FUNGSI

BAB 4 FUNGSI ➡ 85

BAB 4

FUNGSI

Pemahaman akan konsep fungsi sangatlah penting dalam mempelajari ilmu ekonomi, karena banyak teori-teori ekonomi yang bekerja dengan fungsi, baik fungsi yang berbentuk persamaan maupun pertidaksamaan. Fungsi berbentuk persamaan ialah fungsi yang ruas kiri dan ruas kanannya dihubungkan dengan tanda kesamaan (=), sedangkan fungsi yang berbentuk pertidaksamaan ialah fungsi yang ruas kiri dan ruas kanannya dihubungkan dengan tanda ketidaksamaan ($\leq$ atau $\geq$). Bab ini akan menjelaskan berbagai konsep fungsi serta penerapan ekonomi dari fungsi yang bersangkutan.

A. Pengertian Konstanta, Variabel dan Fungsi

Dalam pembahasan fungsi, sebenarnya dibahas pula konstanta dan variabel yang terdapat dalam fungsi tersebut.

1. Koefisien dan konstanta

Koefisien ialah bilangan atau angka yang terkait pada dan terletak di depan suatu variabel dalam sebuah fungsi. Adapun Konstanta adalah suatu bilangan yang tetap tidak berubah-ubah. Notasi atau tanda dari konstanta dinyatakan dengan a, b, c, dan seterusnya. Jika terdapat fungsi:

$y = ax + b$ atau $y = ax^2 + bx + c$

maka a, b, dan c inilah yang disebut konstanta.

Contoh:

$y = 3x + 15$

Maka konstanta a = 3 dan b = 15

Besarnya a = 3 dan b = 15 tidak dipengaruhi oleh perubahan x dan y.

Bentuk y = f(x) di atas berarti menyatakan bahwa y merupakan fungsi x, besar kecilnya nilai y tergnatung pada atau fungsional terhadap nilai x. Masing-masing x dan y adalah variabel. Dalam hal ini x adalah variabel bebas karena nilainya tidak tergantung pada nilai variabel lain (y) dalam fungsi tersebut. Sebaliknya y adalah variabel terikat karena nilainya tergantung pada nilai x.

2. Variabel

Variabel ialah unsur pembentuk fungsi yang mencerminkan atau mewakili faktor tertentu. Notasi atau tanda dari variabel ini biasanya dinyatakan dengan x, y, z, dan seterusnya. Apabila terdapat fungsi:

$y = 3x + 15$ atau $z = x + 2xy - 6$

Maka, x, y, dan z inilah yang disebut variabel. Variabel x, y, dan z ini saling memengaruhi.

Berdasarkan kedudukan atau sifatnya, di dalam setiap fungsi terdapat dua macam variabel yaitu variabel bebas dan variabel terikat. Variabel bebas ialah variabel yang nilainya tidak tergantung pada variabel lain, sedangkan variabel terikat ialah variabel yang nilainya tergantung pada variabel lain.

Pada dasarnya variabel dapat dibedakan menjadi dua, yaitu variabel kualitatif dan variabel kuantitatif. Variabel kualitatif adalah sesuatu yang sifatnya tidak tetap, tetapi berubah-ubah (atau variabel) yang tidak dapat diukur, seperti selera, preferensi, kepuasan, dan lainnya. Sementara itu, variabel kuantitatif adalah sesuatu yang sifatnya tidak tetap, tetapi berubah-ubah (atau variabel) yang dapat diukur, seperti dalam kilogram, ton, unit, satuan moneter, rupiah, hari, dan sebagainya. Misalnya jumlah penjumlahan yang dijual suatu perusahaan adalah variabel kuantitatif dalam rupiah.

Variabel kuantitatif dapat dibedakan pula atas dua macam yaitu variabel yang kontinu dan variabel yang deskrit. Variabel kuantitatif kontinu adalah variabel yang dapat diukur sampai dengan bilangan yang sekecil-kecilnya atau pecahan, seperti ukuran satuan volume, satuan berat, satuan panjang, satuan waktu, satuan uang, dan sebagainya. Sementara itu. Variabel deskrit adalah variabel kuantitatif yang hanya dapat diukur dengan bilangan-bilangan bulat dan tidak mungkin dengan bilangan pecahan, seperti penjualan mainan atau penjualan baju.

3. Fungsi

Fungsi ialah suatu bentuk hubungan matematis yang menyatakan hubungan ketergantungan (hubungan fungsional) antara satu variabel dengan variabel lain. Unsur-unsur yang membentuk fungsi adalah variabel, koefisien, dan konstanta. Variabel dan koefisien senantiasa terdapat dalam setiap bentuk fungsi, akan tetapi tidak demikian halnya dengan konstanta. Sebuah fungsi yang secara konkret dinyatakan dalam bentuk persamaan atau pertidaksamaan, mungkin sekali mengandung sebuah konstanta dan mungkin pula tidak. Walaupun sebuah persamaan atau pertidaksamaan tidak mengandung konstanta, tidaklah mengurangi artinya sebagai sebuah fungsi.

Contoh fungsi ialah:

y = f (x) atau z = f (x, y)

x, y, dan z yang disebut variabel. Variabel yang terdapat dalam suatu fungsi dapat dibedakan atas variabel bebas (*independent variables*) dan variabel yang dipengaruhi/tidak bebas (*dependent variables*). Variabel bebas (*independent variables*) adalah variabel yang besarannya dapat ditentukan sembarang, misalnya 1, 5; 0; 8 dan seterusnya. Sebaliknya, variabel yang dipengaruhi/tidak bebas (*independent variables*) adalah variabel yang besarnya dapat ditentukan setelah nilai variabel bebasnya ditentukan terlebih dulu.

Contoh:

Bila y = 3x + 15

Dalam hal ini x merupakan variabel bebas dan y merupakan variabel yang dipengaruhi/tidak bebas. Untuk mengetahui besaran/nilai y, terlebih dahulu ditentukan besaran/nilai x. Dengan demikian, dapat diperoleh besaran/nilai y dari nilai x sembarang, yaitu:

Bila x = - 6, maka y = -3

Jika x = 0, maka y = 15

Serta bila x = 2, maka y = 21

Dalam pembahasan mengenai suatu fungsi, terdapat istilah yang disebut "nilai fungsi". Nilai fungsi adalah besaran atau nilai dari y atau fungsi tersebut (nilai dari variabel yang dipengaruhi/tidak bebas). Berdasarkan contoh di atas,

$y = f(x)$ adalah $y = 3x + 15$;

bila $x = 3$; $y = f(x) = f(3) = 3(3) + 15 = 24$;

jika $x = 2$; $y = f(x) = f(2) = 3(2) + 15 = 21$

Dengan melihat hubungan antara variabel-variabel yang terdapat dalam suatu fungsi, dapat dibedakan dua jenis fungsi. Jenis fungsi itu adalah fungsi eksplisit dan fungsi implisit.

a. Fungsi Eksplit

Fungsi eksplit adalah suatu fungsi yang antara variabel bebas/menentukan dan variabel tidak bebas/dipengaruhi dapat dengan jelas dibedakan. Sebagai contoh:

$y = f(x)$ adalah $y = 2x + 4$

Dalam hal ini besaran/nilai y ditentukan oleh besaran/nilai x, sehingga x adalah variabel bebas/menentukan dan variabel y adalah variabel yang dipengaruhi/tidak bebas. Jadi jika $x = 3$ maka $y = 2(3) + 4 = 10$; dan jika $x = 2$ maka $y = 2(2) + 4 = 8$. Contoh ini merupakan fungsi eksplisit dengan satu variabel bebas (*independent*). Apabila ditemui dua variabel bebas (*independent*) seperti contoh berikut:

$z = f(x,y)$ adalah $z = 2x + y^2 + 3$

maka, dalam hal ini terlihat bahwa:

x dan y adalah variabel bebas/menentukan, dan

z adalah variabel yang dipengaruhi/tidak bebas.

Jadi, besaran atau nilai z hanya bisa diketahui setelah besaran/nilai x dan y ditentukan lebih dahulu secara sembarang.

Misalnya:

bila $x = 2$ dan $y = 3$ maka $z = 2(2) + (3)^2 = 16$ dan

Jika $x = 5$ dan $y = 2$ maka $z = 2(5) + (2)^2 + 3 = 17$.

b. Fungsi implisit

Fungsi implisit adalah fungsi yang antara variabel bebas dan variabel tidak bebas yang dipengaruhi tidak dapat dengan mudah/jelas dibedakan. Bentuk umum fungsi implisit ini dinyatakan dengan:

$f(x,y) = 0$ untuk dua variabel, dan

$f(x, y, z) = 0$ untuk tiga variabel.

Sebagai contoh: $f(x,y) = 0$ adalah $2x + 3y - 5 = 0$. Dalam contoh ini, variabel x dan variabel y tidak jelas mana yang merupakan variabel bebas dan mana yang merupakan variabel tidak bebas/yang dipengaruhi. Apabila ditetapkan suatu nilai untuk variabel x, dapat diperoleh variabel y. Demikian pula sebaliknya apabila ditetapkan suatu nilai untuk variabel y, variabel x dapat diperoleh:

Jadi, jika $x = 1$, maka $y = 1$ dan jika nilai y ditentukan terlebih dahulu, yaitu $y = 3$, diperoleh $x = -2$

Contoh untuk fungsi implisit dengan tiga variabel:

$f = (x, y, z) = 0$ adalah $2x + y - 3z + 4 = 0$

Dalam hal ini variabel-variabel x, y dan z tidak dapat dengan mudah ditentukan mana variabel bebas dan mana variabel tidak bebas/yang dipengaruhi. Dengan begitu, jika ditentukan dua buah variabel lebih dahulu (misalnya x dan y atau x dan z, ataupun y dan z), barulah dapat diperoleh nilai dari variabel lainnya.

Jadi, apabila nilai x dan y ditentukan terlebih dahulu, misalnya $x = 1$ dan $y = 3$, diperoleh $z = 3$. Demikian pula jika nilai x dan z ditentukan terlebih dahulu, misalnya $x = 2$ dan $z = 5$, diperoleh $y = 7$. Selanjutnya, jika nilai y dan z ditentukan lebih dahulu, misalnya $y = 2$ dan $z = 4$, diperoleh $x = 3$.

