (x - 2)^2)\}$

■

Cara 3: Dengan menuliskan sebagai

$$A = \{ \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \ldots + \mu_A(x_n)/x_n \} = \{ \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i \}$$

untuk X diskrit, atau

$$A = \{ \int_X \mu_A(x)/x \}$$

untuk X menerus (*continue*). Lambang $\int$ bukan berarti integral seperti di dalam kalkulus.

Contoh 2.53.

(i) diskrit
X = himpunan bilangan bulat positif
A = bilangan bulat yang dekat 10 = { 0.1/7 + 0.5/8 + 1.0/10, 0.8/11 + 0.5/12 + 0.1/13 }

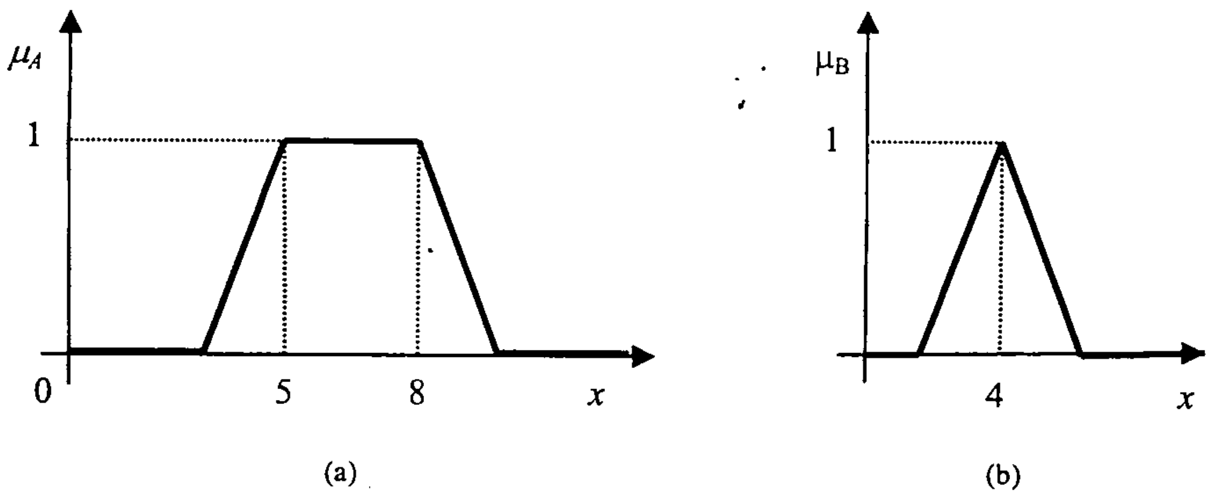
(ii) menerus
X = himpunan bilangan riil positif
A = bilangan riil yang dekat 10 = $\int 1/(1 + (x - 10)^2 / x$

■

Operasi Himpunan *Fuzzy*

Misalkan himpunan *fuzzy* A dan himpunan *fuzzy* B masing-masing memiliki fungsi keanggotaan yang grafiknya adalah seperti pada Gambar 2.11.

http://www.pakteguh.com



Gambar 2.11 Grafik fungsi keanggotaan himpunan *fuzzy A* dan *B*.

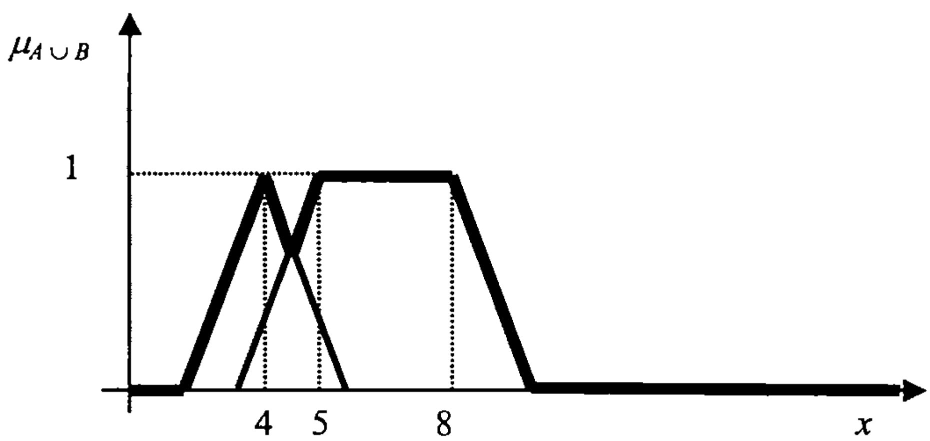
Operasi-operasi pada himpunan *fuzzy* didefinisikan sebagai berikut:

1. Gabungan

$$A \cup B \rightarrow \mu_{A \cup B} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$A \cup B$ diartikan sebagai "x dekat A atau x dekat B".

