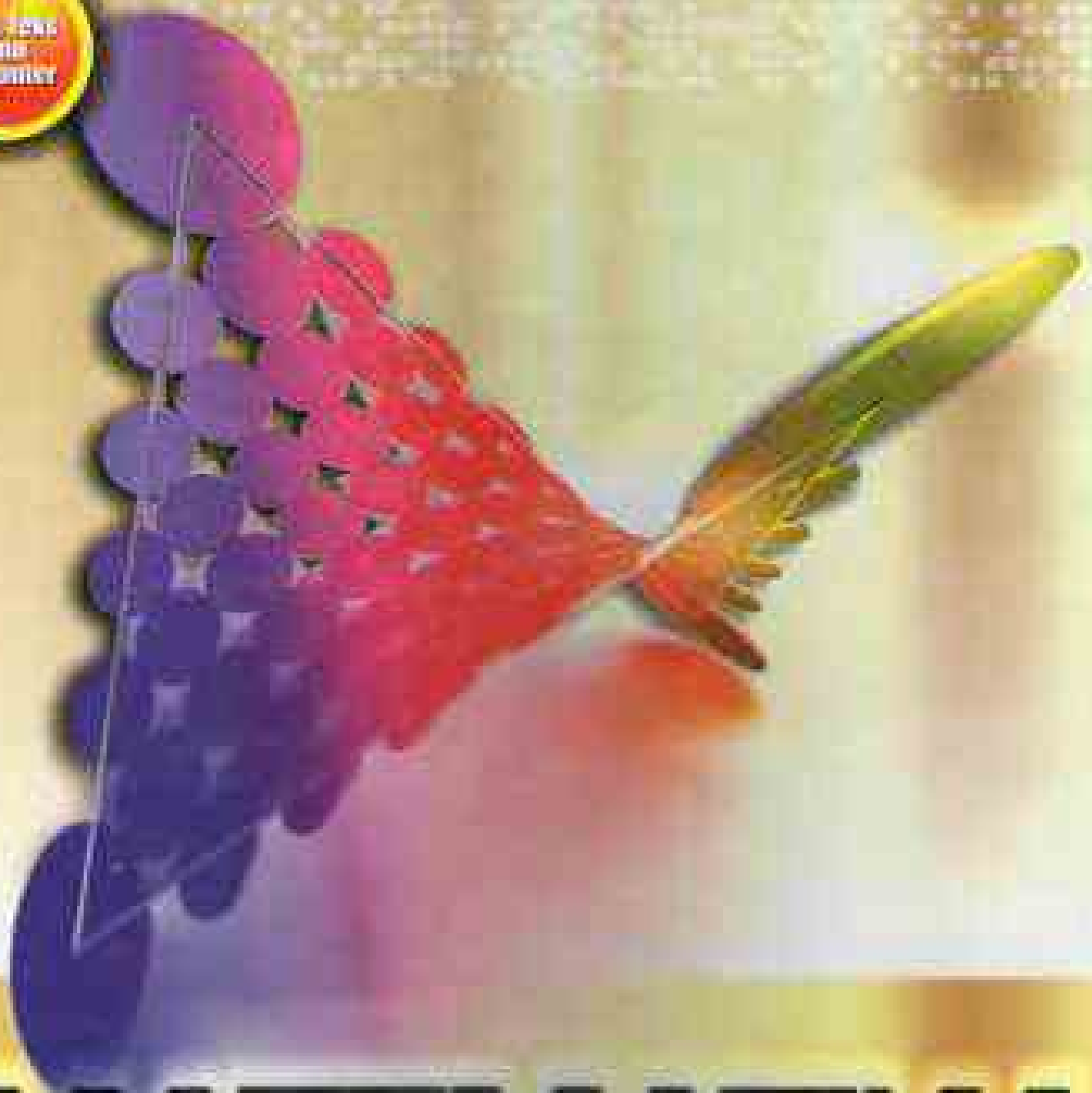




RINALDI MUNIR



# MATEMATIKA DISKRIT

Matematika | Logika | Himpunan | Fungsi | Relasi | Kompartemen | Fungsi Diskrit

Rivali Kempot

*pak*  
**TEGUH**



PAKTEGUH INFORMATIKA

<http://www.pakteguh.com>

## **MATEMATIKA DISKRIT**

---

Penyusun : RINALDI MUNIR  
Dosen Program Studi Teknik Informatika  
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika  
Institut Teknologi Bandung

