BAB 1

Logika

Benteng kehidupan yang terkuat adalah kebenaran.
(Anonim)

Materi Matematika Diskrit di dalam buku ini dimulai dari pokok bahasan logika. Logika merupakan studi penalaran (*reasoning*). Dalam Kamus Besar Bahasa Indonesia disebutkan definisi penalaran, yaitu cara berpikir dengan mengembangkan sesuatu berdasarkan akal budi dan bukan dengan perasaan atau pengalaman. Pelajaran logika difokuskan pada hubungan antara pernyataan-pernyataan (*statements*). Tinjau argumen berikut:

Semua pengendara sepeda motor memakai helm.
Setiap orang yang memakai helm adalah mahasiswa.
Jadi, semua pengendara sepeda motor adalah mahasiswa.

Meskipun logika tidak membantu menentukan apakah pernyataan-pernyataan tersebut benar atau salah, tetapi jika kedua pernyataan tersebut benar, maka penalaran dengan menggunakan logika membawa kita pada kesimpulan bahwa pernyataan

Semua pengendara sepeda motor adalah mahasiswa

juga benar.

Di dalam matematika, hukum-hukum logika menspesifikasikan makna dari pernyataan matematis. Hukum-hukum logika tersebut membantu kita untuk membedakan antara argumen yang valid dan tidak valid. Logika juga digunakan untuk membuktikan teorema-teorema di dalam matematika.

Logika pertama kali dikembangkan oleh filusuf Yunani, Aristoteles, sekitar 2300 tahun yang lalu. Saat ini, logika mempunyai aplikasi yang luas di dalam ilmu komputer, misalnya dalam bidang pemrograman, analisis kebenaran algoritma, kecerdasan buatan (*artificial intelligence*), perancangan komputer, dan sebagainya.

Bab 1 ini dimulai dengan definisi proposisi dan notasi yang digunakan untuk melambangkan proposisi. Selanjutnya dijelaskan pula cara mengkombinasikan proposisi majemuk dan membentuk tabel kebenarannya. Proposisi majemuk yang lain seperti implikasi dan bi-implikasi dibahas pada bagian akhir buku.

1.1 Proposisi

Di dalam matematika, tidak semua kalimat berhubungan dengan logika. Hanya kalimat yang bernilai benar atau salah saja yang digunakan dalam penalaran. Kalimat tersebut dinamakan **proposisi** (*preposition*).

DEFINISI 1.1. Proposisi adalah kalimat deklaratif yang bernilai benar (*true*) atau salah (*false*), tetapi tidak dapat sekaligus keduanya. Kebenaran atau kesalahan dari sebuah kalimat disebut nilai kebenarannya (*truth value*).

Tiga buah contoh berikut ini dapat mengilustrasikan kalimat mana yang merupakan proposisi dan mana yang bukan.

Contoh 1.1

Kalimat-kalimat berikut ini,

(a) 6 adalah bilangan genap.
(b) Soekarno adalah Presiden Indonesia yang pertama.
(c) $2 + 2 = 4$.
(d) Ibukota Provinsi Jawa Barat adalah Semarang.
(e) $12 \geq 19$.
(f) Kemarin hari hujan.
(g) Suhu di permukaan laut adalah 21 derajat Celcius.
(h) Pemuda itu tinggi.
(i) Kehidupan hanya ada di planet Bumi.

Semuanya merupakan proposisi. Proposisi a, b, dan c bernilai benar, tetapi proposisi d salah karena ibukota Jawa Barat seharusnya adalah Bandung dan proposisi e bernilai salah karena seharusnya $12 \leq 19$. Proposisi f sampai i memang tidak dapat langsung ditetapkan kebenarannya, namun satu hal yang pasti, proposisi-proposisi tersebut tidak mungkin benar dan salah sekaligus. Kita bisa menetapkan nilai proposisi tersebut benar atau salah. Misalnya, proposisi f bisa kita andaikan benar (hari kemarin memang hujan) atau salah (hari kemarin tidak hujan). Demikian pula halnya untuk proposisi g dan h. Proposisi i bisa benar atau salah, karena sampai saat ini belum ada ilmuwan yang dapat memastikan kebenarannya. ■

Contoh 1.2.

Kalimat-kalimat berikut ini,

(a) Jam berapa kereta api Argo Bromo tiba di Gambir?
(b) Serahkan uangmu sekarang!
(c) $x + 3 = 8$.
(d) $x > 3$.

bukan proposisi. Kalimat a adalah kalimat tanya, sedangkan kalimat b adalah kalimat perintah, keduanya tidak mempunyai nilai kebenaran. Dari Contoh 1.1, dan 1.2 di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa proposisi selalu dinyatakan sebagai kalimat berita, bukan sebagi kalimat tanya maupun kalimat perintah. Kalimat c dan d bukan proposisi karena kedua kalimat tersebut tidak dapat ditentukan benar maupun salah sebab keduanya mengandung peubah (variabel) yang tidak dispesifikasikan nilainya. Tetapi kalimat

"Untuk sembarang bilangan bulat $n \geq 0$, maka $2n$ adalah bilangan genap"

adalah proposisi yang bernilai benar karena kalimat tersebut merupakan cara lain untuk menyatakan bilangan genap. Begitu juga kalimat

$x + y = y + x$ untuk setiap x dan y bilangan riil

adalah proposisi karena kalimat tersebut merupakan cara lain untuk menyatakan hukum komutatif penjumlahan pada sistem bilangan riil. Dalam hal ini x dan y tidak perlu diberi suatu nilai sebab proposisi tersebut pasti benar untuk x dan y berapa saja. ■

Bidang logika yang membahas proposisi dinamakan **kalkulus proposisi** (*propositional calculus*) atau **logika proposisi** (*propositional logic*), sedangkan bidang logika yang membentuk proposisi pada pernyataan yang mengandung peubah seperti pada Contoh 1.2 c dan d di atas dibahas pada logika **kalkulus predikat** yang mana di luar cakupan buku ini.

Secara simbolik, proposisi biasanya dilambangkan dengan huruf kecil seperti p, q, r, ... Misalnya,

p : 6 adalah bilangan genap.

untuk mendefinisikan p sebagai proposisi "6 adalah bilangan genap". Begitu juga untuk

q : Soekarno adalah Presiden Indonesia yang pertama.
r : $2 + 2 = 4$.

dan sebagainya.

1.2 Mengkombinasikan Proposisi

Kita dapat membentuk proposisi baru dengan cara mengkombinasikan satu atau lebih proposisi. Operator yang digunakan untuk mengkombinasikan proposisi disebut **operator logika**. Operator logika dasar yang digunakan adalah **dan** (*and*), **atau** (*or*), dan **tidak** (*not*). Dua operator pertama dinamakan operator **biner** karena operator tersebut mengoperasikan dua buah proposisi, sedangkan operator ketiga dinamakan operator **uner** karena ia hanya membutuhkan satu buah proposisi.

Proposisi baru yang diperoleh dari pengkombinasian tersebut dinamakan **proposisi majemuk** (*compound proposition*). Proposisi yang bukan merupakan kombinasi proposisi lain disebut **proposisi atomik**. Dengan kata lain, proposisi majemuk disusun dari proposisi-proposisi atomik. Metode pengkombinasian proposisi dibahas oleh matematikawan Inggris yang bernama George Boole pada tahun 1854 di dalam bukunya yang terkenal, *The Laws of Thought*. Proposisi majemuk ada tiga macam, yaitu konjungsi, disjungsi, dan ingkaran. Ketiganya didefinisikan sebagai berikut:

DEFINISI 1.2. Misalkan p dan q adalah proposisi. **Konjungsi** (*conjunction*) p dan q, dinyatakan dengan notasi $p \wedge q$, adalah proposisi

p dan q

Disjungsi (*disjunction*) p dan q, dinyatakan dengan notasi $p \vee q$, adalah proposisi

p atau q

Ingkaran atau (*negation*) dari p, dinyatakan dengan notasi $\sim p$, adalah proposisi

tidak p

Catatan:

1. *Beberapa literatur menggunakan notasi "$\neg p$", "$\bar{p}$", atau "**not** p" untuk menyatakan ingkaran.*
2. *Kata "tidak" dapat dituliskan di tengah pernyataan. Jika kata "tidak" diberikan di awal pernyataan maka ia biasanya disambungkan dengan kata "benar" menjadi "tidak benar". Kata "tidak" dapat juga diganti dengan "bukan" bergantung pada rasa bahasa yang tepat untuk pernyataan tersebut.*

Berikut contoh-contoh proposisi majemuk dan notasi simboliknya. Ekspresi proposisi majemuk dalam notasi simbolik disebut juga **ekspresi logika**.

Contoh 1.3

Diketahui proposisi-proposisi berikut:

p : Hari ini hujan
q : Murid-murid diliburkan dari sekolah

maka

$p \wedge q$: Hari ini hujan dan murid-murid diliburkan dari sekolah
$p \vee q$: Hari ini hujan atau murid-murid diliburkan dari sekolah
$\sim p$: Tidak benar hari ini hujan
(atau dalam kalimat lain yang lebih lazim: Hari ini *tidak* hujan)

■

Contoh 1.4

Diketahui proposisi-proposisi berikut:

p : Hari ini hujan
q : Hari ini dingin

maka

$q \vee \sim p$: Hari ini dingin atau hari ini tidak hujan
atau, dengan kata lain, "Hari ini dingin atau tidak hujan"

$\sim p \wedge \sim q$: Hari ini tidak hujan dan hari ini tidak dingin
atau, dengan kata lain, "Hari ini tidak hujan maupun dingin"

$\sim(\sim p)$: Tidak benar hari ini tidak hujan
atau dengan kata lain, "Salah bahwa hari ini tidak hujan"

■

Contoh 1.5

Diketahui proposisi-proposisi berikut:

p : Pemuda itu tinggi
q : Pemuda itu tampan

Nyatakan proposisi berikut (asumsikan "Pemuda itu pendek" berarti "Pemuda itu tidak tinggi") ke dalam ekspresi logika (notasi simbolik):

(a) Pemuda itu tinggi dan tampan
(b) Pemuda itu tinggi tapi tidak tampan
(c) Pemuda itu tidak tinggi maupun tampan
(d) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek atau tidak tampan
(e) Pemuda itu tinggi, atau pendek dan tampan
(f) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek maupun tampan

Penyelesaian:

(a) $p \wedge q$
(b) $p \wedge \sim q$ (catatan: kata "tetapi" bermakna sama dengan "dan")
(c) $\sim p \wedge \sim q$
(d) $\sim(\sim p \vee \sim q)$
(e) $p \vee (\sim p \wedge q)$
(f) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

■

1.3 Tabel Kebenaran

Nilai kebenaran dari proposisi majemuk ditentukan oleh nilai kebenaran dari proposisi atomiknya dan cara mereka dihubungkan oleh operator logika.

DEFINISI 1.3 Misalkan p dan q adalah proposisi.
(a) Konjungsi $p \wedge q$ bernilai benar jika p dan q keduanya benar, selain itu nilainya salah
(b) Disjungsi $p \vee q$ bernilai salah jika p dan q keduanya salah, selain itu nilainya benar
(c) Negasi p, yaitu $\sim p$, bernilai benar jika p salah, sebaliknya bernilai salah jika p benar.

Contoh 1.6

Misalkan

p : 17 adalah bilangan prima
q : bilangan prima selalu ganjil

jelas bahwa p bernilai benar dan q bernilai salah sehingga konjungsi

$p \wedge q$: 17 adalah bilangan prima dan bilangan prima selalu ganjil

adalah salah. ■

Satu cara yang praktis untuk menentukan nilai kebenaran proposisi majemuk adalah menggunakan tabel kebenaran (*truth table*). Tabel kebenaran menampilkan hubungan antara nilai kebenaran dari proposisi atomik. Tabel 1.1 menunjukkan tabel kebenaran untuk konjungsi, disjungsi, dan ingkaran. Pada tabel tersebut, T = *True* (benar), dan F = *False* (salah).