4. Koordinat

Pembahasan mengenai masalah fungsi matematika tidak terlepas dari pembahasan tentang koordinat. Jika ingin menggambarkan grafik atau fungsi, grafik fungsi itu dapat digambarkan. Hal itu apabila titik-titik dalam bidang datar yang menunjukkan letak dari gambaran grafik tersebut telah ditentukan. Titik-titik ini dapat ditentukan dengan dasar suatu ukuran yang digunakan dari titik asal (*origin point)* sebagai titik tolak pengukuran dan penentuan letak titik dalam gambar grafik suatu fungsi. Titik penentu inilah letak titik dalam grafik suatu fungsi. Titik inilah yang disebut koordinat, yang terdiri dari ukuran *obsis,* yaitu jarak titik dengan sumbu vertikal yang terlihat dari ukuran pada sumbu horizontal dan ukuran *ordinat.* Ukuran ordinat yaitu jarak titik dengan sumbu horizontal, yang terlihat dari ukuran titik pada sumbu vertikal.

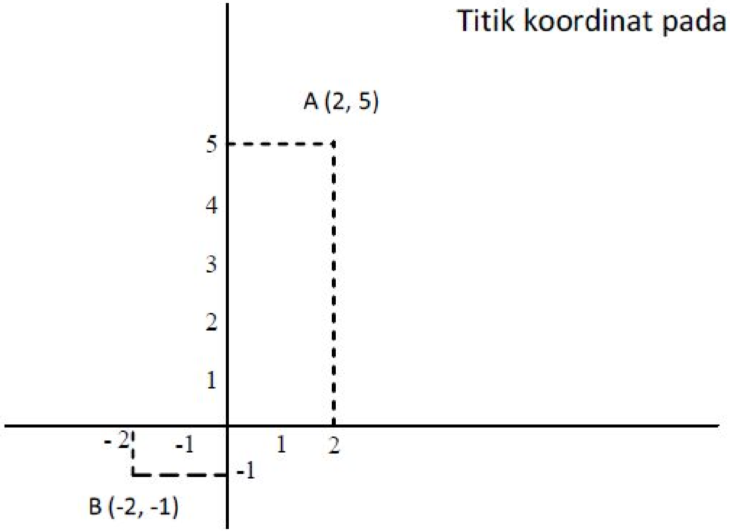
Contoh:

Dalam fungsi y = 2x + 3

Absisnya ialah x = 2 dan ordinatnya ialah y = 2(2) + 3 = 7, sehingga diperoleh titik koordinat A (2,7). Kemudian bila x = -2, maka titik ordinatnya ialah y = -1, sehingga koordinat (-2, -1). Apabila digambarkan akan terlihat titik koordinat A seperti pada gambar berikut:

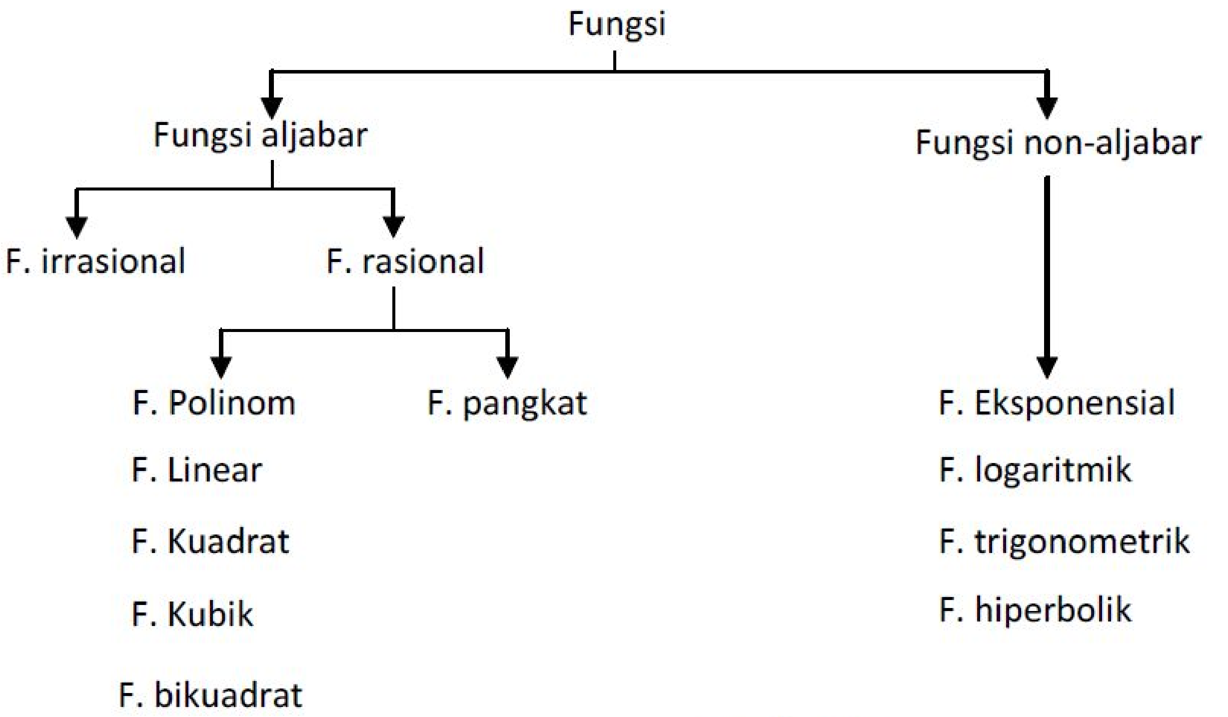
Gambar 3.1.

Titik koordinat pada fungsi y =2x+3



B. Fungsi Aljabar

Terdapat beberapa jenis fungsi antara lain fungsi aljabar, fungsi exponensial dan fungsi logaritma. Secara garis besar fungsi dikelompokkan atas fungsi aljabar dan kelompok fungsi non-aljabar.



Gambar 3.2.
Pembagian Jenis Fungsi

Sumber:
Dumairy (2003)

- Fungsi aljabar
  - sional
  - F. rasional
    - F. Polinom
      - F. Linear
      - F. Kuadrat
      - F. Kubik
      - F. bikuadrat
    - F. pangkat

Fungsi polinom ialah fungsi yang mengandung banyak suku (polinom) dalam variabel bebasnya. Bentuk umum persamaan polinom adalah: $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. pangkat tertinggi pada variabel suatu fungsi polinom mencerminkan derajat pilinomnya serta mencerminkan derajat fungsi.

Fungsi linear ialah fungsi polinom khusus yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah pangkat satu, oleh karenanya sering juga disebut fungsi berderajat satu. Bentuk umum persamaan linear adalah: $y = a_0 + a_1x$; dimana a_0 adalah konstanta dan $a_1 \neq 0$. Fungsi-fungsi lain yang pangkat tertinggi dari variabelnya lebih dari satu, secara umum disebut fungsi non-linear, ini meliputi fungsi kuadrat, fungsi kubik, fungsi bikuadrat, dst.

Fungsi kuadrat ialah fungsi polinom yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah pangkat dua, sering juga disebut fungsi berderajat dua. Bentuk umum persamaan kuadrat adalah: $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$; dimana a_0 adalah konstanta, sedangkan a_1 dan a_2 adalah koefisien, $a_2 \neq 0$.

Fungsi berderajat n ialah fungsi yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah pangkat n (n = bilangan nyata). Bentuk umumnya:
$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$; dimana a_0 adalah konstanta, a_1 hingga a_n adalah koefisien, dan $a_n \neq 0$.

Fungsi pangkat ialah fungsi yang variabel bebasnya berpangkat sebuah bilangan nyata bukan nol, bentuk umumnya: $y = x^n$; dimana: n ialah bilangan nyata bukan nol.

Fungsi non-aljabar

- F. Eksponensial
- F. logaritmik
- F. trigonometrik
- F. hiperbolik

Fungsi eksponensial ialah fungsi yang variabel bebasnya merupakan pangkat dari konstanta bukan nol. Bentuk umumnya: $y = n^x$; dimana $n > 0$

Fungsi logaritmik ialah fungsi balik (*inverse*) dari fungsi eksponensial, variabel bebasnya merupakan bilangan logaritmik. Bentuk umumnya:

$y = {}^{n}\log x$.

Fungsi trigonometrik dan fungsi hiperbolik ialah fungsi yang variabel bebasnya merupakan bilangan-bilangan goneometrik

Contoh persamaan trigonometrik : $y = \sin 4x$

Contoh persamaan hiperbolik : $y = \text{arc} \cos 3x$

Dalam bagian ini akan diuraikan mengenai fungsi aljabar. Sementara itu, fungsi exponensial dan fungsi logaritma akan diuraikan pada bagian berikutnya. Fungsi aljabar terdiri dari fungsi linear, fungsi kuadrat, fungsi pangkat banyak (pangkat tiga, empat, dan seterusnya), dan fungsi pecah.