Penerbit : Informatika Bandung

Pemasaran : **BI-OBSES**  
Pasar Buku Palasari No. 82  
Bandung 40264  
Telp. (022) 7317812  
Fax. (022) 7317896

Cetakan Keempat : September 2010 (Revisi Keempat)

ISBN : 978-602-8758-07-9

Copyright © 2010 pada Penerbit **INFORMATIKA** Bandung

# Daftar Isi

---

Kata Pengantar .....	iii
Daftar Isi .....	v
Apakah Matematika Diskrit Itu ? .....	xi
<b>1. Logika .....</b>	<b>1</b>
1.1 Proposisi .....	2
1.2 Mengkombinasikan Proposisi .....	4
1.3 Tabel kebenaran .....	6
1.4 Disjungsi Eksklusif .....	9
1.5 Hukum-hukum Logika Proposisi .....	10
1.6 Operasi Logika di dalam Komputer .....	12
1.7 Proposisi Bersyarat (Implikasi) .....	15
1.8 Varian Proposisi Bersyarat .....	21
1.9 Bikondisional (Bi-implikasi).....	22
1.10 Inferensi .....	26
1.11 Argumen .....	30
1.12 Aksioma, Teorema, <i>Lemma</i> , dan <i>Colollary</i> .....	35
1.13 Ragam Contoh Soal dan Penyelesaian .....	35
Soal Latihan .....	42

<b>2. Himpunan .....</b>	<b>47</b>
2.1 Definisi Himpunan .....	48
2.2 Penyajian Himpunan .....	48
2.3 Kardinalitas .....	53
2.4 Himpunan Kosong .....	54
2.5 Himpunan Bagian ( <i>Subset</i> ) .....	54
2.6 Himpunan yang Sama .....	57
2.7 Himpunan yang Ekuivalen .....	57
2.8 Himpunan Saling Lepas .....	58
2.9 Himpunan Kuasa .....	59
2.10 Operasi Terhadap Himpunan .....	60
2.11 Perampatan Operasi Himpunan.....	66
2.12 Hukum-hukum Himpunan .....	67
2.13 Prinsip Dualitas .....	68
2.14 Prinsip Inklusi-Eksklusi .....	70
2.15 Partisi .....	72
2.16 Pembuktian Proposisi Himpunan .....	73
2.17 Himpunan Ganda .....	78
2.18 Tipe <i>Set</i> dalam Bahasa Pascal .....	79
2.19 Pengantar Logika dan Himpunan <i>Fuzzy</i> .....	80
2.20 Ragam Contoh Soal dan Penyelesaian .....	87
Soal Latihan .....	92
<b>3. Matriks, Relasi dan Fungsi .....</b>	<b>97</b>
3.1 Matriks .....	98
3.2 Relasi .....	103
3.3 Representasi Relasi .....	105
3.3.1 Representasi Relasi dengan Tabel .....	105
3.3.2 Representasi Relasi dengan Matriks .....	106
3.3.3 Representasi Relasi dengan Graf Berarah .....	107
3.4 Relasi Inversi.....	108
3.5 Mengkombinasikan Relasi.....	109
3.6 Komposisi Relasi .....	110
3.7 Sifat-sifat Relasi .....	112
3.8 Relasi Kesetaraan .....	118
3.9 Relasi Pengurutan Parsial.....	119