Grafik fungsi keanggotaan $A \cup B$ digambarkan pada Gambar 2.12 (garis yang lebih tebal menunjukkan derajat keanggotaan hasil gabungan)



Gambar 2.12 Grafik fungsi keanggotaan himpunan $A \cup B$.

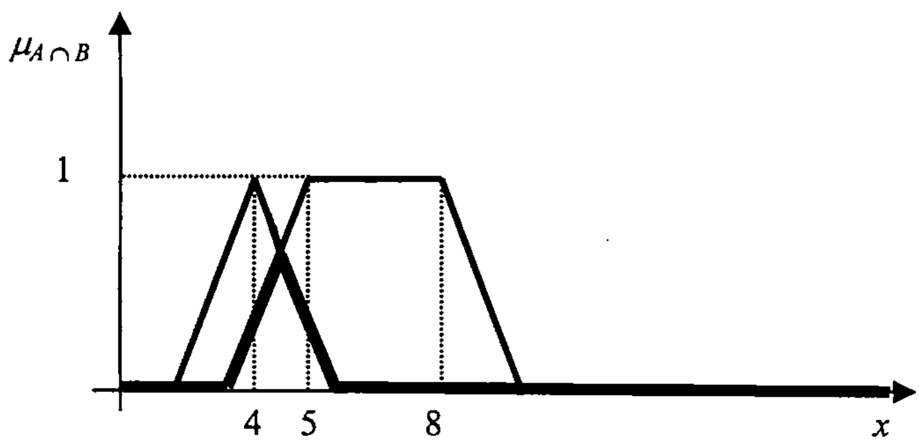
http://www.pakteguh.com

2. Irisan

$$A \cap B \rightarrow \mu_{A \cap B} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$A \cap B$ diartikan sebagai "x dekat A dan x dekat B".

Grafik fungsi keanggotaan $A \cap B$ digambarkan pada Gambar 2.13 (garis yang lebih tebal menunjukkan derajat keanggotaan hasil irisan).



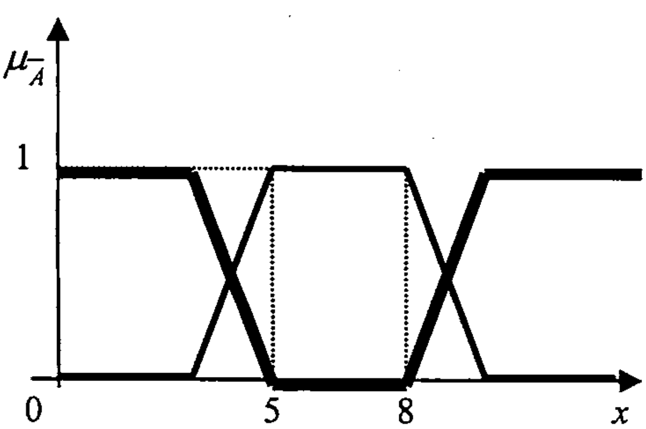
Gambar 2.13 Grafik fungsi keanggotaan himpunan $A \cap B$.

3. Komplemen

$$\overline{A} \rightarrow \mu_{\overline{A}} = 1 - \mu_A(x)$$

$\overline{A}$ diartikan sebagai "x tidak dekat A".

Grafik fungsi keanggotaan $\overline{A}$ digambarkan pada Gambar 2.14 garis yang lebih tebal menunjukkan derajat keanggotaan hasil komplemen).