Tabel 1.1 Tabel kebenaran konjungsi, disjungsi, dan ingkaran

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	$\sim q$
T	F
F	T

Contoh 1.7

Jika p, q, dan r adalah proposisi. Bentuklah tabel kebenaran dari ekspresi logika

$$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r).$$

Penyelesaian:

Ada 3 buah proposisi atomik di dalam ekspresi logika dan setiap proposisi hanya mempunyai 2 kemungkinan nilai, sehingga jumlah kombinasi dari semua proposisi tersebut adalah $2 \times 2 \times 2 = 8$ buah. Tabel kebenaran dari proposisi $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$ ditunjukkan pada Tabel 1.2. ■

Tabel 1.2 Tabel kebenaran proposisi $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim q$	$\sim q \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	F	F

Proposisi majemuk dapat selalu bernilai benar untuk berbagai kemungkinan nilai kebenaran masing-masing proposisi atomiknya, atau selalu bernilai salah untuk berbagai kemungkinan nilai kebenaran masing-masing proposisi atomiknya Kondisi ini didefinisikan di dalam Definisi 1.4 berikut:

DEFINISI 1.4 Sebuah proposisi majemuk disebut **tautologi** jika ia benar untuk semua kasus, sebaliknya disebut **kontradiksi** jika ia salah untuk semua kasus.

Yang dimaksud dengan "semua kasus" di dalam Definisi 1.4 di atas adalah semua kemungkinan nilai kebenaran dari proposisi atomiknya. Proposisi tautologi dicirikan pada kolom terakhir pada tabel kebenarannya hanya memuat T. Proposisi kontradiksi dicirikan pada kolom terakhir pada tabel kebenaran hanya memuat F.

Contoh 1.8

Misalkan p dan q adalah proposisi. Proposisi majemuk $p \vee \sim(p \wedge q)$ adalah sebuah tautologi (Tabel 1.3) karena kolom terakhir pada tabel kebenarannya hanya memuat T, sedangkan $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ adalah sebuah kontradiksi (Tabel 1.4) karena kolom terakhir pada tabel kebenarannya hanya memuat F. ■

Tabel 1.3 $p \vee \sim(p \wedge q)$ adalah tautologi

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim(p \wedge q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

Tabel 1.4 $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ adalah kontradiksi

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

Adakalanya dua buah proposisi majemuk dapat dikombinasikan dalam berbagai cara namun semua kombinasi tersebut selalu menghasilkan tabel kebenaran yang sama. Kita mengatakan bahwa kedua proposisi majemuk tersebut ekivalen secara logika. Hal ini kita definisikan sebagai berikut:

DEFINISI 1.5 Dua buah proposisi majemuk, $P(p, q, ..)$ dan $Q(p, q, ..)$ disebut **ekivalen** secara logika, dilambangkan dengan $P(p, q, \ldots) \Leftrightarrow Q(p, q, \ldots)$ jika keduanya mempunyai tabel kebenaran yang identik.

Catatan:

Beberapa literatur menggunakan notasi "$\equiv$" untuk melambangkan ekivalen secara logika.

Menurut Definisi 1.5 terdapat banyak cara untuk menuliskan ekspresi logika, yang pada hakekatnya semua ekspresi logika tersebut mempunyai nilai kebenaran yang sama.

Contoh 1.9

Tabel 1.5 memperlihatkan tabel kebenaran untuk proposisi $\sim(p \wedge q)$ dan proposisi $\sim p \vee \sim q$. Kolom terakhir pada kedua tabel tersebut sama nilainya (yaitu F, T, T, T), sehingga kita katakan bahwa kedua proposisi tersebut ekivalen secara logika, atau ditulis sebagai $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$. Bentuk keekivalenan ini dikenal dengan nama Hukum **De Morgan.** ■

Tabel 1.5 $\sim(p \wedge q)$ ekivalen secara logika dengan $p \vee \sim q$

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

1.4 Disjungsi Eksklusif

Kata "atau" (*or*) dalam operasi logika digunakan dalam dua cara. Cara pertama, "atau" digunakan secara inklusif (*inclusive or*) yaitu dalam bentuk "*p* atau *q* atau keduanya". Artinya, disjungsi dengan operator "atau" bernilai benar jika salah satu dari proposisi atomiknya benar atau keduanya benar. Operator "atau" yang sudah kita bahas pada contoh-contoh di atas adalah yang dari jenis inklusif ini. Sebagai contoh, pernyataan

"Tenaga *IT* yang dibutuhkan harus menguasai Bahasa *C++* atau *Java*".

diartikan bahwa tenaga *IT* (*Information Technology*) yang diterima harus mempunyai kemampuan penguasaan salah satu dari Bahasa *Java* atau Bahasa *C++* atau kedua-duanya. Tabel kebenaran untuk "atau" secara inklusif adalah seperti pada tabel 1.1 yang sudah dijelaskan di atas.

Cara kedua, "atau" digunakan secara eksklusif (*exclusive or*) yaitu dalam bentuk "*p* atau *q* tetapi bukan keduanya". Artinya, disjungsi *p* dengan *q* bernilai benar hanya jika salah satu proposisi atomiknya benar (tapi bukan keduanya). Sebagai contoh, pada sebuah ajang perlombaan pemenang dijanjikan mendapat hadiah. Hadiahnya adalah sebuah pesawat televisi 20 inchi. Jika pemenang tidak menginginkan membawa TV, panitia menggantinya dengan senilai uang.. Proposisi untuk masalah ini ditulis sebagai berikut:

"Pemenang lomba mendapat hadiah berupa TV atau uang"

Kata "atau" pada disjungsi di atas digunakan secara eksklusif. Artinya, hadiah yang dapat dibawa pulang oleh pemenang hanya salah satu dari uang atau TV tetapi tidak bisa keduanya

Khusus untuk disjungsi eksklusif kita menggunakan operator logika *xor*, untuk membedakannya dengan *inclusive or*, yang definisinya adalah sebagai berikut:

DEFINISI 1.5. Misalkan p dan q adalah proposisi. *Exclusive or* p dan q, dinyatakan dengan notasi $p \oplus q$, adalah proposisi yang bernilai benar bila hanya salah satu dari p dan q benar, selain itu nilainya salah.

Tabel kebenaran untuk operasi *exclusive or* ditunjukkan pada Tabel 1.6. Dari tabel tersebut dapat dibaca proposisi $p \oplus q$ hanya benar jika salah satu, tapi tidak keduanya, dari proposisi atomiknya benar.

Tabel 1.6 Tabel kebenaran *exclusive or*

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

1.5 Hukum-hukum Logika Proposisi

Proposisi, dalam kerangka hubungan ekivalensi logika, memenuhi sifat-sifat yang dinyatakan dalam sejumlah hukum pada Tabel 1.7. Beberapa hukum tersebut mirip dengan hukum aljabar pada sistem bilangan riil, misalnya $a(b + c) = ab + bc$, yaitu hukum distributif, sehingga kadang-kadang hukum logika proposisi dinamakan juga **hukum-hukum aljabar proposisi.**

Tabel 1.7 Hukum-hukum logika (atau hukum-hukum aljabar proposisi)

1. Hukum identitas: (i) $p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$ (ii) $p \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow p$	2. Hukum *null*/dominasi: (i) $p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$ (ii) $p \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$
3. Hukum negasi: (i) $p \vee \sim p \Leftrightarrow \mathbf{T}$ (ii) $p \wedge \sim p \Leftrightarrow \mathbf{F}$	4. Hukum idempoten: (i) $p \vee p \Leftrightarrow p$ (ii) $p \wedge p \Leftrightarrow p$

5. Hukum involusi (negasi ganda): $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): (i) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ (ii) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
7. Hukum komutatif: (i) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ (ii) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	8. Hukum asosiatif: (i) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ (ii) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
9. Hukum distributif: (ii $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (ii) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	10. Hukum De Morgan: (i) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ (ii) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Hukum-hukum logika di atas bermanfaat untuk membuktikan keekivalenan dua buah proposisi. Selain menggunakan tabel kebenaran, keekivalenan dapat dibuktikan dengan hukum-hukum logika, khususnya pada proposisi majemuk yang mempunyai banyak proposisi atomik. Bila suatu proposisi majemuk mempunyai n buah porposisi atomik, maka tabel kebenarannya terdiri dari 2^n baris. Untuk n yang besar jelas tidak praktis menggunakan tabel kebenaran, misalnya untuk $n = 10$ terdapat 2^{10} baris di dalam tabel kebenarannya.

Contoh 1.10

Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekivalen secara logika.

Penyelesaian:

$p \vee \sim(p \vee q) \Leftrightarrow p \vee (\sim p \wedge \sim q)$	(Hukum De Mogran)
$\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)$	(Hukum distributif)
$\Leftrightarrow \mathrm{T} \wedge (p \vee \sim q)$	(Hukum negasi)
$\Leftrightarrow p \vee \sim q$	(Hukum identitas) ■

Contoh 1.11

Buktikan hukum penyerapan: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Penyelesaian:

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee \mathrm{F}) \wedge (p \vee q)$	(Hukum Identitas)
$\Leftrightarrow p \vee (\mathrm{F} \wedge q)$	(Hukum distributif)
$\Leftrightarrow p \vee \mathrm{F}$	(Hukum *Null*)
$\Leftrightarrow p$	(Hukum Identitas) ■

1.6 Operasi Logika di dalam Komputer

Bahasa pemrograman umumnya menyediakan tipe data ***boolean*** untuk data yang bertipe logika, misalnya tipe `boolean` dalam Bahasa Pascal, `logical` dalam Bahasa Fortran, dan sebagainya. Tipe data *boolean* hanya mempunyai dua buah konstanta nilai saja, yaitu *true* dan *false*. Peubah yang bertipe boolean disebut **peubah boolean** (*boolean variable*). Nilai peubah tersebut hanya *true* atau *false*.

Operasi *boolean* sering dibutuhkan dalam pemrograman. Operasi *boolean* dinyatakan dalam ekspresi logika (atau dinamakan juga ekspresi boolean). Operator *boolean* yang digunakan adalah *AND*, *OR*, *XOR*, dan *NOT*. Ekspresi *booelan* tersebut hanya menghasilkan salah satu dari dua nilai, *true* atau *false*. Misalkan `x1`, `x2`, `x3`, dan `x4` adalah peubah *booelan* dalam Bahasa Pascal, maka ekspresi *boolean* di bawah ini adalah valid:

```
x1 and x2
x1 or (not(x2 and x3))
```

yang bersesuaian dengan ekspresi logika

$$x1 \wedge x2$$
$$x1 \vee \sim(x2 \wedge x3)$$

Operasi lain dalam pemrograman yang bersesuaian dengan operasi logika adalah **operasi bit**. Komputer merepresentasikan informasi dengan menggunakan bit. Sebuah bit hanya mempunyai dua nilai, yaitu 1 atau 0. Sebuah bit dapat digunakan untuk merepresentasikan nilai kebenaran, yaitu kita menyatakan 1 untuk merepresentasikan *true* (T) dan 0 untuk merepresentasikan *false* (F). Kita menggunakan notasi $\sim$, $\wedge$, $\vee$, dan $\oplus$ masing-masing untuk melambangkan operator *NOT*, *AND*, *OR*, dan *XOR*. Dengan demikian, operasi bit