3.10	Klosur Relasi .....	120
3.11	Relasi $n$ -ary.....	124
3.12	Fungsi.....	128
3.13	Fungsi Inversi .....	134
3.14	Komposisi Fungsi .....	135
3.15	Beberapa Fungsi Khusus .....	136
3.16	Fungsi Rekursif .....	138
3.17	Ragam Soal dan Penyelesaian .....	141
	Soal Latihan.....	144
<b>4.</b>	<b>Induksi Matematik .....</b>	<b>149</b>
4.1	Pernyataan Perihal Bilangan Bulat .....	150
4.2	Prinsip Induksi Sederhana .....	151
4.3	Prinsip Induksi yang Dirampatkan .....	156
4.4	Prinsip Induksi Kuat .....	160
4.5	Bentuk Induksi Secara Umum .....	163
4.6	Ragam Soal dan Penyelesaian .....	165
	Soal Latihan .....	170
<b>5.</b>	<b>Algoritma dan Bilangan Bulat .....</b>	<b>175</b>
5.1	Algoritma .....	176
5.2	Notasi untuk Algoritma .....	177
5.3	Beberapa Contoh Algoritma .....	180
5.4	Bilangan Bulat.....	183
5.5	Sifat Pembagian pada Bilangan Bulat.....	183
5.6	Pembagi Bersama Terbesar .....	185
5.7	Algoritma Euclidean .....	187
5.8	Aritmetika Modulo .....	191
5.9	Bilangan Prima.....	200
5.10	Kriptografi .....	203
5.11	Fungsi <i>Hash</i> .....	214
5.12	<i>International Standard Book Number (ISBN)</i> .....	215
5.13	Pembangkit Bilangan Acak Semu .....	217
5.14	Ragam Soal dan Penyelesaian .....	218
	Soal Latihan .....	222

<b>6. Kombinatorial dan Peluang Diskrit</b> .....	<b>225</b>
6.1 Percobaan .....	226
6.2 Kaidah Dasar Menghitung .....	227
6.3 Perluasan Kaidah Menghitung .....	230
6.4 Prinsip Inklusi-Eksklusi .....	236
6.5 Permutasi .....	236
6.6 Kombinasi .....	244
6.7 Permutasi dan Kombinasi Bentuk Umum .....	251
6.8 Kombinasi dengan Pengulangan .....	254
6.9 Koefisien Binomial .....	256
6.10 Prinsip Sarang Merpati .....	258
6.11 Peluang Diskrit .....	260
6.12 Ragam Soal dan Penyelesaian.....	268
Soal Latihan .....	277
<b>7. Aljabar Boolean</b> .....	<b>281</b>
7.1 Definisi Aljabar Boolean .....	282
7.2 Aljabar Boolean Dua-Nilai .....	285
7.3 Ekspresi Boolean .....	286
7.4 Prinsip Dualitas .....	288
7.5 Hukum-hukum Aljabar Boolean .....	289
7.6 Fungsi Boolean .....	293
7.7 Penjumlahan dan Perkalian Dua Fungsi .....	295
7.8 Komplemen Fungsi Boolean.....	296
7.9 Bentuk Kanonik .....	298
7.10 Konversi Antar Bentuk Kanonik .....	303
7.11 Bentuk Baku .....	304
7.12 Aplikasi Aljabar Boolean .....	305
7.12.1 Jaringan Pensaklaran ( <i>Switching Network</i> ) .....	305
7.12.2 Sirkuit Elektronik .....	306
7.13 Penyederhanaan Fungsi Boolean .....	308
7.13.1 Penyederhanaan Fungsi Boolean Secara Aljabar .....	309
7.13.2 Metode Peta Karnaugh .....	310
7.13.3 Contoh-contoh Penyederhanaan Fungsi Boolean .....	324
7.13.4 Peta Karnaugh untuk Lima Peubah .....	329
7.13.5 Keadaan <i>Don't Care</i> .....	330
7.14 Penyederhanaan Rangkaian Logika .....	333