Gambar 2.14 Grafik fungsi keanggotaan himpunan $\overline{A}$.

http://www.pakteguh.com

Logika *Fuzzy*

Pada logika klasik, nilai kebenaran proposisi adalah 1 (*true*) atau 0 (*false*). Tetapi pada logika *fuzzy*, nilai kebenaran proposisi adalah nilai riil di dalam selang [0,1]. Misalkan p adalah proposisi yang didefinisikan pada himpunan *fuzzy* A, maka nilai kebenaran proposisi p adalah $T(p)$:

$$T(p) = \mu_A(x),\ \ 0 \le \mu_A \le 1$$

Jadi, nilai kebenaran $p : x \in A$ sama dengan derajat keanggotaan x di dalam A.

Dua bentuk proposisi di dalam logika *fuzzy*:

1. Proposisi atomik, berbentuk "*x is A*" yang dalam hal ini, x adalah peubah linguistik dan A adalah terma/nilai linguistik

   Contoh proposisi (dalam Bahasa Inggris): "*man is old*"
   Jika $x = 50$ dan fungsi keanggotaan *old* adalah

$$\mu_{old} = \begin{cases} 0 & ,x \le 45 \\ (x-45)/15 & ,45 < x < 60 \\ 1 & ,x \ge 60 \end{cases}$$

   maka nilai kebenaran "*42 is old*" adalah (50 – 45)/15 = 1/3 = 0.333

2. Proposisi majemuk, berbentuk:

   "*x is A or y is B*"
   "*x is A and y is B*"

   Contoh (dalam Bahasa Inggris): "*temperature is cold or it is rainy* "

2.20 Ragam Contoh Soal dan Penyelesaian

Untuk lebih memantapkan pemahaman terhadap materi himpunan (tidak termasuk himpunan *fuzzy*), berikut ini diberikan sejumlah soal dan penyelesaiannya.

http://www.pakteguh.com

Contoh 2.54.

Misalkan A adalah himpunan. Periksalah apakah setiap pernyataan di bawah ini benar atau salah dan jika salah, bagaimana seharusnya:

(a) $A \cap P(A) = P(A)$
(b) $\{A\} \cup P(A) = P(A)$
(c) $A - P(A) = A$
(d) $\{A\} \in P(A)$
(e) $A \subseteq P(A)$

Penyelesaian:

(a) salah, seharusnya $A \cap P(A) = \varnothing$
(b) benar
(c) benar
(d) salah, seharusnya $\{A\} \subseteq P(A)$
(e) salah, seharusnya $A \in P(A)$

■

Contoh 2.55

[LIP00] Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Tentukan semua kemungkinan himpunan C sedemikian sehingga $A \subset C$ dan $C \subset B$, yaitu A adalah *proper subset* dari C dan C adalah *proper subset* dari B.

Penyelesaian:

C harus mengandung semua elemen $A = \{1, 2, 3\}$ dan sekurang-kurangnya satu elemen dari B. Dengan demikian, $C = \{1, 2, 3, 4\}$ atau $C = \{1, 2, 3, 5\}$. C tidak boleh memuat 4 dan 5 sekaligus karena C adalah *proper subset* dari B.

■

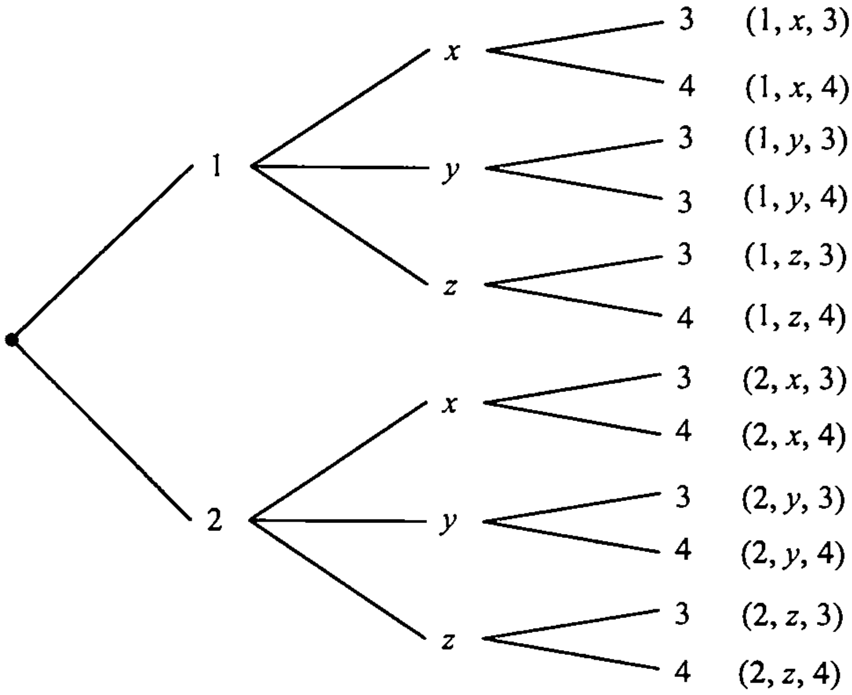
Contoh 2.56.