$$\sim 0$$
$$1 \wedge 0$$
$$0 \vee 0$$
$$1 \oplus 0$$

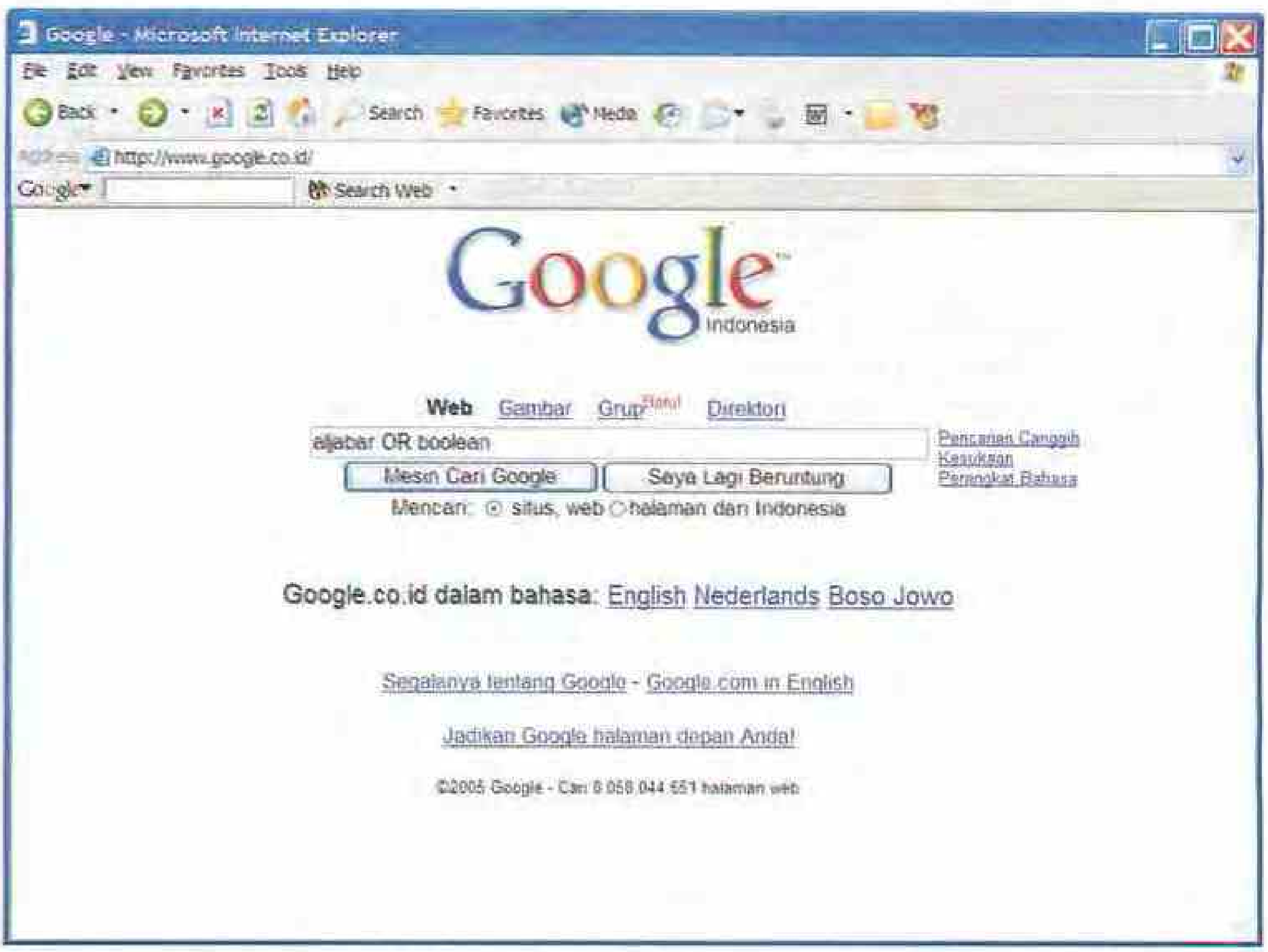
bersesuaian dengan operasi logika

$$\sim \text{F}$$
$$\text{T} \wedge \text{F}$$
$$\text{F} \vee \text{F}$$
$$\text{T} \oplus \text{F}$$

Operasi bit dapat diperluas untuk rangkaian bit yang panjangnya tetap, misalnya 10011011 dioperasikan dengan 01010101. Operasi ini dinamakan *bitwise*, dan operasi semacam ini digunakan untuk memanipulasi informasi. Dua buah rangkaian bit yang panjangnya sama dapat dioperasikan dengan 3 operasi *bitwise*, yaitu *bitwise AND*, *bitwise OR*, dan *bitwise XOR*. Jika dua buah rangkaian bit dioperasikan dengan salah satu dari operator *bitwise* di atas, maka setiap bit yang bersesuaian pada masing-masing *operand* dikenai operasi yang sama. Misalnya,

10011011	
01010101	
00010001	*bitwise AND*
11011111	*bitwise OR*
11001110	*bitwise XOR*

Aplikasi operasi logika lainnya ditemukan pada mesin pencarian (*search engine*) di internet. Salah satu mesin pencarian yang terkenal dan banyak digunakan orang adalah *Google* (*www.google.com*). Tersedia juga *Google* versi Bahasa Indonesia (*www.google.co.id*). Antarmuka *Google* diperlihatkan pada Gambar 1.1. Mesin pencarian adalah aplikasi yang sangat penting di internet, karena mesin pencarian mampu menampilkan semua informasi yang kita butuhkan dalam waktu yang cepat. Hasil pencarian adalah halaman *web* yang berkaitan dengan *term* yang kita ketikkan.



Gambar 1.1 **Antarmuka mesin pencarian *Google*.**

Operator logika AND, OR, dan NOT dapat digunakan sebagai kata hubung logika di antara *term-term* yang dicari. Misalkan kita ingin mencari semua halaman *web* yang berkaitan dengan "aljabar" atau "boolean", maka *term* yang kita cari ditulis sebagai

aljabar OR boolean

Hasilnya adalah semua halaman yang mengandung salah satu kata "aljabar", "boolean", atau kedua-duanya. Bila kita ingin mencari semua halaman web yang tepat mengandung kata "aljabar" dan "boolean" sekaligus, maka *term* yang kita ketikkan di dalam mesin pencarian ditulis sebagai

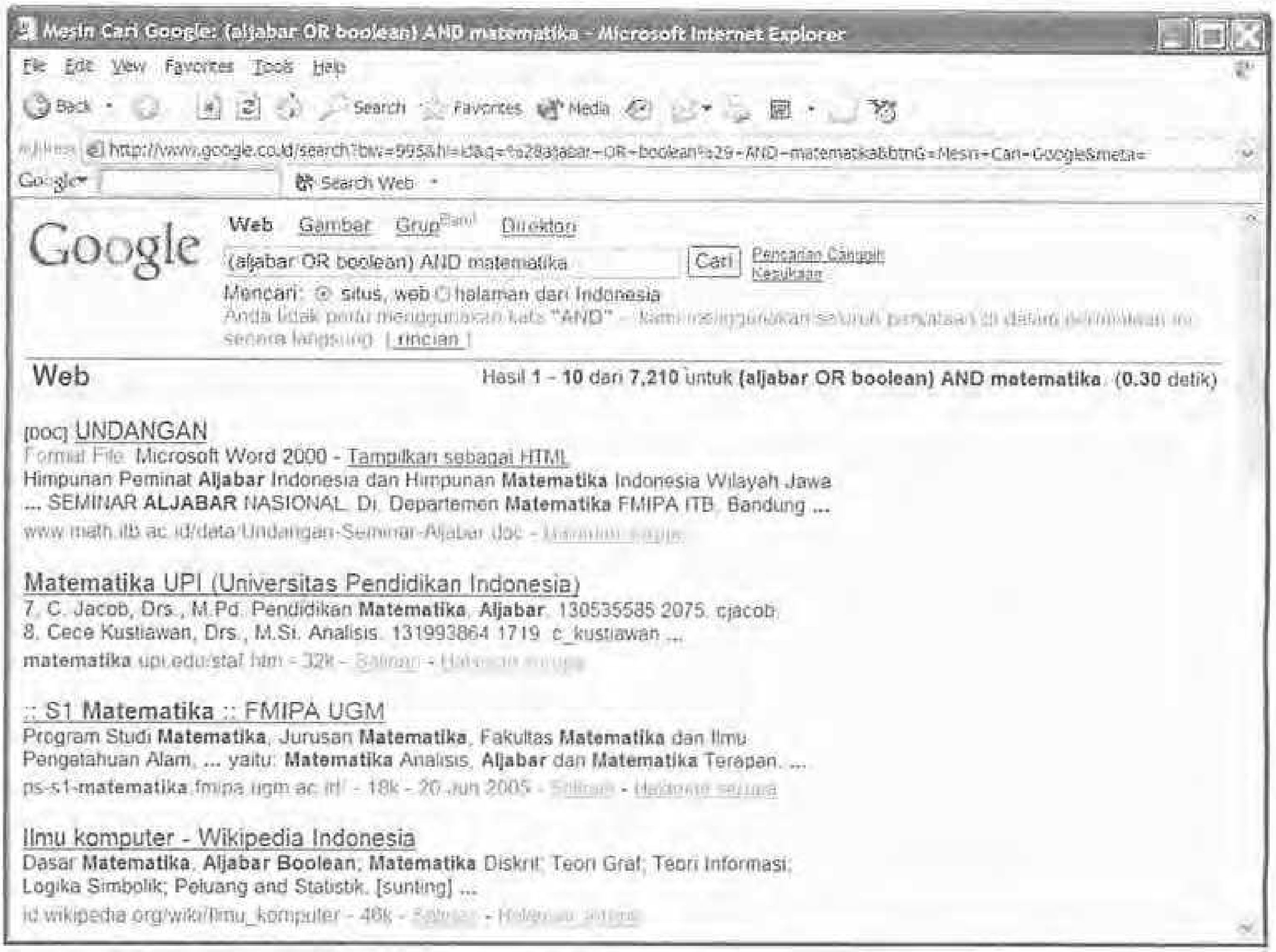
aljabar AND boolean

Hasilnya adalah semua halaman yang mengandung dua kata "aljabar" dan "boolean" sekaligus. (catatan: beberapa mesin pencarian tidak memerlukan penulisan AND secara eksplisit).

Bila kita ingin mencari semua halaman *web* yang berkaitan dengan dengan topik "aljabar" atau "boolean" dan untuk setiap topik tersebut harus berkaitan dengan "matematika", maka *term* dituliskan sebagai

(aljabar OR boolean) AND matematika

Hasilnya adalah semua halaman yang mengandung tepat kata "aljabar" dan "matematika", atau yang mengandung tepat kata "boolean" dan "matematika", atau yang sekaligus mengandung "aljabar", "boolean", dan "matematika". Gambar 1.2 memperlihatkan hasil pencarian untuk *term* di atas (pencarian dilakukan pada Tanggal 22 Juni 2005 pukul 11.00 WIB. Perhatikan bahwa informasi di internet dapat berubah setiap saat (*up to date*), jadi mungkin saja pada hari ini hasil pencarian sangat berbeda dengan hasil pencarian pada tanggal 22 Juni 2005).



Gambar 1.2 Hasil pencarian untuk *term* "(aljabar OR boolean) AND matematika"

1.7 Proposisi Bersyarat (Implikasi)

Selain dalam bentuk konjungsi, disjungsi, dan negasi, proposisi majemuk juga dapat muncul berbentuk "jika p, maka q", seperti pada contoh-contoh berikut:

a. Jika adik lulus ujian, maka ia mendapat hadiah dari ayah.
b. Jika suhu mencapai 80°C, maka alarm berbunyi.
c. Jika anda tidak mendaftar ulang, maka anda dianggap mengundurkan diri

Pernyataan berbentuk "jika p, maka q" semacam itu disebut **proposisi bersyarat** atau **kondisional** atau **implikasi**.