7.15	Metode Quine-McCluskey .....	334
7.16	Ragam Soal dan Penyelesaian .....	338
	Soal Latihan .....	348
<b>8.</b>	<b>Graf .....</b>	<b>353</b>
8.1	Sejarah Graf .....	354
8.2	Definisi Graf .....	356
8.3	Jenis-jenis Graf .....	357
8.4	Contoh Terapan Graf .....	359
8.5	Terminologi Dasar .....	364
8.6	Beberapa Graf Sederhana Khusus .....	377
8.7	Representasi Graf .....	381
8.8	Graf Isomorfik ( <i>Isomorphic Graph</i> ) .....	386
8.9	Graf Planar dan Graf Bidang.....	392
8.10	Graf Dual ( <i>Dual Graph</i> ) .....	402
8.11	Lintasan dan Sirkuit Euler .....	404
8.12	Lintasan dan Sirkuit Hamilton .....	408
8.13	Lintasan Terpendek ( <i>Shortest Path</i> ) .....	412
8.14	Persoalan Pedagang Keliling .....	421
8.15	Persoalan Tukang Pos Cina .....	424
8.16	Pewarnaan Graf .....	425
8.17	Ragam Soal dan Penyelesaian .....	430
	Soal Latihan.....	437
<b>9.</b>	<b>Pohon .....</b>	<b>443</b>
9.1	Definisi Pohon .....	444
9.2	Sifat-sifat Pohon .....	446
9.3	Pewarnaan Pohon .....	447
9.4	Pohon Merentang .....	447
9.5	Pohon Berakar .....	457
9.6	Terminologi Pada Pohon Berakar .....	458
9.7	Pohon Berakar Terurut .....	461
9.8	Pohon <i>m-ary</i> .....	463
9.9	Pohon Biner .....	467
9.10	Pohon Ekspresi .....	469
9.11	Pohon Keputusan .....	475

9.12 Kode Awalan .....	476
9.13 Kode Huffman .....	477
9.14 Pohon Pencarian .....	481
9.15 Traversal Pohon Biner .....	483
9.16 Ragam Soal dan Pembahasan .....	487
Soal Latihan.....	491
<b>10. Kompleksitas Algoritma.....</b>	<b>495</b>
<hr/>	
10.1 Kemangkusan Algoritma .....	496
10.2 Mengapa Kita Memerlukan Algoritma yang Mangkus? .....	496
10.3 Kebutuhan Waktu dan Ruang.....	498
10.4 Kompleksitas Waktu dan Ruang .....	499
10.5 Kompleksitas Waktu Asimptotik .....	510
10.6 Ragam Soal dan Penyelesaian .....	538
Soal Latihan .....	541
<b>Daftar Pustaka .....</b>	<b>457</b>



# Apakah Matematika Diskrit Itu ?

**Matematika diskrit** (*discrete mathematics* atau *finite mathematics*) adalah cabang matematika yang mengkaji objek-objek diskrit. Menurut kamus ensiklopedi *wikipedia* ([http://en.wikipedia.org/wiki/Computer\\_science](http://en.wikipedia.org/wiki/Computer_science)), *ACM (Association for Computing Machinery)* mendefinisikan matematika diskrit sebagai berikut:

*Discrete mathematics, sometimes called finite mathematics, is the study of mathematical structures that are fundamentally discrete, in the sense of not supporting or requiring the notion of continuity. Most, if not all, of the objects studied in finite mathematics are countable sets, such as the integers.*

Apa yang dimaksud dengan kata **diskrit** (*discrete*)? Benda disebut diskrit jika ia terdiri dari sejumlah berhingga elemen yang berbeda atau elemen-elemen yang tidak bersambungan. Himpunan bilangan bulat (*integer*) dipandang sebagai objek diskrit. Kita dapat memahami diskrit dengan membandingkan lawan katanya yaitu **kontinyu** atau **menerus** (*continuous*). Himpunan bilangan riil (*real*) dipandang sebagai objek kontinyu. Di dalam matematika kita mengenal fungsi diskrit dan fungsi kontinyu. Fungsi diskrit digambarkan sebagai sekumpulan titik-titik, sedangkan fungsi kontinyu digambarkan sebagai kurva.

Matematika diskrit berkembang sangat pesat dalam dekade terakhir ini. Salah satu alasan yang menyebabkan perkembangan pesat itu adalah karena komputer digital bekerja secara diskrit. Informasi yang disimpan dan dimanipulasi oleh komputer adalah dalam bentuk diskrit.

Matematika diskrit merupakan ilmu paling dasar di dalam pendidikan informatika atau ilmu komputer. Pada dasarnya informatika adalah kumpulan disiplin ilmu dan teknik yang mengolah dan memanipulasi objek diskrit. Matematika diskrit memberikan landasan matematis untuk kuliah-kuliah lain di informatika. Mahasiswa yang mengambil kuliah seperti algoritma, struktur data, basis data, otomata dan teori bahasa formal, jaringan komputer, keamanan komputer, sistem operasi, teknik kompilasi, dan sebagainya akan menemui kesulitan jika tidak mempunyai landasan matematis dari matematika diskrit. Hal ini tidak mengherankan karena kebanyakan kuliah tersebut sering mengacu kepada konsep-konsep di dalam matematika diskrit. Karena itulah kuliah matematika diskrit diberikan pada tahun pertama perkuliahan informatika atau ilmu komputer.