1. Fungsi Linear

Fungsi linear atau fungsi garis lurus adalah suatu fungsi yang variabel bebas (*independent variabel*)-nya paling tinggi berpangkat satu. Grafik fungsi linear ini, apabila digambarkan merupakan suatu garis lurus. Bentuk umum fungsi linear *explicit* $y = f(x)$ adalah $y = ax + b$ dimana a dan b adalah konstanta

x adalah variabel bebas (*independent variable)*

y adalah variabel tidak bebas/yang dipengaruhi (*dependent variable)*

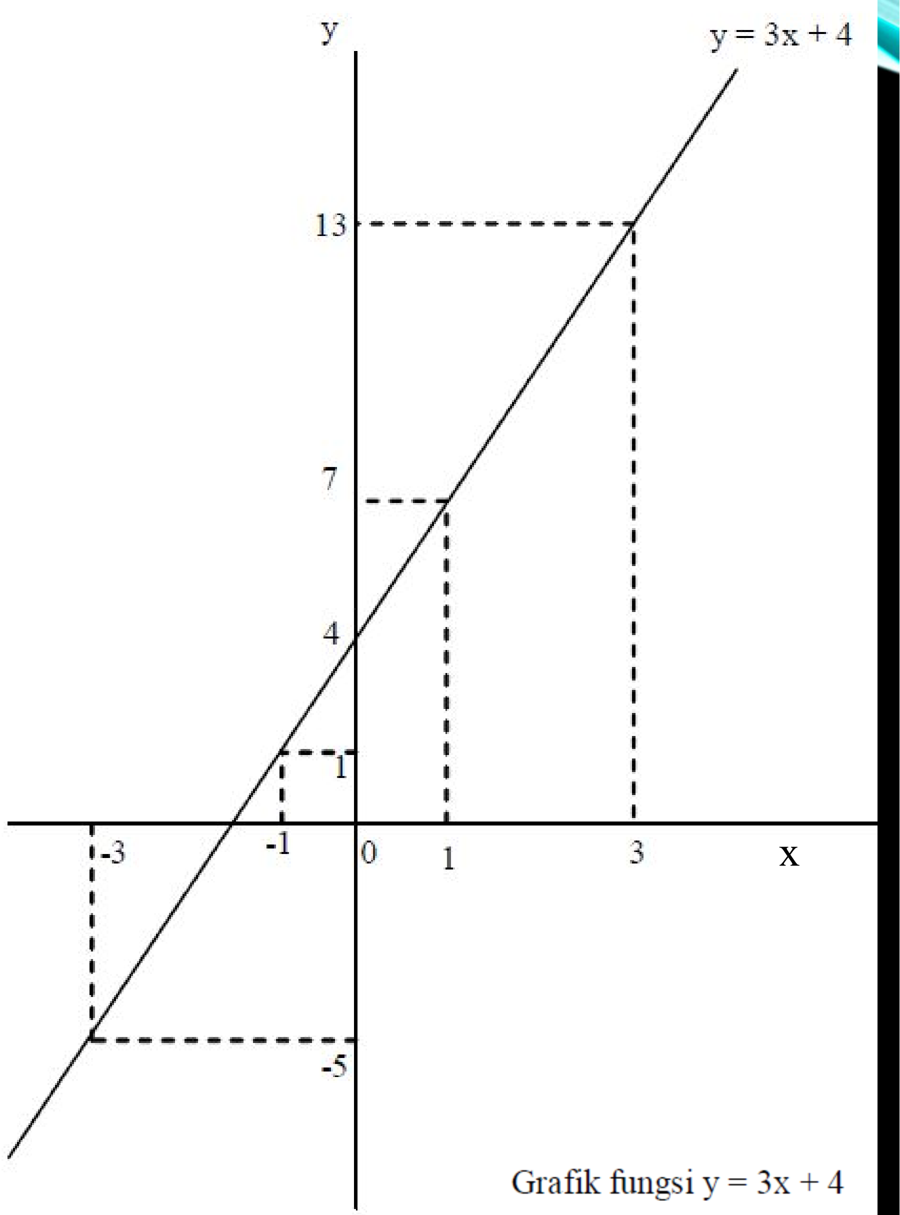
contoh:

$y = 3x + 4$

Dengan menggunakan tabel, dimana nilai x dimasukkan sebagai variabel bebas. Maka akan dapat diperoleh besaran nilai y sebagai variabel terikat. Sumbu x sebagai sumbu horizontal dan sumbu y sebagai sumbu vertikal.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	-2	1	4	7	10	13

Cara penggambaran dengan menggunakan tabel x dan y ini disebut *curve traicing process*. Bentuk gambarnya merupakan garis lurus.



Grafik fungsi y = 3x + 4

Fungsi linear sering kali digunakan dalam menyelesaikan persoalan ekonomi, hal ini lebih disebabkan karena permasalahan dalam *Ekonomi dan Bisnis* sering kali disederhanakan menjadi model-model yang bersifat linear.

Secara umum fungsi linear ini ditulis dalam bentuk:

$$Ax + By + C = 0$$

$$By = -Ax - C$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{A} \rightarrow \text{jika } a = \frac{A}{B} \text{ dan } b = \frac{C}{A}\text{, maka :}$$

$$y = -ax - b$$

di mana:

a : koefisien arah dari fungsi (*gradient*)

b : *intercept*

keterangan:

- Untuk memudahkan penyelesaian dalam persoalan yang diketahui, biasanya model persamaan di atas ditulis dalam bentuk $y = ax + b$
- Tanda ± pada koefisien arah, menunjukkan kecenderungan arah fungsi

Contoh:

- $2x - 4y + 12 = 0$, gradient-nya adalah $\frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$, yang mempunyai titik potong dengan sumbu x dan sumbu y pada (-6, -3)
- $-5x + 3y - 10 = 0$, fungsi eksplisitnya menjadi $y = -\frac{3}{5}x + 10$, maka gradient dari fungsi tersebut adalah $-\frac{3}{5}$, titik potong pada sumbu x dan y $\rightarrow$ $\left(16\frac{2}{3}, 10\right)$

Grafik fungsi linear berbentuk sebuah garis lurus, jika diketahui dua buah titik yang berkordinat di (x_1, y_1) dan (x_2, y_2), maka untuk menentukan model fungsi tersebut, dirumuskan seperti berikut:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Contoh:

Jika diketahui dua buah titik, yaitu titik A (3, 7) dan titik B (12,6), maka tentukan bentuk fungsi linearnya?

Jawab:

$$\frac{y-7}{x-3} = \frac{6-7}{12-3}$$

$$\frac{y-7}{x-3} = \frac{-1}{9} \rightarrow 9(y - 7) = -1(x - 3)$$

$$9y - 63 = -x + 3$$

$$9y = -x + 63$$

$$y = -\frac{1}{9}x + 7$$

Untuk menentukan persamaan garis linear dapat pula dicari dengan menggunakan pola arah kemiringan (*gradient*). Jika *gradient* dinyatakan dengan m, di mana m adalah $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, maka selanjutnya persamaan: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ dapat dituliskan $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$

Atau:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

Contoh:

Jika diketahui m = 2/3 dan titik koordinat A (5, 6), maka tentuka bentuk persamaan garis dan grafik fungsinya.

Jawab:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 6 = 2/3(x - 5)$$

$$y = 2/3x - 3\tfrac{1}{3} + 6$$

$$y = 0{,}67x + 2\tfrac{2}{3}$$

2. Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat adalah suatu fungsi nonlinear (garis tidak lurus) yang variabel bebasnya berpangkat dua. Grafik fungsi kuadrat ini, apabila digambarkan, merupakan garis tidak lurus yang berbentuk parabola.

Bentuk umum fungsi kuadrat ini adalah sebagai berikut.

1. Dalam bentuk $y = f(x)$ yaitu $y = a x^2 + bx + c$

   di mana a, b dan c adalah konstanta.

   x adalah variabel bebas (*independent variable*).

   y adalah variabel tidak bebas/ yang dipengaruhi.

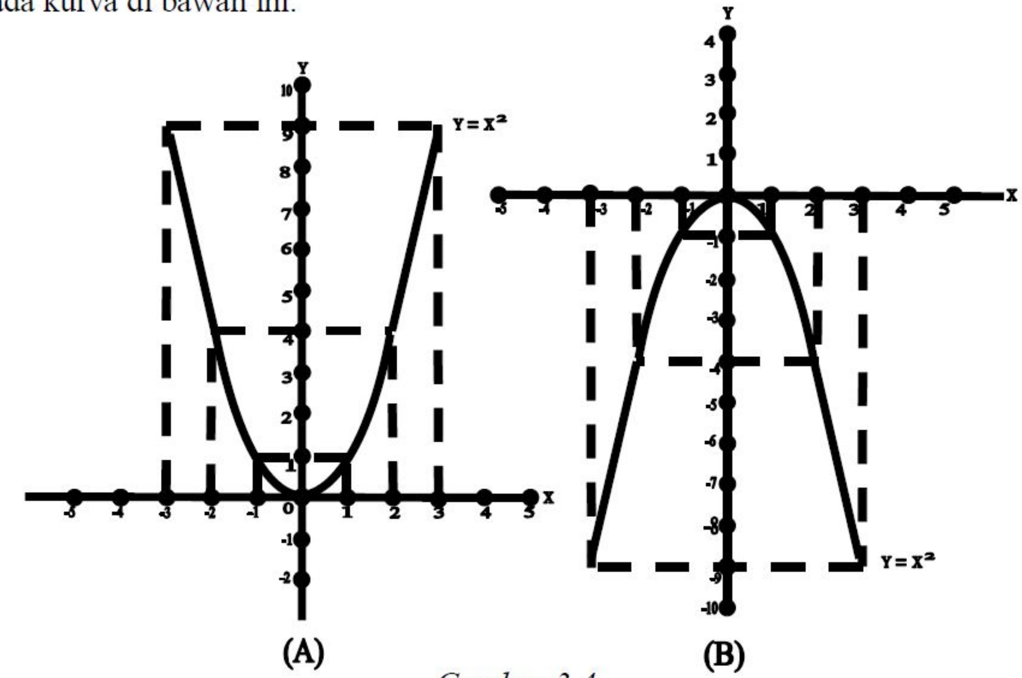
2. Dalam bentuk $x = f(y)$ yaitu: $x = ay^2 + by + c$

   di mana a, b, dan c adalah konstanta.

   y adalah variabel bebas (*independent variable*)

   x adalah variabel tidak bebas/yang dipengaruhi.

Fungsi kuadrat, mempunyai model kurva lengkung (parabola), seperti terlihat pada kurva di bawah ini.



Gambar 3.4.
Kurva parabola

Gambar 3.4. menunjukkan kurva lengkung yang terbuka ke atas dan kurva lengkung yang terbuka ke bawah. Suatu kurva parabola mempunyai satu titik puncak (*vertex*). Titik puncak (*vertex*) adalah titik yang menunjukkan perubahan gerak dari suatu fungsi titik puncak ini juga dikatakan sebagai titik tertinggi untuk kurva terbuka ke bawah dan/atau titik terendah untuk kurva terbuka ke atas (titik ekstrem).