DEFINISI 1.6. Misalkan p dan q adalah proposisi. Proposisi majemuk "jika p, maka q" disebut proposisi bersyarat (implikasi) dan dilambangkan dengan

$$p \rightarrow q$$

Proposisi p disebut **hipotesis** (atau **antesenden** atau **premis** atau **kondisi**) dan proposisi q disebut **konklusi** (atau **konsekuen**).

Tabel kebenaran implikasi ditunjukkan pada Tabel 1.8. Catatlah bahwa implikasi $p \rightarrow q$ hanya salah jika p benar tetapi q salah, selain itu implikasi bernilai benar. Tidak sukar memahami mengapa tabel kebenaran implikasi demikian. Hal ini dijelaskan dengan contoh analogi berikut: Misalkan dosen anda berkata kepada mahasiswanya di dalam kelas "Jika nilai ujian akhir anda 80 atau lebih, maka anda akan mendapat nilai A untuk kuliah ini". Apakah dosen anda mengatakan kebenaran atau dia berbohong? Tinjau empat kasus berikut ini:

Kasus 1: Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) dan anda mendapat nilai A untuk kuliah tersebut(konklusi benar). Pada kasus ini, pernyataan dosen anda benar.

Kasus 2: Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) tetapi anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah). Pada kasus ini, dosen anda berbohong (pernyataannya salah).

Kasus 3: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda mendapat nilai A (konklusi benar). Pada kasus ini, dosen anda tidak dapat dikatakan salah (Mungkin ia melihat kemampuan anda secara rata-rata bagus sehingga ia tidak ragu memberi nilai A).

Kasus 4: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah). Pada kasus ini dosen anda benar.

Tabel 1.8 Tabel kebenaran implikasi

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Di dalam bahasa alami (bahasa percakapan manusia), seperti Bahasa Indonesia dan Bahasa Inggris, terdapat hubungan sebab-akibat antara hipotesis dengan konklusi, misalnya pada implikasi

"Jika suhu mencapai 80°C, maka alarm berbunyi."

Implikasi seeprti ini adalah normal dalam Bahasa Indonesia. Tetapi, dalam penalaran matematik, kita memandang implikasi lebih umum daripada implikasi dalam bahasa alami. Konsep matematik mengenai implikasi independen dari hubungan sebab-akibat antara hipotesis dan konklusi. Definisi kita mengenai implikasi adalah pada nilai kebenarannya, bukan didasarkan pada penggunaan bahasa [ROS03]. Misalnya pada implikasi

"Jika Paris adalah ibukota Perancis, maka $1 + 1 = 2$"

Implikasi di atas tetap valid secara matematis meskipun tidak ada kaitan antara Paris sebagai ibukota Perancis dengan $1 + 1 = 2$. Implikasi tersebut bernilai benar karena hipotesis benar (Paris ibukota Perancis adalah benar) dan konklusi juga benar ($1 + 1 = 2$ adalah benar). Implikasi

"Jika Paris adalah ibukota Perancis, maka $1 + 1 = 3$"

bernilai salah karena hipotesis benar tetapi $1 + 1 = 3$ salah.

Implikasi $p \rightarrow q$ memainkan peranan penting dalam penalaran. Implikasi ini tidak hanya diekspresikan dalam pernyataan standard "jika p, maka q" tetapi juga dapat diekspresikan dalam berbagai cara, antara lain:

(a) Jika p, maka q	(*if* p, *then* q)
(b) Jika p, q	(*if* p, q)
(c) p mengakibatkan q	(p *implies* q)
(d) q jika p	(q *if* p)
(e) p hanya jika q	(p *only if* q)
(f) p syarat cukup agar q	(p *is sufficient for* q)
(g) q syarat perlu bagi p	(q *is necessary for* p)
(i) q bilamana p	(q *whenever* p)

Contoh-contoh berikut memperlihatkan implikasi dalam berbagai ekspresi serta bagaimana mengubah berbagai bentuk implikasi menjadi bentuk standard "jika p, maka q".

Contoh 1.12

Proposisi-proposisi berikut adalah implikasi dalam berbagai bentuk:
(a) Jika hari hujan, maka tanaman akan tumbuh subur.
(b) Jika tekanan gas diperbesar, mobil melaju kencang.
(c) Es yang mencair di kutub mengakibatkan permukaan air laut naik.
(d) Orang itu mau berangkat jika ia diberi ongkos jalan.
(e) Ahmad bisa mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal hanya jika ia sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.
(f) Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api dari rokok.
(g) Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.
(h) Banjir bandang terjadi bilamana hutan ditebangi. ■

Contoh 1.13

Ubahlah proposisi c sampai h di dalam Contoh 1.12 ke dalam bentuk proposisi "jika p, maka q ".

Penyelesaian:

(c) Jika es mencair di kutub, maka permukaan air laut naik.
(d) Jika orang itu diberi ongkos jalan, maka ia mau berangkat.
(e) Jika Ahmad mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal, maka ia sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.
(f) Pernyataan yang diberikan ekivalen dengan "Percikan api dari rokok adalah syarat cukup untuk membuat pom bensin meledak" atau "Jika api memercik dari rokok maka pom bensin meledak"
(g) Pernyataan yang diberikan ekivalen dengan "Mengontrak pemain asing kenamaan adalah syarat perlu untuk Indonesia agar ikut Piala Dunia" atau "Jika Indonesia ikut Piala Dunia maka Indonesia mengontrak pemain asing kenamaan".
(h) Jika hutan-hutan ditebangi, maka banjir bandang terjadi. ■

Contoh 1.14

Misalkan

x : Anda berusia 17 tahun
y : Anda dapat memperoleh SIM

Nyatakan preposisi berikut ke dalam notasi implikasi:

(a) Hanya jika anda berusia 17 tahun maka anda dapat memperoleh SIM.
(b) Syarat cukup agar anda dapat memperoleh SIM adalah anda berusia 17 tahun.
(c) Syarat perlu agar anda dapat memperoleh SIM adalah anda berusia 17 tahun.
(d) Jika anda tidak dapat memperoleh SIM maka anda tidak berusia 17 tahun.
(e) Anda tidak dapat memperoleh SIM bilamana anda belum berusia 17 tahun.

Penyelesaian:

(a) Pernyataan yang diberikan ekivalen dengan "Anda dapat memperoleh SIM hanya jika anda berusia 17 tahun". Ingat kembali bahwa $p \rightarrow q$ bisa dibaca "p hanya jika q". Jadi, pernyataan yang diberikan dilambangkan dengan $y \rightarrow x$.
(b) Pernyataan yang diberikan ekivalen dengan "Anda berusia 17 tahun adalah syarat cukup untuk dapat memperoleh SIM". Ingat kembali bahwa $p \rightarrow q$ bisa dibaca "p syarat cukup untuk q". Jadi, pernyataan yang diberikan dilambangkan dengan $x \rightarrow y$.
(c) Pernyataan yang diberikan ekivalen dengan "Anda berusia 17 tahun adalah syarat perlu untuk dapat memperoleh SIM". Ingat kembali bahwa $p \rightarrow q$ bisa dibaca "q syarat perlu untuk q". Jadi, pernyataan yang diberikan dilambangkan dengan $y \rightarrow x$.
(d) $\sim y \rightarrow \sim x$
(e) Ingat kembali bahwa $p \rightarrow q$ bisa dibaca "q bilamana p". Jadi, pernyataan yang diberikan dilambangkan dengan $\sim x \rightarrow \sim y$. ■

Contoh 1.15

Tunjukkan bahwa $p \rightarrow q$ ekivalen secara logika dengan $\sim p \vee q$.

Penyelesaian:

Tabel 1.9 memperlihatkan bahwa memang benar $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$. Dengan kata lain, pernyataan "Jika p maka q" ekivalen secara logika dengan "Tidak p atau q". ■

Tabel 1.9 Tabel kebenaran $p \rightarrow q$ dan $\sim p \vee q$.

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Contoh 1.16

Tentukan ingkaran (negasi) dari $p \rightarrow q$.

Penyelesaian:

Dari Contoh 1.15 sudah ditunjukkan bahwa $p \rightarrow q$ ekivalen secara logika dengan $\sim p \vee q$. Gunakan hukum DeMorgan untuk menentukan ingkaran dari $p \rightarrow q$:

$$\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim(\sim p) \wedge \sim q \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$ ■

Contoh 1.17

Dua pedagang barang kelontong mengeluarkan moto jitu untuk menarik pembeli. Pedagang pertama mengumbar moto "Barang bagus tidak murah" sedangkan pedagang kedua mempunyai moto "Barang murah tidak bagus". Apakah kedua moto pedagang tersebut menyatakan hal yang sama?

Penyelesaian:

Untuk memeriksa apakah kedua moto tersebut sama, kita perlu membandingkan tabel kebenaran keduanya. Misalkan p menyatakan proposisi "Barang itu bagus" sedangkan q menyatakan "Barang itu murah". Maka, moto pedagang pertama dapat ditulis sebagai "Jika barang itu bagus maka barang itu tidak murah" atau $p \rightarrow \sim q$, sedangkan moto kedua dapat ditulis sebagai "Jika barang itu murah maka barang itu tidak bagus" atau $q \rightarrow \sim p$. Tabel kebenaran untuk proposisi $p \rightarrow \sim q$ dan proposisi $q \rightarrow \sim p$ ditunjukkan pada Tabel 1.10. Dari tabel tersebut dapat dilihat ternyata nilai kebenaran proposisi $p \rightarrow \sim q$ dan proposisi $q \rightarrow \sim p$ sama, dengan kata lain $p \rightarrow \sim q \Leftrightarrow q \rightarrow \sim p$. Jadi kita dapat menyimpulkan bahwa kedua moto tersebut menyatakan hal yang sama. ■

Tabel 1.10 Tabel kebenaran $p \rightarrow \sim q$ dan $q \rightarrow \sim p$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow \sim q$	$q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

Banyak orang yang bingung mengapa bentuk "*p* hanya jika *q*" sama dengan "jika *p*, maka *q*". Untuk menjelaskan hal ini kita harus mengingat bahwa "*p* hanya jika *q*" menyatakan bahwa *p* tidak dapat benar bila *q* salah. Dengan kata lain, pernyataan "*p* hanya jika *q*" salah jika *p* benar, tetapi *q* salah. Bila *p* salah, *q* dapat salah satu dari benar atau salah, karena pernyataan tesrebut tidak menyatakan apa-apa tentang nilai kebenaran *q* [ROS03].

Implikasi dalam Bahasa Pemrograman

Struktur *if-then* yang digunakan pada kebanyakan bahasa pemrograman berbeda dengan implikasi *if-then* yang digunakan dalam logika. Struktur *if-then* dalam bahasa pemrograman berbentuk

if *c* **then** *S*

yang dalam hal ini *c* adalah sebuah ekspresi logika yang menyatakan syarat atau kondisi, sedangkan *S* berupa satu atau lebih pernyataan. Ketika program dieksekusi dan menjumpai pernyataan *if-then*, *S* dieksekusi jika *c* benar, tetapi *S* tidak dieksekusi jika *c* salah.

Pernyataan *if-then* dalam bahasa pemrograman bukan proposisi karena tidak ada korespondensi antara pernyataan tersebut dengan operator implikasi ($\rightarrow$). Penginterpretasi bahasa pemrograman (disebut *interpreter* atau *compiler*) tidak melakukan penilaian kebenaran pernyataan *if-then* secara logika. *Interpreter* hanya memeriksa kebenaran kondisi *c*, jika *c* benar maka *S* dieksekusi, sebaliknya jika *c* salah maka *S* tidak dieksekusi. Sebagai contoh, perhatikan Contoh 1.18 berikut ini.

Contoh 1.18

Misalkan di dalam sebuah program yang ditulis dalam Bahasa Pascal terdapat pernyataan berikut:

if $x > y$ **then** $y := x + 10$;

(simbol := menyatakan operator pengisian nilai, yaitu nilai ekspresi di ruas kanan simbol := diisikan ke dalam peubah di ruas kiri simbol :=). "$x > y$" adalah ekspresi logika yang nilainya benar atau salah bergantung pada nilai x dan y, sedangkan $y := x + 10$ adalah sebuah pernyataan aritmetika yang akan dieksekusi jika ekspresi logika $x > y$ benar.