Diberikan $A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y, z\}$, dan $C = \{3, 4\}$. Tentukan $|A \times B \times C|$ dan $A \times B \times C$.

Penyelesaian:

$A \times B \times C$ terdiri dari semua tripel (a, b, c) yang dalam hal ini $a \in A$, $b \in B$, dan $c \in C$. Kardinalitas $A \times B \times C$, yaitu $|A \times B \times C| = |A| \cdot |B| \cdot |C| = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$. Semua elemen dari $A \times B \times C$ dapat diperoleh secara sistematis dengan bantuan pohon berikut:

http://www.pakteguh.com



Jadi, $A \times B \times C = \{(1, x, 3), (1, x, 4), (1, y, 3), (1, y, 4), (1, z, 3), (1, z, 4), (2\ x, 3), (2, x, 4), (2, y, 3), (2, y, 4), (2, z, 3), (2, z, 4)\}$.

■

Contoh 2.57

Jika A dan B masing-masing adalah himpunan, tunjukkan secara aljabar bahwa $(A \oplus B) \cap A$ dapat dinyatakan dengan $A - B$.

Penyelesaian:

$(A \oplus B) \cap A$	$=$	$((A - B) \cup (B - A)) \cap A$	(Definisi operasi beda setangkup)
	$=$	$((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})) \cap A$	(Definisi selisih)
	$=$	$A \cap ((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}))$	(Hukum Komutatif)
	$=$	$(A \cap (A \cap \overline{B})) \cup (A \cap (B \cap \overline{A}))$	(Hukum Distributif)
	$=$	$(A \cap (A \cap \overline{B})) \cup ((B \cap \overline{A}) \cap A)$	(Hukum Komutatif)
	$=$	$((A \cap A) \cap \overline{B}) \cup (B \cap (\overline{A} \cap A))$	(Hukum Asosiatif)
	$=$	$(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap (\overline{A} \cap A))$	(Hukum Idempoten)
	$=$	$(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \varnothing)$	(Hukum Komplemen)
	$=$	$(A \cap \overline{B}) \cup \varnothing$	(Hukum Null)
	$=$	$(A \cap \overline{B})$	(Hukum Identitas)
	$=$	$A - B$	(Definisi Selisih)

■

---

http://www.pakteguh.com

Contoh 2.58

Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan secara aljabar himpunan bahwa $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

Penyelesaian:

$A - (B \cup C) = A \cap \overline{B \cup C}$	(Definisi Selisih)
$= A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$	(Hukum De Morgan)
$= (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C})$	(Hukum Distributif)
$= (A - B) \cap (A - C)$	(Definisi operasi selisih)

■

Contoh 2.59

Misalkan A adalah himpunan bagian dari himpunan semesta (U). Tuliskan hasil dari operasi beda-setangkup berikut?

(a) $A \oplus U$ (b) $A \oplus \overline{A}$ (b) $\overline{A} \oplus U$

Penyelesaian:

(a) $A \oplus U = (A - U) \cup (U - A)$	(Definisi operasi beda setangkup)
$= (\varnothing) \cup (A)$	(Definisi opearsi selisih)
$= \overline{A}$	(Hukum Identitas)
(b) $A \oplus \overline{A} = (A - \overline{A}) \cup (\overline{A} - A)$	(Definisi operasi beda setangkup)
$= (A \cap A) \cup (\overline{A} \cap \overline{A})$	(Definisi operasi selisih)
$= A \cup \overline{A}$	(Hukum Idempoten)
$= U$	(Hukum Komplemen)
(c) $\overline{A} \oplus U = (\overline{A} \cup U) - (\overline{A} \cap U)$	(Definisi operasi beda setangkup)
$= U - \overline{A}$	(Hukum Null dan Hukum Identitas)
$= A$	(Definisi operasi selisih)

■

Contoh 2.60

Di antara bilangan bulat antara 101 – 600 (termasuk 101 dan 600 itu sendiri), berapa banyak bilangan yang tidak habis dibagi oleh 4 atau 5 namun tidak keduanya?