Koordinat titik puncak dari suatu kurva parabola, dinyatakan dengan formulasi: $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$

Keterangan:

$D = (b^2 - 4ac)$

(a, b, dan c) = konstanta dari persamaan kuadrat

Untuk $y = 0$, persamaan $y = ax^2 + bx + c$, fungsi akan memo

adapun untuk menentukan titik potong dengan sumbu x tersebu

persamaan akan menjadi: $ax^2 + bx + c + 0$. Dengan nilai-nil

ditentukan seperti berikut:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Contoh:

Jika diketahui, $f(x) = x^2 - 6x + 4$, maka tentukan titik puncak fungsi

Jawab:

[redacted]

Jika diketahui, $f(x) = x^2 - 6x + 4$, maka tentukan titik puncak fungsi tersebut:

Jawab:

Titik puncak (TP) = $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$

Dari fungsi $f(x) = x^2 - 6x + 4$

Titik potong dengan sumbu y → $x = 0$, maka $y = f(x) = 4$

Titik potong dengan sumbu x → $y = 0$

$x^2 - 6x + 4 = 0$ dari fungsi implisit ini dapat diketahui nilai $a = 1$; $b = -6$, dan $c = 4$, maka:

$D = (b^2 - 4ac) = \{(-6)^2 - 4\,(1)(4)\} = 20$

$$TP = \left(-\frac{(-6)}{2(1)}, \frac{-(20)}{4(1)}\right) = (3, -5)$$

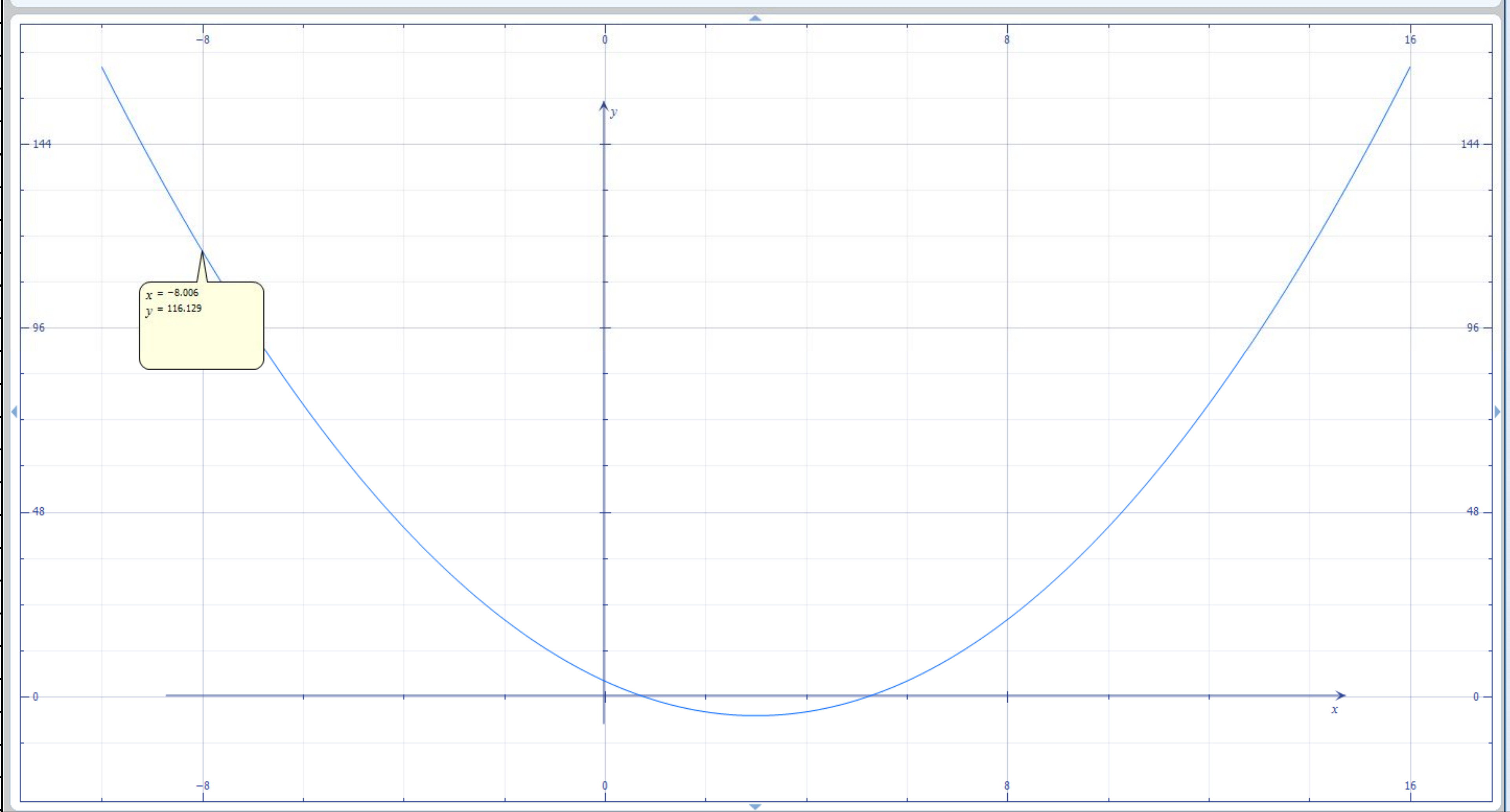
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{20}}{2(1)}$$

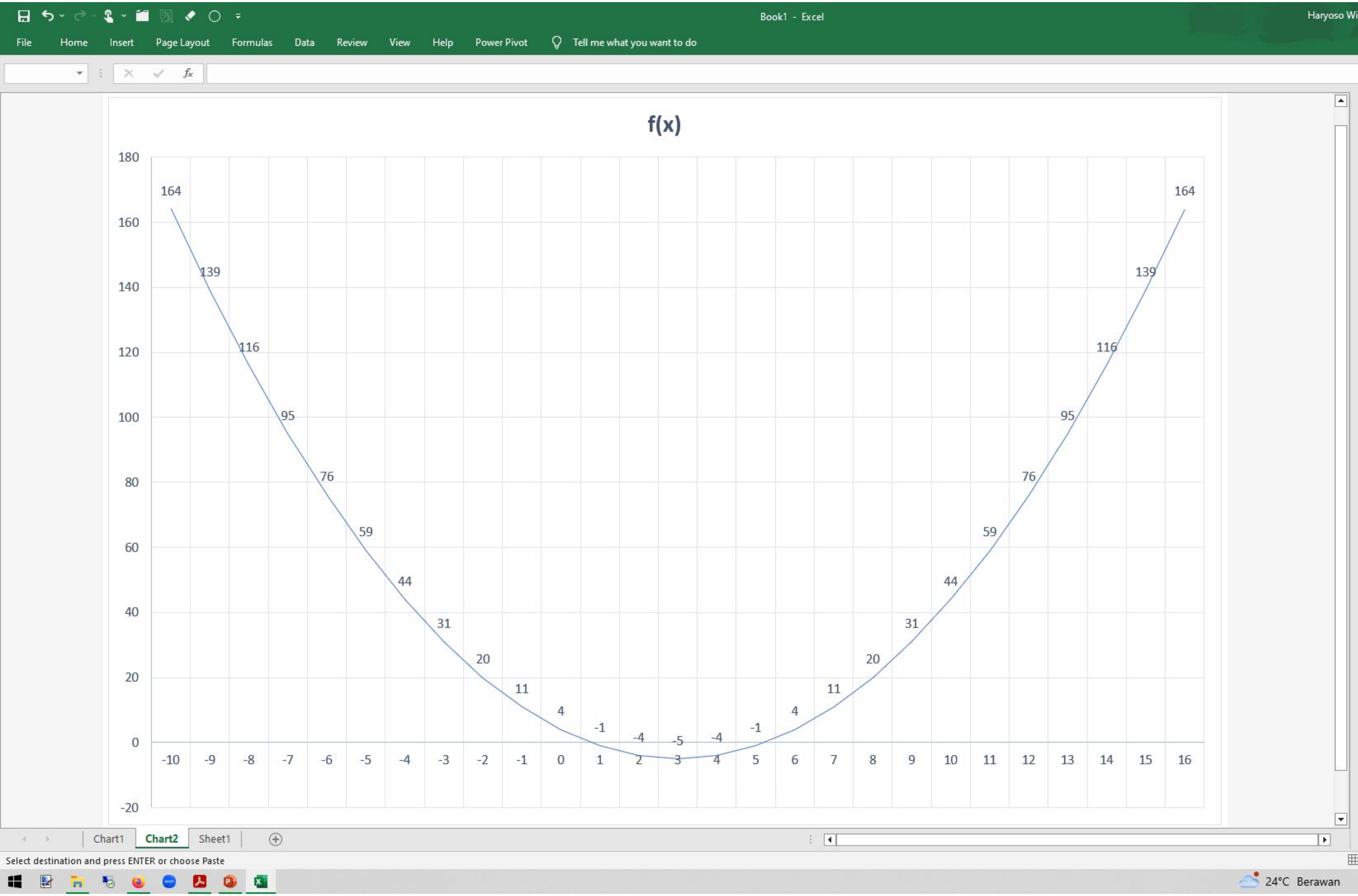
$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 4{,}47}{2}$$

$x_1 = 5{,}24$; dan $x_2 = 0{,}76$

x	f(x)
-10	164
-9	139
-8	116
-7	95
-6	76
-5	59
-4	44
-3	31
-2	20
-1	11
0	4
1	-1
2	-4
3	-5
4	-4
5	-1
6	4
7	11
8	20
9	31
10	44
11	59
12	76
13	95
14	116
15	139
16	164

$y = x^2 - 6x + 4$

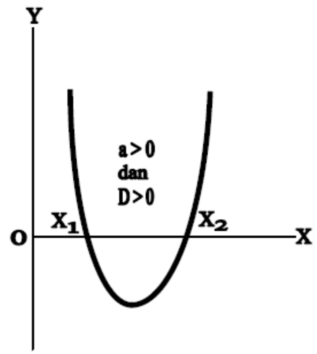


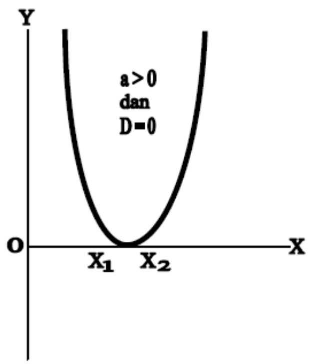


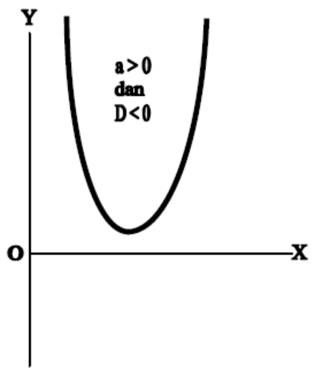
x	f(x)
-10	164
-9	139
-8	116
-7	95
-6	76
-5	59
-4	44
-3	31
-2	20
-1	11
0	4
1	-1
2	-4
3	-5
4	-4
5	-1
6	4
7	11
8	20
9	31
10	44
11	59
12	76
13	95
14	116
15	139
16	164

Bentuk kurva parabola dapat diperhatikan dari nilai a dan nilai diskriminasi D, ada 6 macam bentuk kurva parabola antara lain:

1. Jika $a > 0$ dan $D > 0$, maka kurva parabola akan terbuka ke atas dan memotong sumbu x pada dua titik yang berlainan.
2. Jika $a > 0$ dan $D = 0$, maka kurva parabola akan terbuka ke atas dan menyinggung sumbu x pada dua titik yang berimpit.
3. Jika $a > 0$ dan $D < 0$, maka kurva parabola akan terbuka ke atas dan tidak memotong sumbu x di mana pun.