Berapa nilai y setelah pelaksanaan pernyataan *if-then* di atas jika nilai x dan y sebelum pernyataan tersebut adalah (i) $x = 2, y = 1$, dan (ii) $x = 3, y = 5$?

Penyelesaian:

(i) sebelum pernyataan *if-then* nilai $x = 2$ dan $y = 1$, maka ekspresi $x > y$ bernilai benar sehingga pernyataan $y := x + 10$ dilaksanakan, yang mengakibatkan nilai y sekarang menjadi $y = 2 + 10 = 12$.

(ii) sebelum pernyataan *if-then* nilai $x = 3$ dan $y = 5$, maka ekspresi $x > y$ bernilai salah sehingga pernyataan $y := x + 10$ tidak dilakukan. Dalam hal ini, nilai y tetap seperti sebelumnya, yaitu 5. ■

1.8 Varian Proposisi Bersyarat

Terdapat bentuk implikasi lain yang berkaitan dengan $p \to q$, yaitu proposisi sederhana yang merupakan varian dari implikasi. Ketiga variasi proposisi bersyarat tersebut adalah konvers, invers, dan kontraposisi dari proposisi asal $p \to q$.

Konvers (kebalikan)	:	$q \to p$
Invers	:	$\sim p \to \sim q$
Kontraposisi	:	$\sim q \to \sim p$

Tabel 1.11 memperlihatkan tabel kebenaran dari ketiga varian proposisi bersyarat tersebut. Dari tabel tersebut terlihat bahwa proposisi bersyarat $p \to q$ ekivalen secara logika dengan dengan kontraposisinya, $\sim q \to \sim p$.

Tabel 1.11 Tabel kebenaran implikasi, konvers, invers, dan kontraposisi

p	q	$\sim p$	$\sim q$	Implikasi $p \to q$	Konvers $q \to p$	Invers $\sim p \to \sim q$	Kontraposisi $\sim q \to \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Contoh 1.19

Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari pernyataan berikut

"Jika Amir mempunyai mobil, maka ia orang kaya"

Penyelesaian:

Konvers : Jika Amir orang kaya, maka ia mempunyai mobil
Invers : Jika Amir tidak mempunyai mobil, maka ia bukan orang kaya
Kontraposisi : Jika Amir bukan orang kaya, maka ia ia tidak mempunyai mobil ■

Contoh 1.20

Tentukan kontraposisi dari pernyataan:

(a) Jika dia bersalah maka ia dimasukkan ke dalam penjara.
(b) Jika 6 lebih besar dari 0 maka 6 bukan bilangan negatif.
(c) Iwan lulus ujian hanya jika ia belajar.
(d) Hanya jika ia tidak terlambat maka ia akan mendapat pekerjaan itu.
(e) Perlu ada angin agar layang-layang bisa terbang.
(f) Cukup hari hujan agar hari ini dingin.

Penyelesaian:

(a) Jika ia tidak dimasukkan ke dalam penjara, maka ia tidak bersalah.
(b) Jika 6 bilangan negatif, maka 6 tidak lebih besar dari 0.
(c) Pernyataan yang diberikan ekivalen dengan "Jika Iwan lulus ujian maka ia sudah belajar", sehingga kontraposisinya adalah "Jika Iwan tidak belajar maka ia tidak lulus ujian"
(d) Pernyataan yang diberikan ekivalen dengan "Jika ia mendapat pekerjaan itu maka ia tidak terlambat", sehingga kontraposisinya adalah "Jika ia terlambat maka ia tidak akan mendapat pekerjaan itu"
(e) Pernyataan yang diberikan dapat ditulis kembali menjadi "Ada angin adalah syarat perlu agar layang-layang bisa terbang" yang dalam hal ini ekivalen dengan "Jika layang-layang bisa terbang maka hari ada angin". Kontraposisinya adalah "Jika hari tidak ada angin, maka layang-layang tidak bisa terbang".
(f) Pernyataan yang diberikan dapat ditulis kembali menjadi "Hari hujan adalah syarat cukup agar hari ini dingin", yang dalam hal ini ekivalen dengan "Jika hari hujan maka hari ini dingin". Kontraposisinya adalah "Jika hari ini tidak dingin maka hari tidak hujan". ■

1.9 Bikondisional (Bi-implikasi)

Proposisi bersyarat penting lainnya adalah berbentuk "p jika dan hanya jika q" yang dinamakan **bikondisional** atau **bi-implikasi**. Definisi bikondisional dikemukakan sebagai berikut.

DEFINISI 1.7. Misalkan p dan q adalah proposisi. Proposisi majemuk "p jika dan hanya jika q" disebut bikondisional (bi-implikasi) dan dilambangkan dengan $p \leftrightarrow q$.

Pernyataan $p \leftrightarrow q$ adalah benar bila p dan q mempunyai nilai kebenaran yang sama, yakni $p \leftrightarrow q$ benar jika p dan q keduanya benar atau p dan q keduanya salah. Tabel kebenaran selengkapanya diperlihatkan pada Tabel 1.12.

Tabel 1.12 Tabel kebenaran bikondisional

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Perhatikan bahwa bikondisional $p \leftrightarrow q$ ekivalen secara logika dengan $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. Keekivalenan tersebut ditunjukkan pada Tabel 1.13. Dengan kata lain, pernyataan "p jika dan hanya jika q" dapat dibaca "Jika p maka q dan jika q maka p".

Tabel 1.13 $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

Terdapat sejumlah cara untuk menyatakan bikondisional $p \leftrightarrow q$ dalam kata-kata, yaitu:

(a) p jika dan hanya jika q. (*p if and only if q*)
(b) p adalah syarat perlu dan cukup untuk q. (*p is necessary and sufficient for q*)
(c) Jika p maka q, dan sebaliknya. (*if p then q, and conversely*)
(d) p *iff* q

Contoh 1.21

Proposisi majemuk berikut adalah bi-implikasi:
(a) $1 + 1 = 2$ jika dan hanya jika $2 + 2 = 4$.
(b) Syarat cukup dan syarat perlu agar hari hujan adalah kelembaban udara tinggi.
(c) Jika anda orang kaya maka anda mempunyai banyak uang, dan sebaliknya.
(d) Bandung terletak di Jawa Barat *iff* Jawa Barat adalah sebuah propinsi di Indonesia. ∎

Contoh 1.22

Tuliskan setiap proposisi berikut ke dalam bentuk "p jika dan hanya jika q":

(a) Jika udara di luar panas maka anda membeli es krim, dan jika anda membeli es krim maka udara di luar panas.
(b) Syarat cukup dan perlu agar anda memenangkan pertandingan adalah anda melakukan banyak latihan.
(c) Anda naik jabatan jika anda punya koneksi, dan anda punya koneksi jika anda naik jabatan.
(d) Jika anda lama menonton televisi maka mata anda lelah, begitu sebaliknya.
(e) Kereta api datang terlambat tepat pada hari-hari ketika saya membutuhkannya.

Penyelesaian:

(a) Anda membeli es krim jika dan hanya jika udara di luar panas.
(b) Anda melakukan banyak latihan adalah syarat perlu dan cukup untuk anda memenangkan pertandingan.
(c) Anda naik jabatan jika dan hanya jika anda punya koneksi.
(d) Mata anda lelah jika dan hanya jika anda lama menonton televisi.
(e) Kereta api datang terlambat jika dan hanya jika saya membutuhkan kereta hari itu. ■

Contoh 1.23

[LIU85] Sebuah pulau didiami oleh dua suku asli. Penduduk suku pertama selalu mengatakan hal yang benar, sedangkan penduduk dari suku lain selalu mengatakan kebohongan. Anda tiba di pulau ini dan bertanya kepada seorang penduduk setempat apakah di pulau tersebut ada emas atau tidak. Ia menjawab, "Ada emas di pulau ini jika dan hanya jika saya selalu mengatakan kebenaran". Apakah ada emas di pulau tersebut?

Penyelesaian:

Misalkan

p : saya selalu menyatakan kebenaran
q : ada emas di pulau ini

Pernyataan orang tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$p \leftrightarrow q$$

Tinjau dua kemungkinan kasus mengenai orang yang kita tanya tadi. Kasus 1, orang yang memberi jawaban adalah orang dari suku yang selalu menyatakan hal yang benar. Kasus 1, orang yang memberi jawaban adalah orang dari suku yang selalu menyatakan hal yang bohong. Kita analisis setiap kasus satu persatu sebagai berikut:

Kasus 1: orang tersebut selalu menyatakan hal yang benar. Ini berarti p benar, dan jawabannya terhadap pertanyaan kita pasti juga benar, sehingga pernyataan bi-implikasi tersebut bernilai benar. Dari Tabel 1.12 kita melihat bahwa bila p benar dan $p \leftrightarrow q$ benar, maka q harus benar. Jadi, ada emas di pulau tersebut adalah benar.

Kasus 2: orang tersebut selalu menyatakan hal yang bohong. Ini berarti p salah, dan jawabannya terhadap pertanyaan kita pasti juga salah, sehingga pernyataan bi-implikasi tersebut salah. Dari Tabel 1.12 kita melihat bahwa bila p salah dan $p \leftrightarrow q$ salah, maka q harus benar. Jadi, ada emas di pulau tersebut adalah benar.

Dari kedua kasus, kita selalu berhasil menyimpulkan bahwa ada emas di pulau tersebut, meskipun kita tidak dapat memastikan dari suku mana orang tersebut. ■

Tinjau kembali bahasan dua buah proposisi majemuk yang ekivalen secara logika. Kita juga dapat menggunakan definisi bikondisional untuk menyatakan keekivalenan. Ingatlah bahwa bikondisional bernilai benar jika kedua proposisi atomiknya mempunyai nilai kebenaran sama. Oleh karena itu, bila dua proposisi majemuk yang ekivalen di-bikondisionalkan, maka hasilnya adalah tautologi. Hal ini kita nyatakan pada definisi 1.8 berikut ini.

DEFINISI 1.8. Dua buah proposisi majemuk, $P(p, q, ..)$ dan $Q(p, q, ..)$ disebut ekivalen secara logika, dilambangkan dengan $P(p, q, ...) \Leftrightarrow Q(p, q, ...)$, jika $P \leftrightarrow Q$ adalah tautologi.

Definisi 1.8 di atas mudah dimengerti. Dari tabel kebenaran bikondisional pada Tabel 1.12 kita melihat bahwa bikondisional hanya benar jika kedua proposisi mempunyai nilai kebenaran yang sama. Jika dua proposisi majemuk mempunyai tabel kebenaran yang sama, maka bikondisional terhadap kedua proposisi majemuk tersebut menghasilkan nilai yang semuanya benar, dengan kata lain tautologi.

Contoh 1.23

Tinjau kembali Contoh 1.9 Kita sudah membuktikan bahwa $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$. Keekivalenan ini dapat juga kita tunjukkan dengan membikondisionalkan masing-masing proposisi majemuk tersebut. Dari Tabel 1.14 terlihat bahwa $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ tautologi, dengan kata lain $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$. ■

Tabel 1.14 $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ adalah tautologi

p	q	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

1.10 Inferensi

Misalkan kepada kita diberikan beberapa proposisi. Kita dapat menarik kesimpulan baru dari deret proposisi tersebut. Proses penarikan kesimpulan penarikan kesimpulan dari beberapa proposisi disebut **inferensi** (*inference*).