Penyelesaian:

Diketahui:

$|U| = 500$

$|A| = \lfloor 600/4 \rfloor - \lfloor 100/4 \rfloor = 150 - 25 = 125$

$|B| = \lfloor 600/5 \rfloor - \lfloor 100/5 \rfloor = 120 - 20 = 100$

$|A \cap B| = \lfloor 600/20 \rfloor - \lfloor 100/20 \rfloor = 30 - 5 = 25$

http://www.pakteguh.com

yang ditanyakan $|\overline{A \oplus B}| = ?$

Hitung terlebih dahulu

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B| = 125 + 100 - 50 = 175$$

untuk mendapatkan

$$|\overline{A \oplus B}| = U - |A \oplus B| = 500 - 175 = 325$$

■

http://www.pakteguh.com

Soal Latihan

1. Tentukan apakah pernyataan di bawah ini benar atau salah:
   (a) $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$
   (b) $\varnothing \in \{\varnothing\}$
   (c) $\{\varnothing\} \in \{\varnothing\}$
   (d) $\{a, b\} \subseteq \{a, \text{b}, \{\{a, b\}\}\}$
   (e) Jika $A \subseteq B$ dan $B \in C$, maka $A \in C$
   (f) Jika $A \in B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \in C$.
   (g) Jika $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, maka $\varnothing \in 2^A$
   (h) Jika $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, maka $\{\{\varnothing\}\} \subseteq 2^A$
   (i) $\varnothing \subseteq \varnothing$
   (j) $\varnothing \in \varnothing$
   (k) $\{\varnothing\} \in \varnothing$
   (l) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{\{a, b, c\}\}$
   (m) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{\{a, b, c\}\}$
   (n) $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$
   (o) jika $A \in B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$
   (p) jika $A \subseteq B$ dan $B \in C$, maka $A \subseteq C$
   (q) $x \in \{x\}$
   (r) $\{x\} \subseteq \{x\}$
   (s) $\{x\} \in \{x\}$
   (t) $\{x\} \in \{\{x\}\}$
   (u) $\varnothing \subseteq \{x\}$
   (v) $\varnothing \in \{x\}$

2. Jika $A = \{a, b, \{a, c\}, \varnothing\}$ dan $B = \{a, \{a\}, d, e\}$, tentukan himpunan berikut:
   (a) $A - \varnothing$ (b) $A - \{\varnothing\}$ (c) $\{\{a, c\}\} - A$
   (d) $A \oplus B$ (e) $\{a\} - \{A\}$ (f) $P(A\text{-}B)$
   (g) $\varnothing - A$ (h) B^2 (i) $A \cup (B \cap A)$ (j) $A \cap P(A)$

3. (a) Tentukan himpunan kuasa dari himpunan $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
   (b) Berapa banyak elemen pada himpunan $P(\{\varnothing, a, \{a\}, \{\{a\}\}\})$?

4. Misalkan $A = \{\varnothing\}$ dan $B = P(P(A))$.
   (a) Apakah $\varnothing \in B$? $\varnothing \subseteq B$?
   (b) Apakah $\{\varnothing\} \in B$? $\{\varnothing\} \subseteq B$?
   (c) Apakah $\{\{\varnothing\}\} \in B$? $\{\{\varnothing\}\} \subseteq B$?

http://www.pakteguh.com

5. Misalkan A adalah himpunan. Periksalah apakah setiap pernyataan di bawah ini benar atau salah dan jika salah, bagaimana seharusnya:
   (a) $A \cap P(A) = A$
   (b) $A - P(A) = A$
   (c) $\{A\} \in P(A)$
   (d) $A \subseteq P(A)$

6. Didefinisikan A, B, C, D, dan E sebagai berikut:
   $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, \{2\}, \{\{4\}\}\}$,
   $C = \{1, \{1, 2\}, \{\{1, 2, 3\}\}\}$, $D = \{1, 2, 2, 1\}$.