Di dalam kuliah Matematika Diskrit, materi matematika yang diberikan adalah matematika yang khas informatika, sehingga kadang-kadang kuliah ini dinamakan juga **Matematika Informatika**. Adapun materi-materi yang termasuk dalam Matematika Diskrit adalah:

1. Logika
2. Teori Himpunan
3. Matriks
4. Relasi dan Fungsi
5. Induksi Matematik
6. Algoritma
7. Teori Bilangan Bulat

8. Barisan dan Deret
9. Teori Grup dan *Ring*
10. Aljabar Boolean
11. Kombinatorial
12. Teori Peluang Diskrit
13. Fungsi Pembangkit dan Analisis Rekurens
14. Teori Graf (termasuk pohon)
15. Kompleksitas Algoritma
16. Pemodelan Komputasi (Otomata dan Teori Bahasa Formal)

Namun, tidak semua materi di atas akan dicakup di dalam buku ini. Beberapa materi sudah menjadi kuliah tersendiri, seperti materi algoritma dipelajari secara lebih mendalam pada kuliah Algoritma dan Pemrograman, teori peluang diskrit pada kuliah Probabilitas dan Statistik, pemodelan komputasi pada kuliah Otomata dan Teori Bahasa Formal. Materi Fungsi Pembangkit dimasukkan ke dalam kuliah Model dan Simulasi, sedangkan barisan dan deret biasanya dimasukkan ke dalam kuliah kalkulus.

Contoh-contoh persoalan dalam kehidupan sehari-hari yang diselesaikan dengan matematika diskrit antara lain:

1. Berapa banyak kemungkinan jumlah *password* yang dapat dibuat dari 8 karakter?
2. Jumlah permintaan sambungan telepon di sebuah area diperkirakan sebanyak 500.000 buah. Jika nomor telepon di area tersebut adalah 8-angka, yaitu dengan format xxx-xxxxx, yang dalam hal ini 3 angka pertama menyatakan kode area (angka pertama di dalam kode area tidak boleh 0, dua angka lainnya adalah angka 0 sampai 9), apakah nomor telepon 8-angka bisa mengakomodasi semua permintaan sambungan telepon? Setiap nomor telepon harus unik.
3. Bagaimana nomor *ISBN* sebuah buku divalidasi?
4. Berapa banyak *string* biner yang panjangnya 8 bit yang mempunyai bit 1 sejumlah ganjil?
5. Bagaimana menentukan lintasan terpendek dari satu kota  $a$  ke kota  $b$ ?
6. Buktikan bahwa perangko senilai  $n$  ( $n \geq 8$ ) rupiah dapat menggunakan hanya perangko 3 rupiah dan 5 rupiah saja
7. Diberikan dua buah algoritma yang berbeda untuk penyelesaian sebuah persoalan, bagaimana menentukan algoritma mana yang terbaik?
8. Bagaimana rangkaian logika untuk membuat peraga digital yang disusun oleh 7 buah batang (*bar*)?
9. Dapatkah kita melalui semua jalan di sebuah kompleks perubahan tepat hanya sekali dan kembali lagi ke tempat semula?
10. "Makanan murah tidak enak", "makanan enak tidak murah". Apakah kedua pernyataan tersebut menyatakan hal yang sama?

Contoh-contoh persoalan di atas memperlihatkan bahwa matematika diskrit digunakan bilamana kita menghitung objek-objek, mengkaji relasi antara objek-objek dikaji, dan langkah-langkah di dalam proses dianalisis [ROS03].

Moral dari semua cerita di atas adalah bahwa mahasiswa informatika atau ilmu komputer harus memiliki pemahaman yang kuat dalam matematika diskrit, agar mereka tidak mendapat kesulitan dalam memahami kuliah-kuliah lainnya di informatika.

*Perjalanan satu mil dimulai dari satu langkah.*