Di dalam kalkulus proposisi, terdapat sejumlah kaidah inferensi, beberapa di antaranya adalah sebagai berikut:

1. **Modus Ponen** atau ***law of detachment***

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$, yang dalam hal ini, p dan $p \rightarrow q$ adalah hipotesis, sedangkan q adalah konklusi. Kaidah modus ponen dapat ditulis dengan cara:

$$\begin{array}{ll} & p \rightarrow q \\ & p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Simbol $\therefore$ dibaca sebagai "jadi" atau "karena itu". Modus ponen menyatakan bahwa jika hipotesis p dan dan implikasi $p \rightarrow q$ benar, maka konklusi q benar.

Contoh 1.24

Misalkan implikasi "Jika 20 habis dibagi 2,maka 20 adalah bilangan genap" dan hipotesis "20 habis dibagi 2" keduanya benar. Maka menurut modus ponen, inferensi berikut:

> "Jika 20 habis dibagi 2, maka 20 adalah bilangan genap. 20 habis dibagi 2. Karena itu, 20 adalah bilangan genap"

adalah benar. Kita juga dapat menuliskan inferensi di atas sebagai:

Jika 20 habis dibagi 2, maka 20 adalah bilangan genap
20 habis dibagi 2

$\therefore$ 20 adalah bilangan genap

■

---

2. **Modus *Tollen***

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $[\sim q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \sim p$, Kaidah ini modus *tollens* ditulis dengan cara:

$$\begin{array}{ll} & p \rightarrow q \\ & \sim q \\ \hline \therefore & \sim p \end{array}$$

Contoh 1.25

Misalkan implikasi "Jika n bilangan ganjil, maka n^2 bernilai ganjil" dan hipotesis "n^2 bernilai genap" keduanya benar. Maka menurut modus tollen, inferensi berikut

Jika n bilangan ganjil, maka n^2 bernilai ganjil
n^2 bernilai genap
―――――――――――――――――
$\therefore$ n bukan bilangan ganjil

adalah benar. ■

3. Silogisme Hipotetis

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$. Kaidah silogisme ditulis dengan cara:

$$\begin{array}{ll} & p \rightarrow q \\ & q \rightarrow r \\ \hline \therefore & p \rightarrow r \end{array}$$

Contoh 1.26

Misalkan implikasi "Jika saya belajar dengan giat, maka saya lulus ujian" dan implikasi "Jika saya lulus ujian, maka saya cepat menikah" adalah benar. Maka menurut kaidah silogisme, inferensi berikut

Jika saya belajar dengan giat, maka saya lulus ujian
Jika saya lulus ujian, maka saya cepat menikah
―――――――――――――――――
$\therefore$ Jika saya belajar dengan giat, maka saya cepat menikah

adalah benar. ■

4. Silogisme Disjungtif

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q$. Kaidah silogisme disjungtif ditulis dengan cara:

$$\begin{array}{ll} & p \vee q \\ & \sim p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Contoh 1.27

Inferensi berikut:

"Saya belajar dengan giat atau saya menikah tahun depan.
Saya tidak belajar dengan giat. Karena itu, saya menikah tahun depan."

menggunakan kaidah silogisme disjungtif, atau dapat ditulis dengan cara:

Saya belajar dengan giat atau saya menikah tahun depan.
Saya tidak belajar dengan giat.
____
$\therefore$ Saya menikah tahun depan.

■

5. **Simplifikasi**

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $(p \wedge q) \rightarrow p$, yang dalam hal ini, p dan q adalah hipotesis, sedangkan p adalah konklusi. Kaidah simplifikasi ditulis dengan cara:

$$\begin{array}{ll} & p \wedge q \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

Contoh 1.28

Penarikan kesimpulan seperti berikut ini:

"Hamid adalah mahasiswa ITB dan mahasiswa Unpar. Karena itu, Hamid adalah mahasiswa ITB."

menggunakan kaidah simplifikasi, atau dapat juga ditulis dengan cara:

Hamid adalah mahasiswa ITB dan mahasiswa Unpar.
____
$\therefore$ Hamid adalah mahasiswa ITB.

Simplifikasi berikut juga benar:

"Hamid adalah mahasiswa ITB dan mahasiswa Unpar. Karena itu, Hamid adalah mahasiswa Unpar"

karena urutan proposisi di dalam konjungsi $p \wedge q$ tidak mempunyai pengaruh apa-apa. ■

6. **Penjumlahan**

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $p \to (p \vee q)$. Kaidah penjumlahan ditulis dengan cara:

$$\begin{array}{ll} & p \\ \hline \therefore & p \vee q \end{array}$$

Contoh 1.29

Penarikan kesimpulan seperti berikut ini:

> "Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit. Karena itu, Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit atau mengulang kuliah Algoritma."

menggunakan kaidah penjumlahan, atau dapat juga ditulis dengan cara:

Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit.

∴ Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit atau mengulang kuliah Algoritma

■

---

7. **Konjungsi**

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $((p) \wedge (q)) \to (p \wedge q)$. Kaidah konjungsi ditulis dengan cara:

$$\begin{array}{ll} & p \\ & q \\ \hline \therefore & p \wedge q \end{array}$$

Contoh 1.30

Penarikan kesimpulan seperti berikut ini:

> "Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit. Taslim mengulang kuliah Algoritma. Karena itu, Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit dan mengulang kuliah Algoritma"

menggunakan kaidah konjungsi, atau dapat juga ditulis dengan cara:

Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit.
Taslim mengulang kuliah Algoritma.

∴ Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit dan mengulang kuliah Algoritma.

■

1.11 Argumen

Argumen adalah suatu deret proposisi yang dituliskan sebagai

$$\begin{array}{ll} & p_1 \\ & p_2 \\ & \vdots \\ & \underline{p_n} \\ \therefore & q \end{array}$$

yang dalam hal ini, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ disebut hipotesis (atau premis), dan q disebut konklusi.

Argumen ada yang sahih (*valid*) dan palsu (*invalid*). Catatlah bahwa kata "valid" tidak sama maknanya dengan "benar" (*true*).

Definisi 1.9. Sebuah argumen dikatakan sahih jika konklusi benar bilamana semua hipotesisnya benar; sebaliknya argumen dikatakan palsu (*fallacy* atau *invalid*).

Jika argumen sahih, maka kadang-kadang kita mengatakan bahwa secara logika konklusi mengikuti hipotesis atau sama dengan memperlihatkan bahwa implikasi

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$$

adalah benar (yaitu, sebuah tautologi). Argumen yang palsu menunjukkan proses penalaran yang tidak benar.

Contoh 1.31

Perlihatkan bahwa argumen berikut:

> "Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang.
> Air laut surut setelah gempa di laut. Karena itu tsunami datang."

adalah sahih.

Penyelesaian:

Misalkan p adalah proposisi "Air laut surut setelah gempa di laut" dan q adalah proposisi "tsunami datang". Maka, argumen di dalam soal dapat ditulis sebagai:

$$\begin{array}{ll} & p \rightarrow q \\ & \underline{p} \\ \therefore & q \end{array}$$

Ada dua cara yang dapat digunakan untuk membuktikan kesahihan argumen ini. Keduanya menggunakan tabel kebenaran.

Cara 1: Bentuklah tabel kebenaran untuk p, q, dan $p \rightarrow q$

Tabel 1.15 Tabel kebenaran untuk p, q, dan $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$	
T	T	T	(baris 1)
T	F	F	(baris 2)
F	T	T	(baris 3)
F	F	T	(baris 4)

sahih jika semua hipotesisnya benar, maka konklusinya benar. Kita periksa apabila hipotesis p dan $p \rightarrow q$ benar, maka konklusi q juga benar sehingga argumen dikatakan benar. Periksa di Tabel 1.15, p dan $p \rightarrow q$ benar secara bersama-sama pada baris 1. Pada baris 1 ini q juga benar. Jadi, argumen yang berbentuk modus ponen di atas sahih.

Cara 2: Perlihatkan dengan tabel kebenaran apakah

$$[\, p \wedge (p \rightarrow q) \,] \rightarrow q$$

merupakan tautologi. Tabel 1.16 memperlihatkan bahwa $[\, p \wedge (p \rightarrow q) \,] \rightarrow q$ suatu tautologi, sehingga argumen dikatakan sahih.

Tabel 1.16 $[\, p \wedge (p \rightarrow q) \,] \rightarrow q$ adalah tautologi

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$[\, p \wedge (p \rightarrow q) \,] \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Perhatikanlah bahwa penarikan kesimpulan di dalam argumen ini menggunakan modus ponen. Jadi, kita kita juga telah memperlihatkan bahwa modus ponen adalah argmen yang sahih. ■

Contoh 1.32

Perlihatkan bahwa penalaran pada argumen berikut:

> "Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang.
> Tsunami datang. Jadi, air laut surut setelah gempa di laut"

tidak benar, dengan kata lain argumennya palsu.

Penyelesaian:

Argumen di atas berbentuk

$$\begin{array}{rl} & p \rightarrow q \\ & q \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

Dari Tabel 1.15 pada Contoh 1.31 tampak bahwa hipotesis q dan $p \rightarrow q$ benar pada baris ke-3, tetapi pada baris 3 ini konklusi p salah. Jadi, argumen tersebut tidak sahih atau palsu, sehingga penalaran menjadi tidak benar.

Kita juga bisa menunjukkan dengan Tabel 1.17 bahwa $[\, q \wedge (p \rightarrow q)\,] \rightarrow p$ bukan tautologi, sehingga argumen dikatakan tidak sahih. ■

Tabel 1.17 $[\, q \wedge (p \rightarrow q)\,] \rightarrow p$ bukan tautologi

p	q	$p \rightarrow q$	$q \wedge (p \rightarrow q)$	$[\, q \wedge (p \rightarrow q)\,] \rightarrow p$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

Contoh 1.33

Periksa kesahihan argumen berikut ini:

Jika 5 lebih kecil dari 4, maka 5 bukan bilangan prima.
5 tidak lebih kecil dari 4.

∴ 5 adalah bilangan prima

Penyelesaian:

Misalkan p adalah proposisi "5 lebih kecil dari 4" dan q adalah proposisi "5 adalah bilangan prima". Maka argumen di atas berbentuk:

$$\begin{array}{rl} & p \rightarrow {\sim}q \\ & {\sim}p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Tabel 1.18 memperlihatkan tabel kebenaran untuk kedua hipotesis dan konklusi tersebut. Baris ke-3 dan ke-4 pada tabel tersebut adalah baris di mana $p \rightarrow {\sim}q$ dan ${\sim}p$ benar secara bersama-sama, tetapi pada baris ke-4 konklusi q salah (meskipun pada baris ke-3 konklusi q benar). Ini berarti argumen tersebut palsu.

Perhatikanlah bahwa meskipun konklusi dari argumen tersebut kebetulan merupakan pernyataan yang benar ("5 adalah bilangan prima" adalah benar), tetapi konklusi dari argumen ini tidak sesuai dengan bukti bahwa argumen tersebut palsu. ■

Tabel 1.18 Tabel kebenaran untuk $p \rightarrow \sim q$, $\sim p$, dan q

p	q	$\sim q$	$p \rightarrow \sim q$	$\sim p$
T	T	F	F	F
T	F	T	T	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

Contoh 1.34

Periksa kesahihan argumen berikut ini:

Jika 17 adalah bilangan prima, maka 3 tidak habis membagi 17.
3 habis membagi 17.

∴ 17 bukan bilangan prima

Penyelesaian:

Misalkan p adalah proposisi "17 adalah bilangan prima" dan q adalah proposisi "3 habis membagi 17". Maka argumen di atas berbentuk:

$$\begin{array}{ll} & p \rightarrow \sim q \\ & q \\ \hline \therefore & \sim p \end{array}$$

Tabel 1.18 digunakan kembali untuk memperlihatkan tabel kebenaran untuk kedua hipotesis dan konklusi tersebut. Baris ke-3 pada tabel tersebut adalah baris di mana hipotesis $p \rightarrow \sim q$ dan q benar secara bersama-sama. Pada baris ke-3 ini, konklusi $\sim p$ juga benar. Ini berarti argumen tersebut sahih.