   Untuk tiap W, X, Y, Z yang didefinisikan di bawah ini, nyatakan apakah ia adalah elemen atau himpunan bagian dari tiap-tiap himpunan A, B, C, D.
   $W = \{1, 3, 5\}$ $\quad$ $X = \{1, 2, 3\}$ $\quad$ $Y = \{4\}$ $\quad$ $Z = \{2\}$

7. Diketahui $A = \{+, -\}$, $B = \{00, 01, 10, 11\}$.
   (a) Daftarkan $A \times B$
   (b) Berapa banyak elemen A^4 dan $(A \times B)^3$?

8. Periksalah apakah setiap pernyataan di bawah ini benar atau salah. Jelaskan secara ringkas jawaban anda.
   (a) $A \cap P(A) = P(A)$
   (b) $A \cap P(A) = A$
   (c) $\{A\} \cup P(A) = P(A)$
   (d) $\{A\} \cap P(A) = A$
   (e) $A - P(A) = A$

9. Temukan dua buah himpunan sedemikian sehingga $A \in B$ dan $A \subseteq B$.

10. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Tunjukkan bahwa
   (a) $(A - C) \cap (C - B) = \varnothing$
   (b) $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$
   (c) $(A - B) - C \subseteq A - C$

11. Apa yang dapat dikatakan tentang himpunan A dan B jika kesamaan berikut benar?
   (a) $A - B = B - A$
   (b) $A \cap B = B \cap A$

12. Dapatkah disimpulkan $A = B$ jika A, B, dan C adalah himpunan sedemikian sehingga
   (a) $A \cup C = B \cup C$
   (b) $A \cap C = B \cap C$

http://www.pakteguh.com

13. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan yang tidak kosong sedemikian sehingga $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, dan $C \subseteq A$. Apakah yang dapat disimpulkan dari pernyataan tersebut.

14. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Tunjukkan bahwa
$(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$.

15. Misalkan A, B, dan C himpunan. Tunjukkan bahwa
$(A - B) - C = A - (B \cup C)$.

16. Buktikan hukum identitas: (i) $A \cup \varnothing = A$ dan (ii) $A \cap U = A$.

17. Buktikan bahwa jika $A \cup B \subseteq A \cap B$ maka $A = B$.

18. Buktikan untuk himpunan A, B, dan C, bahwa
(a) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$
(b) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$
(c) jika $A \cap B \subseteq C$, maka $B - C \subseteq \overline{A}$

19. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Pada kondisi manakah pernyataan di bawah ini benar?
(a) $(A - B) \cap (A - C) = \varnothing$
(b) $(A - B) \oplus (A - C) = \varnothing$

20. *Successor* dari himpunan A didefinisikan sebagai $A \cup \{A\}$. Tentukan *successor* dari himpunan
(a) $\{1, 2, 3\}$ (b) $\varnothing$ (c) $\{\varnothing\}$ (d) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

21. Jika diketahui $(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$ dan $(A \cap \overline{C}) \subseteq (B \cap \overline{C})$, tunjukkan bahwa $A \subseteq B$.

22. Jika diketahui $A \cap B = A \cap C$, apakah berarti bahwa $B = C$?

23. Misalkan A himpunan mahasiswa tahun pertama, B himpunan mahasiswa tahun kedua, C himpunan mahasiswa Jurusan Matematika, D himpunan mahasiswa jurusan Teknik Informatika, E himpunan mahasiswa yang mengambil kuliah Matematika Diskrit, F himpunan mahasiswa yang menonton pertunjukan pantomim pasa Senin malam, G himpunan mahasiswa yang begadang sampai lewat tengah malam pada hari Senin malam. Nyatakan pernyataan berikut dalam notasi teori himpunan:
(a) Semua mahasiswa tahun kedua jurusan Teknik Informatika mengambil kuliah Matematika Diskrit.

http://www.pakteguh.com

(b) Hanya mereka yang mengambil kuliah Matematika Diskrit atau yang yang pergi nonton pertunjukan pantomim yang begadang sampai lewat tengah malam pada hari Senin malam.
(c) Mahasiswa yang mengambil kuliah Matematika Diskrit tidak ada yang pergi nonton pertunjukan pantomim pada Senin malam. (Penyebabnya adalah tugas pekerjaan rumah yang sangat banyak dalam kuliah Matematika Diskrit).
(d) Pertunjukan pantomim itu hanya untuk mahasiswa tahun pertama dan mahasiswa tahun kedua.
(e) Semua mahasiswa tahun kedua yang bukan dari Jurusan Matematika atau pun Jurusan Teknik Informatika pergi nonton pertunjukan pantomim.