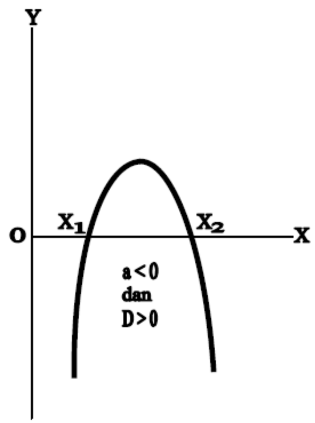




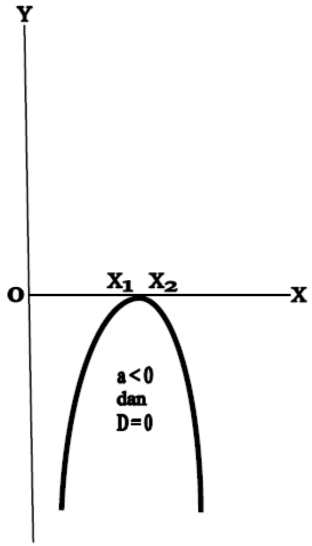
Keterangan:

- Nilai parameter a untuk menyatakan kurva parabola terbuka ke arah mana (atas atau bawah), jika a positif kurva terbuka ke atas dan jika a negatif kurva terbuka ke bawah.
- Nilai diskriminan (D), untuk menyatakan kurva parabola memotong atau tidak terhadap sumbu x, jika $D > 0$ memotong pada dua titik, jika $D = 0$ menyinggung sumbu x dan jika $D < 0$ tidak memotong sumbu x.

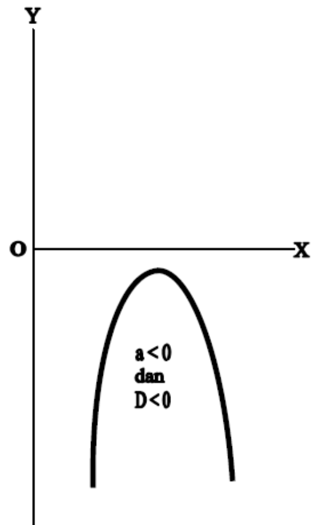
4. Jika $a < 0$ dan $D > 0$, maka kurva parabola akan terbuka ke bawah dan memotong sumbu x pada dua titik yang berlainan.
5. Jika $a < 0$ dan $D = 0$, maka kurva parabola akan terbuka ke bawah dan menyinggung sumbu x pada dua titik yang berimpit.
6. Jika $a < 0$ dan $D < 0$, maka kurva parabola akan terbuka ke bawah dan tidak memotong sumbu x di mana pun:



4



5



6

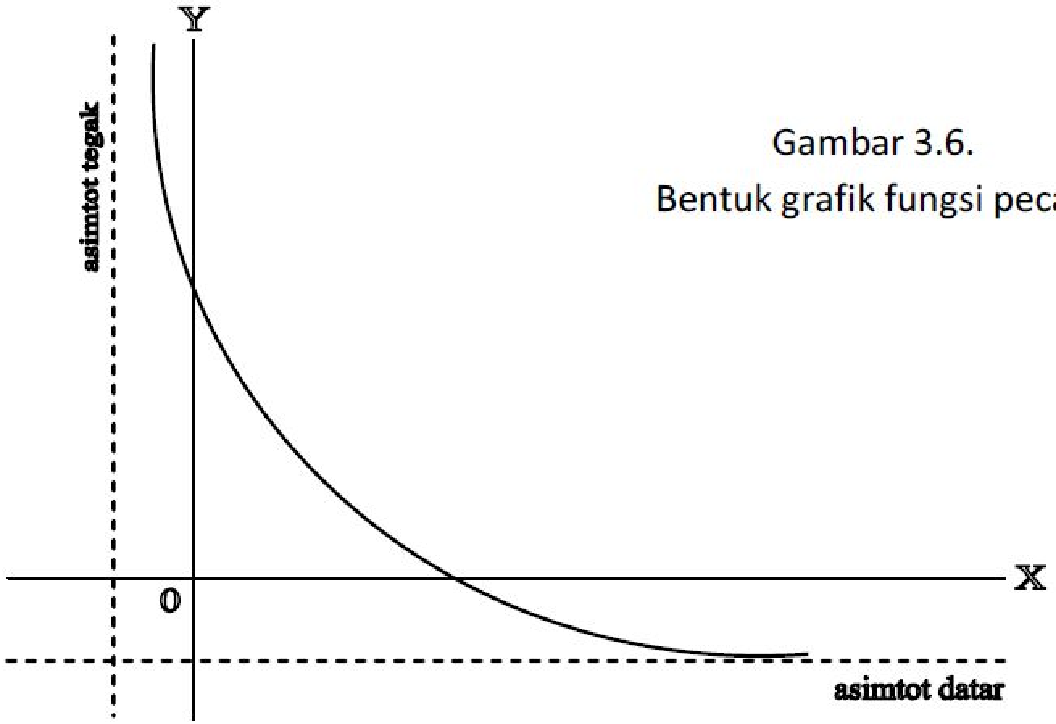
3. Fungsi Pecah

Suatu fungsi nonlinear (garis tidak lurus) yang variabel bebasnya merupakan penyebut disebut dengan fungsi pecah. Grafik fungsi kuadrat ini, apabila digambarkan, merupakan garis tidak lurus yang berbentuk hiperbola. Bentuk umum fungsi pecah bentuk y = f (x):

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

di mana: a, b, c dan d adalah konstanta;
x adalah variabel bebas (*independent variable*);
y adalah variabel tidak bebas (*dependent variable*).

Kurva dari fungsi rasional ini berbentuk hiperbola yang memiliki sumbu *asimtot* (asimtot datar dan asimtot tegak). Sumbu asimtot adalah merupakan sumbu yang didekati oleh kurva, tetapi tidak pernah menyinggung sampai batas tak terhingga.



Gambar 3.6.
Bentuk grafik fungsi pecah

Untuk penggambaran grafik fungsi pecah seperti ini perlu diketahui ciri-ciri matematis yang penting dari fungsi pecah. Setelah mengetahui ciri-ciri matematisnya, penggambarannya membutuhkan bantuan tabel x dan y yang disebut *curve tracing process.* Ada beberapa ciri matematis yang penting dari fungsi pecah dalam bentuk umum seperti di atas. Berikut ini ciri matematis fungsi pecah.

Ada beberapa ciri matematis

a. Titik potong fungsi pecah dengan sumbu y adalah pada

$x = 0$, maka $y = \frac{b}{d}$.

Jadi, titiknya $P\ (0; \frac{b}{d})$

b. Titik potong fungsi pecah dengan sumbu x pada

$y = 0$, maka $0 = \frac{ax + b}{xc + d}$

$ax + b = 0$

$x = \frac{-b}{a}$

Jadi, titik potongnya $Q\ \left(\frac{-b}{a}; 0\right)$.

c. Ciri yang penting dalam fungsi pecah adalah asimtot. Asimtot suatu garis lengkung adalah garis yang tidak dilalui dipotong oleh garis lengkung tersebut, tetapi didekati sampai pada titik tidak tidak terhingga untuk x dan y. Dalam hal fungsi pecah seperti ini, dikenal adanya asimtot datar dan asimtot tegak. Asimtot datar adalah suatu garis lurus yang sejajar atau berimpit dengan sumbu x, yang tidak akan dipotong. Akan tetapi, asimtot ini didekati oleh fungsi pecah sampai pada titik di mana nilai x adalah ~. Jadi, persamaan garis asimtot datar adalah bila x = ~, maka

$$\boldsymbol{y} = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$y = \frac{a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}}$$

Suatu bilangan dibagi dengan ~ yaitu $\frac{b}{\sim}$ atau $\frac{d}{\sim} = 0$

Sehingga: $\boldsymbol{y} = \frac{a+0}{c+0} \rightarrow y = \frac{a}{c}$

d. Asimtot tegak adalah suatu garis lurus yang sejajar atau berimpit dengan sumbu y yang tidak akan terpotong. Akan tetapi, asimtot ini didekati oleh fungsi pecah sampai pada titik nilai y adalah titik terhingga (~) positif atau negatif. Jadi, persamaan garis asimtot tegak adalah bila y = ~, maka:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \rightarrow \sim = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$cx + d = \frac{ax + b}{\sim}$$

$$cx + d = 0$$

$$cx = -d$$

$$x = \frac{-d}{c}$$

sehingga persamaan garis asimtot tegak adalah $x = -\frac{d}{c}$

Contoh :

Apabila fungsi $y = \frac{2x+3}{x+1}$

Maka grafik fungsi pecah ini dapat digambarkan dengan memperhatikan ciri-ciri matematis yang penting dengan bantuan tabel x dan y. Adapun ciri-ciri matematis yang penting dari fungsi pecah ini adalah sebagai berikut:

a. Titik potong fungsi pecah dengan sumbu y adalah pada x = 0, maka y = 3. Jadi titiknya P (0, 3)

b. Titik potong fungsi pecah dengan sumbu x adalah pada kondisi y = 0, maka 0 = 2x + 3, sehingga x = $-1\frac{1}{2}$. Jadi titiknya Q $(-1\frac{1}{2}, 0)$