Perhatikanlah bahwa meskipun argumen tersebut sahih, tetapi konklusi dari argumen tersebut kebetulan merupakan pernyataan yang salah ("17 bukan bilangan prima" adalah salah). Hal ini disebabkan karena premis yang salah ("3 habis membagi 17") digunakan di dalam argumen, yang mengakibatkan konklusi dari argumen salah. ■

Contoh 1.34 ini memperlihatkan bahwa argumen yang sahih dapat mengarah ke konklusi yang salah jika satu atau lebih dari proposisi salah digunakan di dalam argumen. Moral dari cerita ini adalah bahwa pada suatu argumen yang benar kita tidak mengatakan bahwa konklusinya benar; kita hanya mengatakan bahwa jika kita menjamin hipotesisnya benar, maka kita juga menjamin konklusinya benar.

Contoh 1.35

Periksa kesahihan argumen berikut ini:

Jika saya menyukai Informatika, maka saya belajar sungguh-sungguh.
Saya belajar sungguh-sungguh atau saya gagal.

∴ Jika saya gagal, maka saya tidak menyukai Informatika.

Penyelesaian:

Misalkan p adalah proposisi "Saya menyukai Informatika" dan q adalah proposisi "Saya belajar sungguh-sungguh", dan r adalah proposisi "Saya gagal". Maka argumen di atas berbentuk:

$$
\begin{array}{ll}
 & p \rightarrow q \\
 & q \vee r \\
\hline
\therefore & r \rightarrow \sim p
\end{array}
$$

Tabel kebenaran untuk memeriksa kesahihan argumen tersebut ditunjukkan pada Tabel 1.19. Baris ke-1, 2, 6 dan 7 adalah baris di mana premis $p \rightarrow q$ dan $q \vee r$ benar secara bersama-sama, tetapi pada baris ke-1 konklusi $r \rightarrow \sim p$ salah (meskipun pada baris yang 2, 6, dan 7 konklusi tersebut benar), sehingga argumen adalah palsu. ■

Tabel 1.19 Tabel kebenaran untuk $p \rightarrow q$, $q \vee r$, dan $r \rightarrow \sim p$

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \vee r$	$\sim p$	$r \rightarrow \sim p$
T	T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	T	F	T
T	F	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F	T
F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	T

1.12 Aksioma, Teorema, *Lemma*, *Corollary*

Di dalam matematika maupun ilmu komputer, kita sering menemukan kata-kata seperti aksioma, teorema, *lemma*, dan *corolarry*.

Aksioma adalah proposisi yang diasumsikan benar. Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi.

Contoh-contoh aksioma:

(a) Untuk semua bilangan real x dan y, berlaku $x + y = y + x$ (hukum komutatif penjumlahan).
(b) Jika diberikan dua buah titik yang berbeda, maka hanya ada satu garis lurus yang melalui dua buah titik tersebut.

Teorema adalah proposisi yang sudah terbukti benar. Bentuk khusus dari teorema adalah *lemma* dan *corolarry*. ***Lemma*** adalah teorema sederhana yang digunakan dalam pembuktian teorema lain. *Lemma* biasanya tidak menarik namun berguna pada pembuktian proposisi yang lebih kompleks, yang dalam hal ini pembuktian tersebut dapat lebih mudah dimengerti bila menggunakan sederetan *lemma*, setiap *lemma* dibuktikan secara individual [ROS03]. ***Corollary*** adalah teorema yang dapat dibentuk langsung dari teorema yang telah dibuktikan, atau dapat dikatakan *corollary* adalah teorema yang mengikuti dari teorema lain.

Contoh-contoh teorema:

(a) Jika dua sisi dari sebuah segitiga sama panjang, maka sudut yang berlawanan dengan sisi tersebut sama besar.
(b) Untuk semua bilangan real x, y, dan z, jika $x \leq y$ dan $y \leq z$, maka $x \leq z$ (hukum transitif).

Contoh *corollary*:

Jika sebuah segitiga adalah sama sisi, maka segitiga tersebut sama sudut. *Corollary* ini mengikuti teorema (a) di atas.

Contoh *lemma*:

Jika n adalah bilangan bulat positif, maka $n - 1$ bilangan positif atau $n - 1 = 0$.

1.13 Ragam Contoh Soal dan Penyelesaian

Untuk lebih memantapkan pemahaman terhadap materi logika proposisi, berikut ini diberikan sejumlah soal dan penyelesaiannya.

Contoh 1.36

Diberikan pernyataan "Tidak benar bahwa dia belajar Algoritma tetapi tidak belajar Matematika".

(a) Nyatakan pernyataan di atas dalam notasi simbolik (ekspresi logika)
(b) Berikan pernyataan yang ekivalen secara logika dengan pernyataan tersebut (Petunjuk: gunakan hukum De Morgan)

Penyelesaian:

Misalkan
p : Dia belajar Algoritma
q : Dia belajar Matematika

maka,
(a) $\sim (p \wedge \sim q)$
(b) $\sim (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$ (Hukum De Morgan)
dengan kata lain: "Dia tidak belajar Algoritma atau belajar Matematika"

■

Contoh 1.37

Untuk menerangkan mutu sebuah hotel, misalkan p : Pelayanannya baik, dan q : Tarif kamarnya murah, r : Hotelnya berbintang tiga.

Terjemahkan proposisi-proposisi berikut dalam notasi simbolik (menggunakan p, q, r):
(a) Tarif kamarnya murah, tapi pelayanannya buruk.
(b) Tarif kamarnya mahal atau pelayanannya baik, namun tidak keduanya.
(c) Salah bahwa hotel berbintang tiga berarti tarif kamarnya murah dan pelayanannya buruk.

Penyelesaian:
(a) $q \wedge \sim p$
(b) $\sim q \oplus p$
(c) $\sim (r \rightarrow (q \wedge \sim p))$ ■

Contoh 1.39

Nyatakan pernyataan berikut "Anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu jika anda berusia di bawah 17 tahun kecuali kalau anda sudah menikah".

Penyelesaian:

Misalkan

p : Anda berusia di bawah 17 tahun.
q : Anda sudah menikah.
r : Anda dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu.

maka pernyataan di atas dapat ditulis sebagai

$(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim r$ ■

Contoh 1.40

Diberikan pernyataan "Perlu memiliki *password* yang sah agar anda bisa *log on* ke *server*"

(a) Nyatakan pernyataan di atas dalam bentuk proposisi "jika p, maka q".
(b) Tentukan ingkaran, konvers, invers, dan kontraposisi dari pernyataan tersebut.

Penyelesaian:

Misalkan

p : Anda bisa *log on* ke *server*
q : Memiliki *password* yang sah

maka

(a) Jika anda bisa *log on* ke *server* maka anda memiliki *password* yang sah
(b) 1) Ingkaran:
"Anda bisa *log on* ke *server* dan anda tidak memiliki *password* yang sah"

2) Konvers:
"Jika anda memiliki *password* yang sah maka anda bisa *log on* ke *server*"

3) Invers:
"Jika anda tidak bisa *log on* ke *server* maka anda tidak memiliki *password* yang sah"

4) Kontraposisi :
"Jika anda tidak memiliki *password* yang sah maka anda tidak bisa *log on* ke *server*"

■

Contoh 1.41

Diberikan pernyataan "Untuk mendapatkan satu kupon undian, Anda cukup membeli dua produk senilai Rp 50.000,-".

(a) Nyatakan pernyataan di atas dalam bentuk proposisi "jika p, maka q".
(b) Tentukan ingkaran, konvers, invers, dan kontraposisi dari pernyataan tersebut.

Penyelesaian:

Misalkan

p : Anda mendapatkan satu kupon undian
q : Anda membeli dua produk senilai Rp 50.000,-

maka

(a) Jika Anda membeli dua produk senilai Rp. 50.000,-, maka Anda mendapatkan satu kupon undian.

(b) 1) Ingkaran:
"Anda membeli dua produk senilai Rp. 50.000,- dan Anda tidak mendapatkan satu kupon undian."

2) Konvers:
"Jika Anda mendapatkan satu kupon undian, maka Anda membeli dua produk Rp. 50.000,-"

3) Invers:
"Jika Anda tidak membeli dua produk senilai Rp. 50.000,-, maka Anda tidak mendapatkan satu kupon undian."

4) Kontraposisi :
"Jika Anda tidak mendapatkan satu kupon undian, maka Anda tidak membeli dua produk senilai Rp. 50.000,-"

■

Contoh 1.42

Tentukan ingkaran dan kontraposisi dari pernyataan berikut: "Dia tidak pergi ke kampus maupun ke perpustakaan bilamana hari ini hujan".

Penyelesaian:

Misalkan

p : Dia pergi ke kampus
q : Dia pergi ke perpustakaan
r : Hari ini hujan

Maka kalimat di atas dapat dituliskan dalam bentuk:

$$r \to (\sim p \wedge \sim q)$$

Untuk menentukan ingkarannya, terapkan hukum-hukum logika sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \sim(r \to (\sim p \wedge \sim q)) &\Leftrightarrow \sim(\sim r \vee (\sim p \wedge \sim q)) \\ &\Leftrightarrow r \wedge \sim(\sim p \wedge \sim q) \\ &\Leftrightarrow r \wedge (p \vee q) \end{aligned}$$

Jadi ingkarannya adalah

"Hari ini hujan, dan dia pergi ke kampus atau ke perpustakaan"

Untuk menentukan kontraposisinya, terapkan hukum-hukum logika sebagai berikut:

$$\sim(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow \sim r \Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow \sim r$$

Jadi kontraposisinya adalah

"Jika dia pergi ke kampus atau ke perpustakaan, maka hari ini tidak hujan"

■

Contoh 1.43

Tunjukkan bahwa $[\sim p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$ adalah tautologi.

Penyelesaian:

Buat tabel kebenaran sebagai berikut:

Tabel 1.21 Tabel kebenaran $[\sim p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$\sim p \wedge (p \vee q)$	$[\sim p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$
T	T	F	T	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T

Dari Tabel 1.21 terlihat bahwa $[\sim p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$ adalah tautologi.

■

Contoh 1.44

Sebagian besar orang percaya bahwa harimau Jawa sudah lama punah. Tetapi, pada suatu hari Amir membuat pernyataan-pernyataan kontroversial sebagai berikut:

(a) Saya melihat harimau di hutan.
(b) Jika saya melihat harimau di hutan, maka saya juga melihat srigala.

Misalkan kita diberitahu bahwa Amir kadang-kadang suka berbohong dan kadang-kadang jujur. Gunakan tabel kebenaran untuk memeriksa apakah Amir benar-benar melihat harimau di hutan?

Penyelesaian:

Misalkan

p : Amir melihat harimau di hutan
q : Amir melihat srigala

Pernyataan untuk soal (a) adalah p sedangkan pernyataan untuk (b) adalah $p \rightarrow q$. Tabel kebenaran untuk p dan $p \rightarrow q$ ditunjukkan pada Tabel 1.22.

Tabel 1.22 Tabel kebenaran p dan $p \to q$

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Bila Amir dianggap berbohong, maka apa yang dikatakan Amir itu keduanya salah, atau bila dia dianggap jujur maka apa yang dikatakan Amir itu keduanya benar. Tabel 1.22 menunjukkan bahwa mungkin bagi q dan $p \to q$ benar, tetapi tidak mungkin keduanya salah. Ini berarti Amir mengatakan yang sejujurnya, dan kita menyimpulkan bahwa Amir memang benar melihat harimau di hutan.