24. Di antara bilangan bulat 1 sampai 300 (termasuk 1 dan 300 sendiri), berapa banyak yang tidak habis dibagi 3 atau 5?

25. Di antara bilangan bulat 1 - 300, berapa banyak bilangan yang habis dibagi 3 tetapi tidak habis dibagi 5 maupun 7?

26. Di antara 100 mahasiswa, 32 orang mempelajari matematika, 20 orang mempelajari fisika, 45 orang mempelajari biologi, 15 mempelajari matematika dan biologi, 7 mempelajari matematika dan fisika, 10 mempelajari fisika dan biologi, dan 30 tidak mempelajari satu pun di antara ketiga bidang tersebut.
(a) Hitunglah banyaknya mahasiswa yang mempelajari ketiga bidang tersebut.
(b) Hitunglah banyaknya mahasiswa yang mempelajari hanya satu di antara ketiga bidang tersebut.

27. Enam puluh ribu suporter sepakbola yang mendukung pertandingan di kandang sendiri membeli habis semua cindera mata untuk mobil mereka. Secara keseluruhan laku terjual 20000 stiker, 36000 bendera kecil, dan 12000 gantungan kuci. Kita diberitahu bahwa 52000 suporter membeli sedikitnya satu cendera mata dan tidak seorangpun membeli suatu cindera mata lebih dari satu. Selain itu, 6000 suporter membeli bendera kecil dan gantungan kunci, 9000 membeli bendera kecil dan stiker, dan 5000 membeli gantungan kunci dan stiker.
(a) Berapa banyak suporter yang membeli ketiga macam cindera mata di atas?
(b) Berapa banyak suporter yang membeli tepat satu cindera mata?

28. Di antara 50 mahasiswa di dalam kelas, 26 orang memperoleh nilai A dari ujian pertama dan 21 orang memperoleh nilai A dari ujian kedua. Jika 17 orang mahasiswa tidak memperoleh nilai A dari ujian pertama maupun ujian kedua, berapa banyak mahasiswa yang memperoleh dua kali nilai A dari kedua ujian itu?

http://www.pakteguh.com

29. Dalam suatu survey pada 60 orang, didapatkan bahwa 25 orang membaca majalah *Tempo*, 26 orang membaca majalah *Gatra*, dan 26 orang membaca majalah *Intisari*. Juga terdapat 9 orang yang membaca *Tempo*, dan *Intisari*, 11 orang membaca *Tempo* dan *Gatra*, 8 orang membaca *Gatra* dan *Intisari*, dan 8 orang tidak membaca majalah satupun.
Tentukan jumlah orang yang membaca ketiga majalah tersebut.
Tentukan jumlah orang yang benar-benar membaca satu majalah.

30. Tentukan semua partisi dari himpunan $B = \{\emptyset, 1, 2, \{2\}, \{\{4\}\}\}$.

31. Diketahui *multiset* $P = \{\ 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3\ \}$dan $Q = \{\ 0, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4\ \}$. Tentukan (a) $P \cup Q$ (b) $P \cap Q$ (c) $P - Q$ (d) $P + Q$

32. Salah satu kemungkinan mendefinisikan beda setangkup anta dua himpunan-ganda P dan Q, dilambangkan dengan $P \oplus Q$, ialah membuat multiplisitas setiap unsur di dalam $P \oplus Q$ sama dengan nilai mutlak selisih antara multiplisitas unsur tersebut di dalam P dan di dalam Q. Ketidaktaat-asasan (*inconsistency*) yang bagaimanakah yang mungkin timbul dengan definisi demikian ini? *Petunjuk*: perhatikan himpunan ganda $(P \oplus Q) \oplus R$ dan himpunan-ganda $P \oplus (Q \oplus R)$.

http://www.pakteguh.com