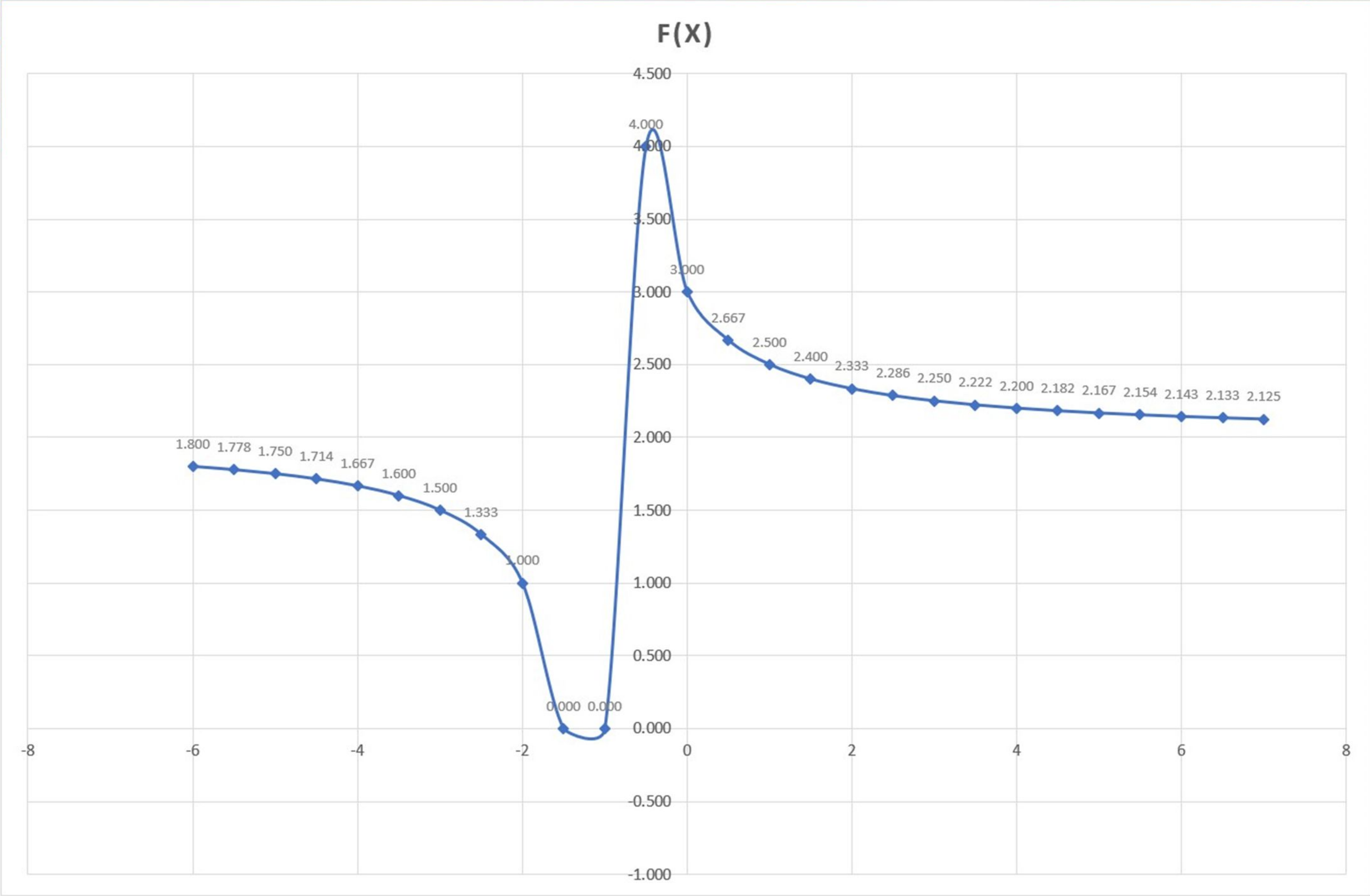
c. Asimtot tegak adalah bila y = ~, maka $\frac{2x+3}{x+1} =$

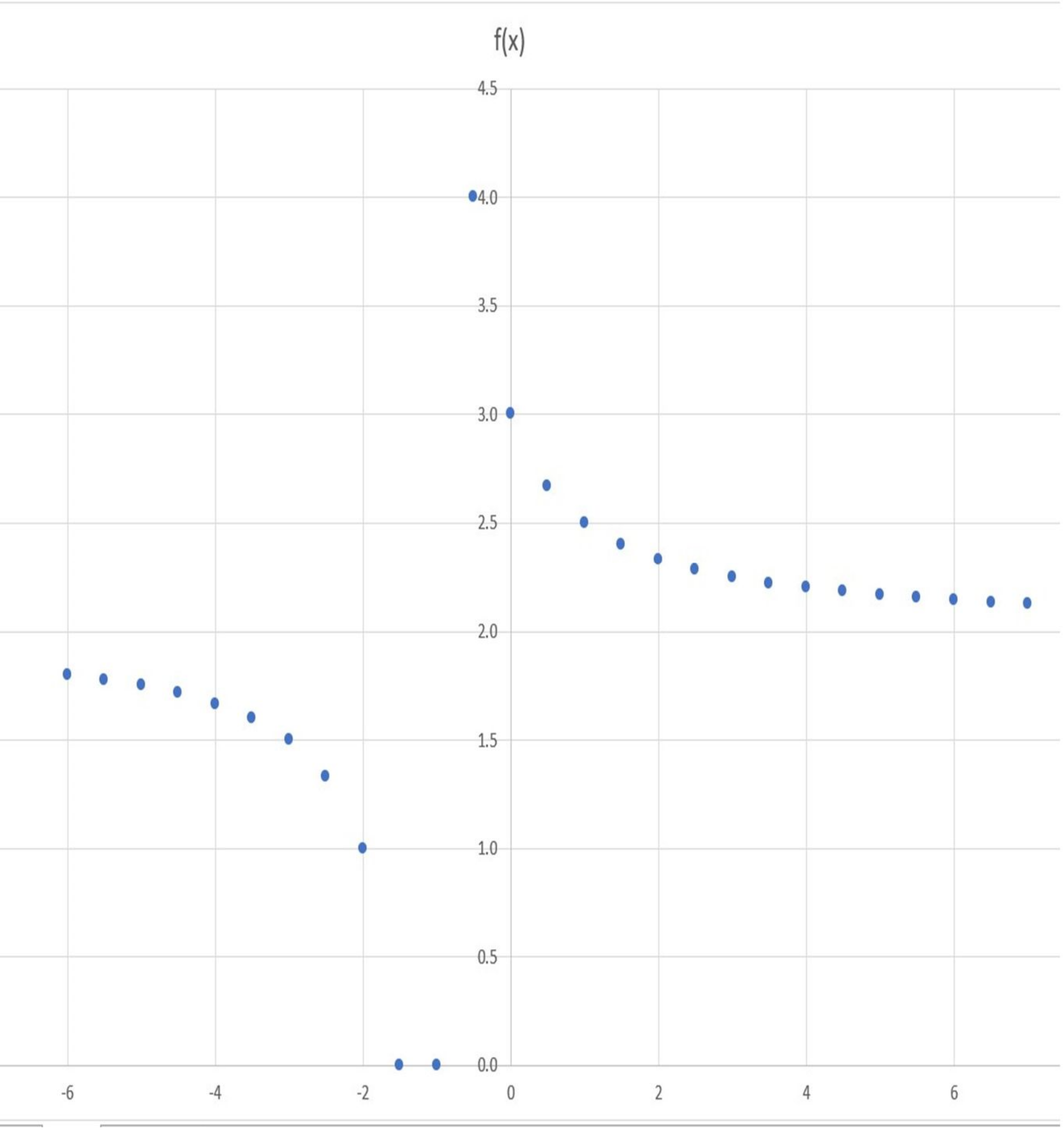
$$x + 1 = \frac{2x + 3}{\sim} \rightarrow x + 1 = 0, \textit{sehingga}\ x = -1$$

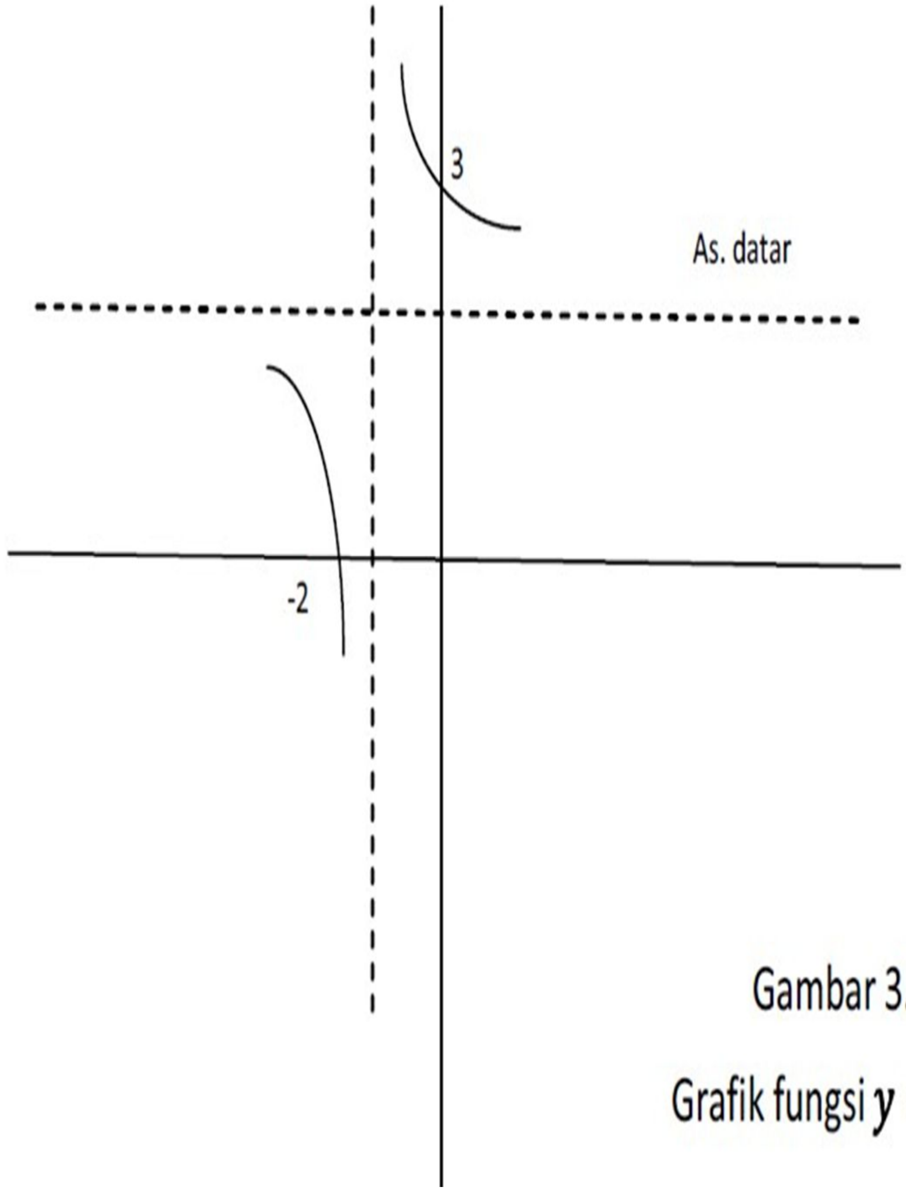
Asimtot datar adalah jika x = ~, maka $y = \frac{2+3/x}{1+1/x} \rightarrow$ y = 2