Anda juga dapat menjawab soal ini tanpa menggunakan tabel kebenaran. Tinjau dua kasus. Kasus pertama, Amir berbohong, maka apa yang dikatakan Amir itu keduanya salah. Ini berarti p salah, dengan demikian implikasi $p \to q$ pasti benar apa pun nilai kebenaran pernyataan q. Ini jelas kontradiksi. Jadi, pastilah Amir benar (kasus kedua), yang berarti Amir memang benar melihat harimau di hutan. ■

Contoh 1.45

Periksa kesahihan argumen berikut:

$$\begin{array}{ll} & p \to \sim q \\ & \sim r \to p \\ & q \\ \hline \therefore & r \end{array}$$

Contoh argumen nyatanya adalah sebagai berikut:

> "Jika saya pulang kampung, maka saya tidak bisa mengikuti ujian susulan. Jika saya tidak lulus ujian, maka saya pulang kampung. Tetapi saya bisa mengikuti ujian susulan. Oleh karena itu saya lulus ujian.

Penyelesaian:

Tabel kebenaran untuk memeriksa kesahihan argumen tersebut ditunjukkan pada Tabel 1.23. Baris 5 adalah baris di mana premis $p \to \sim q$, $\sim r \to p$, dan q benar secara bersama-sama, dan pada baris ini juga konklusi r benar, sehingga argumen tersebut sahih. ■

Tabel 1.23 Tabel kebenaran untuk $p \to \sim q$, $\sim r \to p$, q, dan r

p	q	r	$\sim q$	$p \to \sim q$	$\sim r$	$\sim r \to p$
T	T	T	F	F	F	T
T	T	F	F	F	T	T
T	F	T	T	T	F	T

T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	F	T
F	T	F	F	T	T	F
F	F	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	F

Soal Latihan

1. Tentukan pernyataan manakah di bawah ini yang merupakan proposisi? Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan yang merupakan proposisi.
   (a) $3 + 15 = 17$
   (b) Untuk beberapa bilangan bulat n, $600 = n . 15$
   (c) $x + y = y + x$ untuk setiap psangan bilangan riil x dan y
   (d) Setiap bilangan bulat genap lebih dari empat merupakan penjumlahan dua bilangan prima
   (e) Tidak ada orang utan hidup di kota
   (f) Ambil 5 buah buku di atas meja
   (g) $4 + x = 5$

2. Misalkan p adalah "Iwan bisa berbahasa Inggris", q adalah "Iwan bisa berbahasa Jerman" dan r adalah "Iwan bisa berbahasa Perancis". Terjemahkan kalimat majemuk berikut ke dalam notasi simbolik:
   (a) Iwan bisa berbahasa Inggris atau Jerman
   (b) Iwan bisa berbahasa Jerman tetapi tidak bahasa Perancis
   (c) Iwan bisa berbahasa Inggris atau bahasa Jerman, atau dia tidak bisa berbahasa Perancis atau bahasa Jerman
   (d) Tidak benar bahwa Iwan bisa berbahasa Inggris atau bahasa Perancis
   (e) Tidak benar bahwa Iwan bisa berbahasa Inggris atau bahasa Perancis tetapi tidak bahasa Jerman
   (f) Tidak benar bahwa Iwan tidak bisa berbahasa Inggris, Perancis, maupun Jerman

3. Untuk menerangkan karakteristik mata kuliah X, misalkan p : "Kuliahnya menarik", dan q : "Dosennya enak", r : "Soal-soal ujiannya mudah".
   Terjemahkan proposisi-proposisi berikut dalam notasi simbolik (menggunakan p, q, r):
   (d) Kuliahnya tidak menarik, dosennya tidak enak, dan soal-soal ujiannya tidak mudah.
   (e) Kuliahnya menarik atau soal-soal ujiannya tidak mudah, namun tidak keduanya.
   (f) Salah bahwa kuliahnya menarik berarti dosennya enak dan soal-soal ujiannya mudah.

4. Diberikan pernyataan "Tidak benar bahwa penjualan merosot maupun pendapatan tidak naik"
   (a) Nyatakan pernyataan di atas dalam notasi simbolik.

(b) Berikan pernyataan yang ekivalen secara logika dengan pernyataan tersebut (petunjuk: gunakan Hukum de Morgan).

5. Untuk menerangkan mutu sebuah perangkat lunak yang beredar di pasaran, kita misalkan p adalah pernyataan "Tampilan antarmukanya (*interface*) menarik", q pernyataan "Cara pengoperasiannya mudah", dan r pernyataan "Perangkat lunaknya bagus sekali". Tuliskan pernyataan berikut dalam bentuk simbolik:
   (a) Tidak benar bahwa tampilan antarmukanya menarik maupun cara pengoperasiannya sulit.
   (b) Tampilan antarmukanya menarik atau cara pengoperasiannya mudah, namun tidak keduanya.
   (c) Perangkat lunak yang bagus sekali selalu berarti bahwa tampilan antarmukanya menarik dan cara pengoperasiannya mudah, begitu sebaliknya.

6. Nyatakan proposisi berikut dalam notasi simbolik:
   (a) Setiap dokumen dipindai dengan program anti virus bilamana dokumen berasal dari sistem yang tidak dikenal.
   (b) Setiap dokumen yang berasal dari sistem yang tidak dikenal tetapi ia tidak dipindai dengan program anti virus.
   (c) Perlu memindai dokumen dengan progarm anti virus bilamana ia berasal dari sistem yang tidak dikenal.
   (d) Bila pesan tidak dikirim dari sistem yang tidak dieknal, ia tiadk dipindai dengan program anti virus.

7. Misalkan p adalah "Hari ini adalah Hari Rabu", q adalah "Hujan turun" dan r adalah "Hari ini panas". Terjemahkan notasi simbolik ini dengan kata-kata:
   (a) $p \vee q$ (c) $\sim(p \vee q) \wedge r$ (e) $(p \wedge (q \wedge r)) \wedge (r \vee (q \vee p))$
   (b) $\sim p \wedge (q \vee r)$ (d) $(p \wedge q) \wedge \sim(r \vee p)$ (f) $\sim q \rightarrow \sim p$

8. Tuliskan tabel kebenaran untuk setiap proposisi berikut:
   (a) $(p \vee q) \wedge \sim p$ (c) $(\sim p \vee \sim q) \vee p$ (e) $(p \vee q) \rightarrow \sim q$
   (b) $\sim(p \wedge q) \vee (\sim q \vee r)$ (d) $\sim(p \wedge q)\ (r \wedge \sim p)$ (f) $(\sim q \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow \sim q)$

9. Nyatakan apakah setiap implikasi berikut benar atau salah:
   (a) Jika $2 + 2 = 4$, maka $3 + 3 = 5$
   (b) Jika $1 + 1 = 2$, maka Tuhan ada
   (c) Jika $2 + 2 = 4$, maka 4 adalah bilangan prima
   (d) Jika $3 < 6$, maka $6 < 2$

10. Nyatakan setiap proposisi berikut menjadi proposisi bersyarat "jika p, maka q":
    (a) Dian bisa lulus sarjana apabila ia telah menyelesaikan 144 SKS.
    (b) Sebuah program hanya bisa dibaca jika ia terstruktur dengan baik.
    (c) Syarat cukup bagi Lukman untuk mengambil kuliah Algoritma dan Pemrograman adalah ia sudah lulus kuliah Matematika Diskrit.
    (d) Perlu ada salju agar Hesnu bisa bermain ski.
    (e) Anda hanya mendapat jaminan barang hanya jika anda mengembalikan kartu garansi kurang dari sebulan sejak pembelian.
    (f) Untuk mendapat gelar doktor, cukup anda kuliah di Universitas X.
    (g) Perlu mendaki 100 meter lagi untuk mencapai puncak gunung Semeru.

11. Tentukan *konvers*, *invers*, dan kontraposisi dari soal nomor 10 di atas.

12. Nyatakan ingkaran, konvers dan kontraposisi dari implikasi berikut:
    (a) Saya masuk kuliah bilamana ada kuis.
    (b) Sebuah bilangan positif hanya prima jika ia tidak mempunyai pembagi selain 1 dan dirinya sendiri.
    (c) Dia pergi ke kampus bilamana hari ini tidak mendung maupun hujan.
    (d) Sebuah program dikatakan bagus hanya jika waktu eksekusinya singkat atau kebutuhan memorinya sedikit

13. Jika pernyataan $p \to q$ salah, tentukan nilai pernyataan $(\sim p \vee \sim q) \to q$

14. Jika pernyataan $p \to q$ benar, dapatkah anda memastikan nilai pernyataan $\sim p \vee (p \leftrightarrow q)$

15. Manakah dari kalimat berikut yang menyatakan "atau" sebagai *inclusive or* atau *exclusive or*?
    (a) Untuk mengambil kuliah Matematika Diskrit, anda harus sudah mengambil kuliah Kalkulus atau Pengantar Teknologi Informasi
    (b) Sekolah diliburkan jika banjir melebihi 1 meter atau jika hujan masih belum berhenti
    (c) Jika anda membeli sepeda motor saat ini, anda mendapat potongan Rp 500.000,- atau *voucher* BBM sebesar 2% dari harga motor.
    (d) Untuk makan malam, tamu boleh memesan 2 macam sup atau 1 macam bistik.

16. Gunakan tabel kebenaran untuk memperlihatkan hukum distributif $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (q \wedge r)$.

17. Perlihatkan bahwa $(p \to q) \to r$ dan $p \to (q \to r)$ tidak ekivalen.

18. Gunakan tabel kebenaran untuk menunjukkan bahwa tiap implikasi berikut adalah tautologi:
    (a) $\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$
    (b) $\sim(p \rightarrow q) \rightarrow \sim q$
    (c) $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

19. Gunakan hukum-hukum aljabar proposisi untuk menunjukkan bahwa (i) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ dan (ii) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ keduanya adalah tautologi.

20. Ada sebuah kampung yang penduduknya selalu mengatakan hal yang benar atau selalu bohong. Penduduk kampung hanya memberikan jawaban "ya" atau "tidak" terhadap pertanyaan yang diajukan oleh pendatang. Misalkan anda adalah seorang pendatang yang baru sampai ke kampung tersebut dan hendak pergi ke kampung lain. Anda sedang berada pada sebuah pertigaan jalan. Satu cabang jalan menuju kota, sedangkan cabang jalan lainnya menuju ke jurang, namun anda tidak tahu cabang mana yang menuju ke kota tujuan (tidak ada penunjuk arah). Kebetulan di pertigaan tersebut ada seorang warga kampung sedang berdiri, namanya Z. Sebutkan sebuah pertanyaan yang harus anda ajukan ke warga tersebut untuk menentukan cabang jalan mana yang akan anda ambil?
    Petunjuk: Misalkan p adalah pernyataan, "Z selalu mengatakan sebenarnya" dan q pernyataan, "Jalan yang berbelok ke kiri menuju kota". Formulasikan pernyataan A yang tersusun dari p dan q sedemikian rupa sehingga Z akan menjawab pertanyaan "Apakah A benar" dengan "ya" jika dan hanya jika q benar.

21. Periksalah kesahihan argumen-argumen berikut:
    (a) Jika hari panas, Anton mimisan. Hari tidak panas. Oleh karena itu, Anton tidak mimisan.
    (b) Jika hari panas, Anton mimisan. Anton tidak mimisan. Oleh karena itu, hari tidak panas.
    (c) Jika Anton mimisan, maka hari panas. Hari tidak panas. Oleh karena itu, Anton mimisan.
    (d) Jika hari tidak panas, Anton tidak mimisan. Hari panas. Oleh karena itu, Anton mimisan.
    (e) Jika Anton tidak mimisan, hari tidak panas. Anton mimisan. Oleh karena itu, hari panas.

22. Periksa kesahihan argumen berikut:

Terlambat mengumpulkan tugas lebih baik daripada tidak ada.
Tiada yang lebih baik daripada mendapat nilai E

$\therefore$ Terlambat mengumpulkan tugas lebih baik daripada mendapat nilai E