Jadi persamaan garis asimtot datar adalah y = 2

x	f(x)
-6	1.800
-5.5	1.778
-5	1.750
-4.5	1.714
-4	1.667
-3.5	1.600
-3	1.500
-2.5	1.333
-2	1.000
-1.5	0.000
-1	#DIV/0!
-0.5	4.000
0	3.000
0.5	2.667
1	2.500
1.5	2.400
2	2.333
2.5	2.286
3	2.250
3.5	2.222
4	2.200
4.5	2.182
5	2.167
5.5	2.154
6	2.143
6.5	2.133
7	2.125

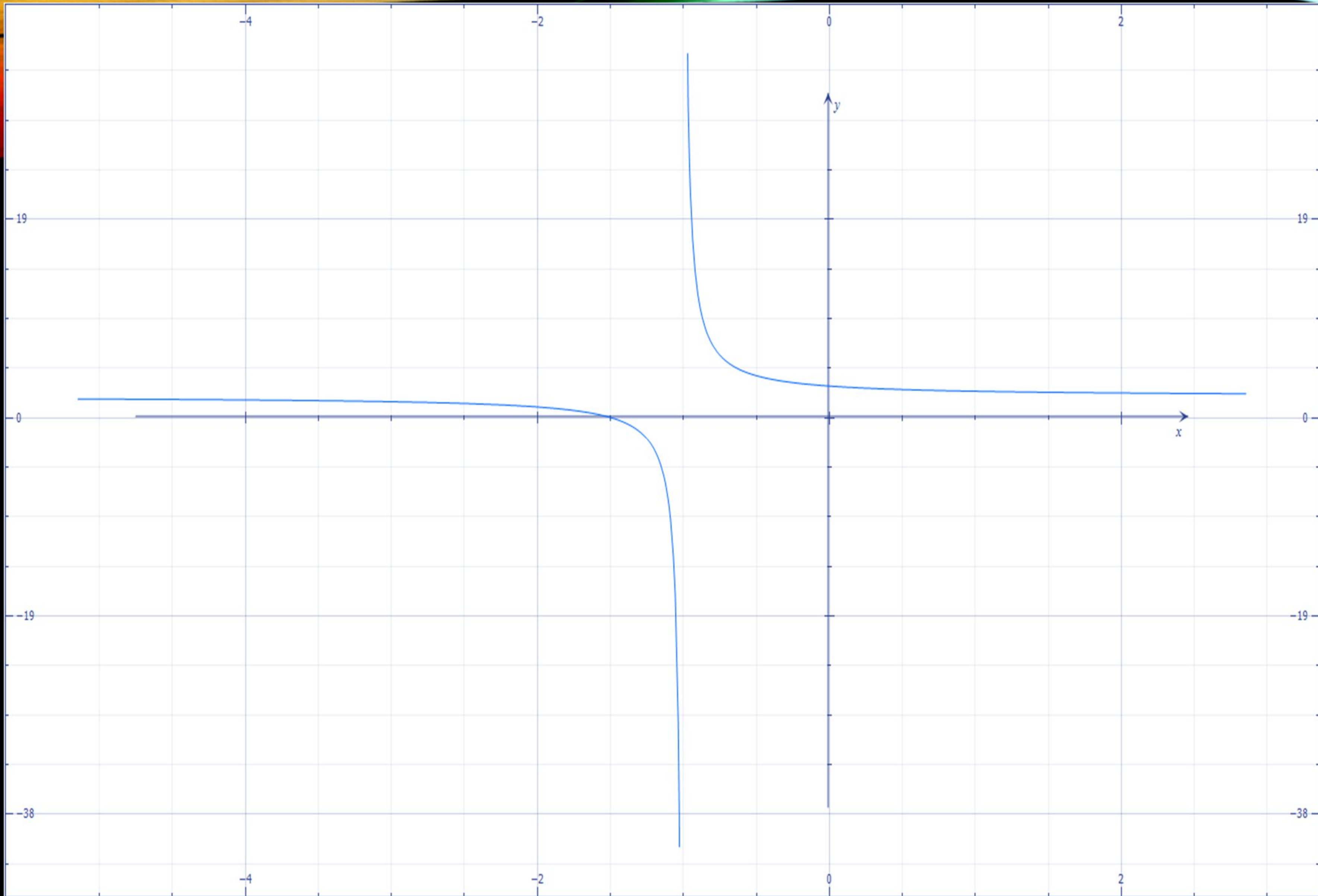






Gambar 3.7.

Grafik fungsi $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$



−4
−2
0
2
19
0
−19
−38
x
y

4. Lingkaran

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik pada suatu bidang yang mempunyai jarak tertentu dari titik pangkalnya (titik pusat), adapun jarak tersebut dikatakan sebagai jari-jari lingkaran.

Bentuk umum suatu lingkaran, dinyatakan dengan persamaan:

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

Di mana:

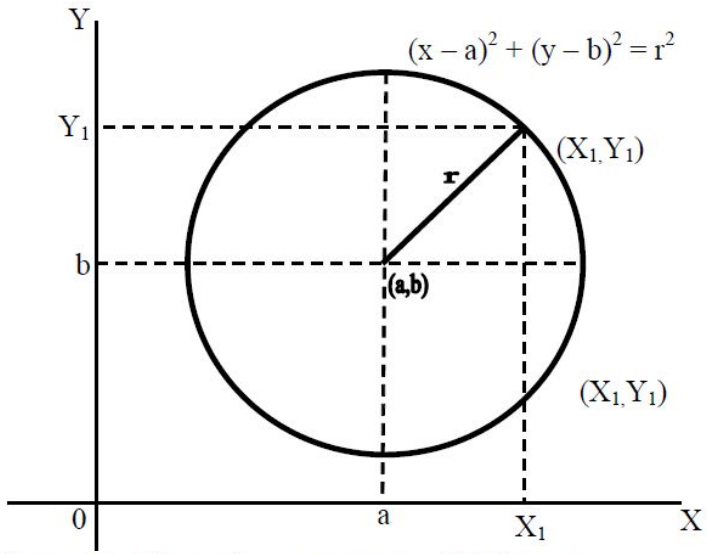
A dan B tidak sama dengan 0 (nol)

A dan B bertanda sama (positif dan/atau negatif)

Persamaan lingkaran dalam bentuk standar ditulis: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

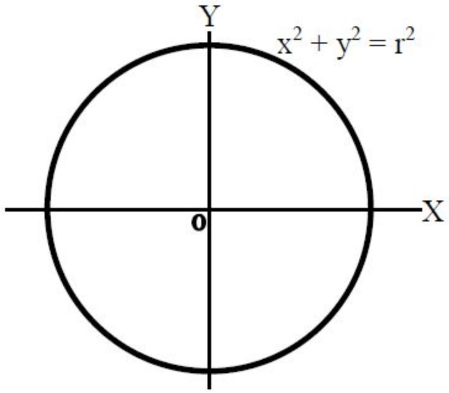
Di mana: A dan b : Pusat lingkaran

r : Jari-jari lingkaran



Jika titik pusat berada pada koordinat (0, 0), maka persamaan lingkaran dinyatakan:

$x^2 + y^2 = r^2$



Gambar 3.9.

Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$

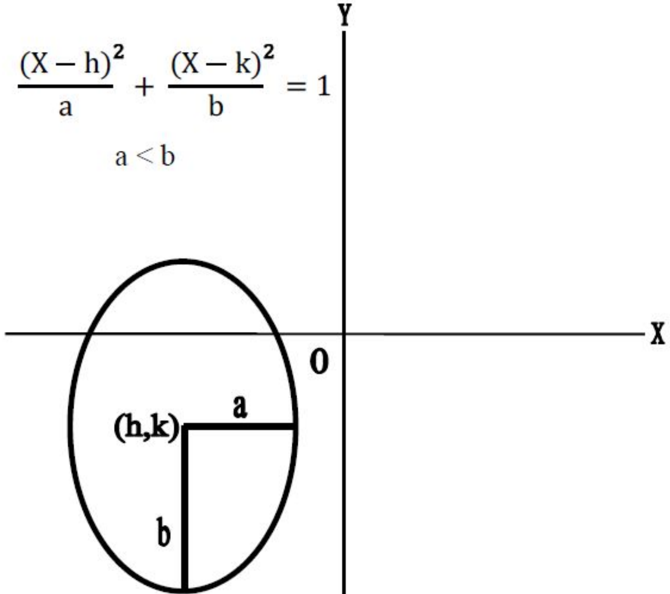
5. Elips

Elips adalah merupakan tempat kedudukan titik-titik pada bidang dengan jumlah jarak dari dua titiknya konstan. Suatu elips mempunyai dua sumbu saling tegak, pertemuan kedua sumbu tersebut dikatakan sebagai titik pusat elips (sumbu panjang dan sumbu pendek), sumbu panjang disebut sumbu utama sedangkan sumbu pendek disebut sebagai sumbu minor. Bentuk umum dari elips:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

[redacted]

- Jika a (sumbu utama) < dari b (sumbu minor), maka posisi elips sejajar dengan sumbu y



Gambar 3.11.
Elips sejajar dengan sumbu y

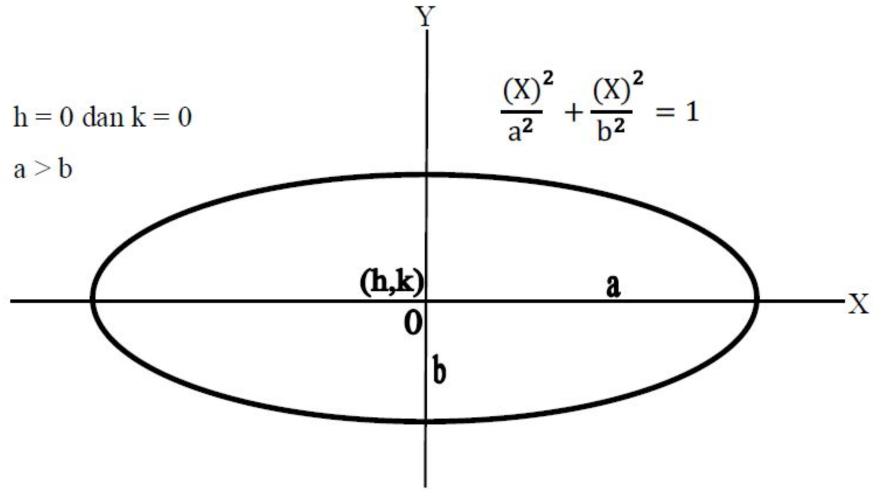
Dimana:

$A \neq B$, A dan B mempunyai tanda yang sama

Bentuk umum standar:

$$\left(\frac{x-h}{a}\right)^2 \left(\frac{x-k}{b}\right)^2 = 1$$

- Jika a (sumbu utama) > b (sumbu minor), maka posisi elips sejajar dengan sumbu x



Gambar 3.10
Elips sejajar dengan sumbu x

[redacted]

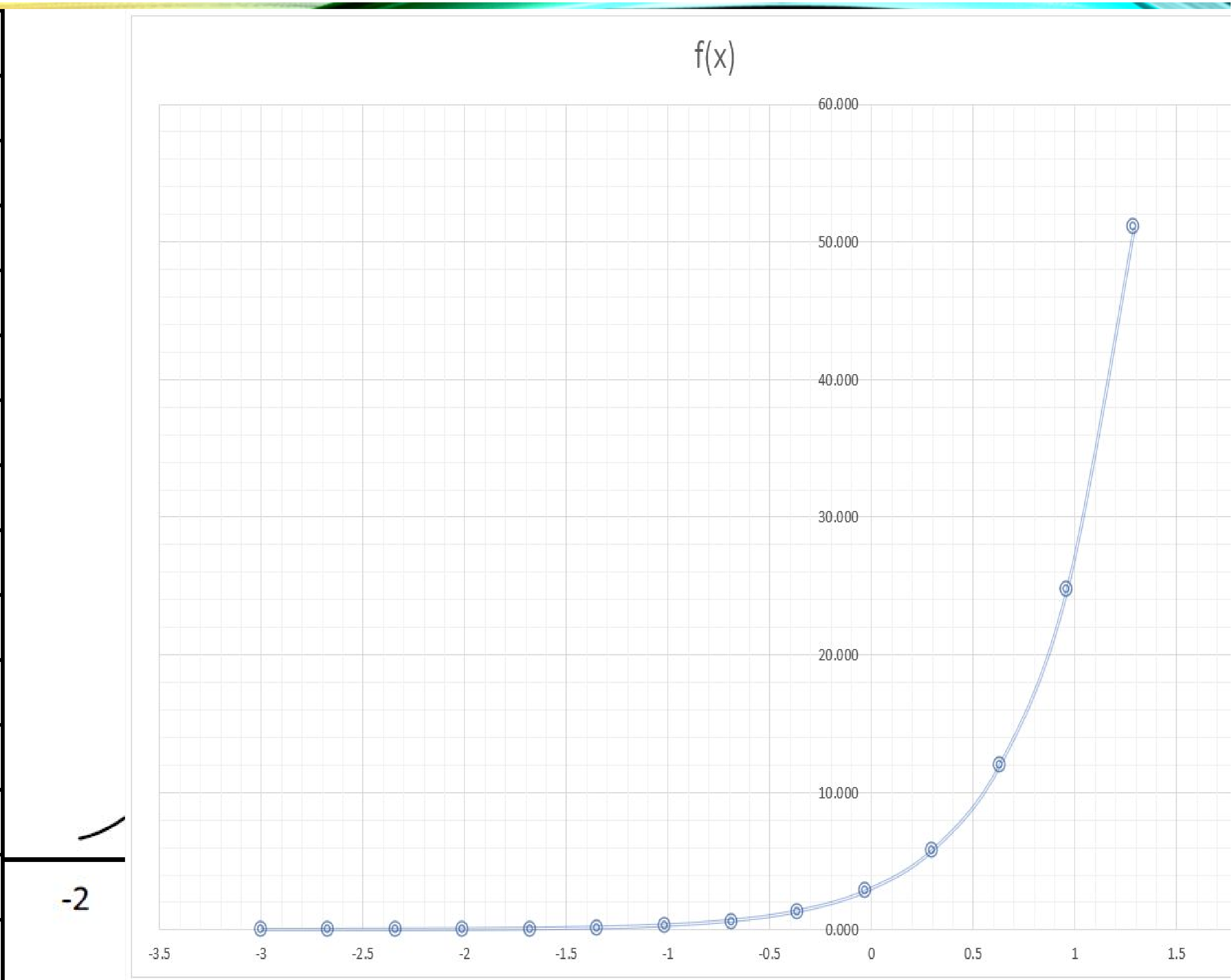
C. Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial adalah fungsi yang variabel x-nya merupakan bilangan pangkat dari suatu konstanta. Sebagai contoh adalah fungsi: $y = a^x$, di mana x dan y merupakan variabel dan a merupakan konstanta. Dalam hal fungsi eksponensial ini, perlu diperhatikan hukum-hukum eksponensial yang penting, yaitu:

1. $a^{\mathbf{0}} = 1$
2. $a^{-\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a^k}}$
3. $a^{\mathbf{1/q}} = \sqrt[\mathbf{q}]{a}$
4. $a^{\mathbf{m}}\, a^{\mathbf{n}} = a^{\mathbf{m-n}}$
5. $(a^{\mathbf{m}})^{\mathbf{k}} = a^{\mathbf{mk}}$.

Dengan cara sederhana yang menggunakan tabel x dan y, maka penggambaran grafik fungsi atau kurva $y = a^x$ tidak sulit, terutama untuk menyusun atau menentukan titik-titiknya. Jika $a > 1$, kurva akan melalui titik (0, 1) dan akan bertambah secara teratur. Selain itu, jika $x \rightarrow - \sim$, maka $y = \rightarrow 0$

x	f(x)
-3	0.004
-2.67	0.008
-2.34	0.018
-2.01	0.036
-1.68	0.075
-1.35	0.154
-1.02	0.319
-0.69	0.659
-0.36	1.360
-0.03	2.809
0.3	5.800
0.63	11.976
0.96	24.728
1.29	51.062



D. Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma adalah suatu fungsi nonlinear (garis tidak lurus). Dalam hal ini variabel bebas (*independent variable*)nya dalam bentuk logaritma, seperti y = a atau log y = a + b log x.

Fungsi logaritma juga merupakan fungsi kebalikan dari fungsi eksponensial, seperti telah diungkapkan sebelumnya, bahwa fungsi eksponensial ditulis: $y = a^x$, (a: konstanta dan x variabel), jika fungsi tersebut dikalikan dengan *log*, maka fungsi logaritma dapat dikatakan sebagai fungsi kebalikan dari fungsi eksponensialnya.

Sebagai gambaran untuk bilangan logaritma, dinyatakan sebagai berikut:

- untuk bilangan dasar 10

  $y = {}^{10}\log x$ (biasa ditulis log x saja)
- untuk bilangan dasar e (2,7183), ditulis:

  $y = {}^{e}\log x$ atau y = inx (logaritma natural)

Aturan Logaritma

Secara umum aturan logaritma dinyatakan sebagai berikut:

1. ${}^{10}\log xy = {}^{10}\log x + {}^{10}\log y$
2. ${}^{10}\log \frac{x}{y} = {}^{10}\log x - {}^{10}\log y$
3. ${}^{10}\log x^y = y\ {}^{10}\log x$

Selanjutnya, pernyataan *${}^{10}\log$ dituliskan log* saja, seperti pada contoh berikut:

- $\log (x + 2)\ (12, -3) = \log(5x + 2) + \log (12x - 3)$
- $\log \frac{(5x+2)}{(12x-3)} = \log (5x + 2) - \log (12x - 3)$
- $\log (5x + 2)^{(12x - 3)} = (12x - 3) \log (5x + 2)$

Untuk bilangan dasar e (2,7183), ditulis dalam bentuk *${}^{e}\log$* (logaritma natural) yang selanjutnya simbol untuk logaritma natural ini dituliskan *"In",* seperti pada contoh berikut.

4. ${}^{e}\log (5x + 2)\ (12x - 3) = {}^{e}\log (5x + 2) + {}^{e}\log (12x - 3)$

   Fungsi di atas dapat dituliskan dalam bentuk:

   $\text{In } (5x + 2)\ (12x - 3) = \text{In } (5x + 2) + \text{In } (12x - 3)$

5. ${}^{e}\log \frac{(5x+2)}{(12x-3)} = {}^{e}\log (5x + 2) - {}^{e}\log (12x - 3)$

   fungsi di atas daapt dituliskan dalam bentuk:

   $\text{In } \frac{(5x+2)}{(12x-3)} = \text{In } (5x + 2) - \text{In } (12x - 3)$

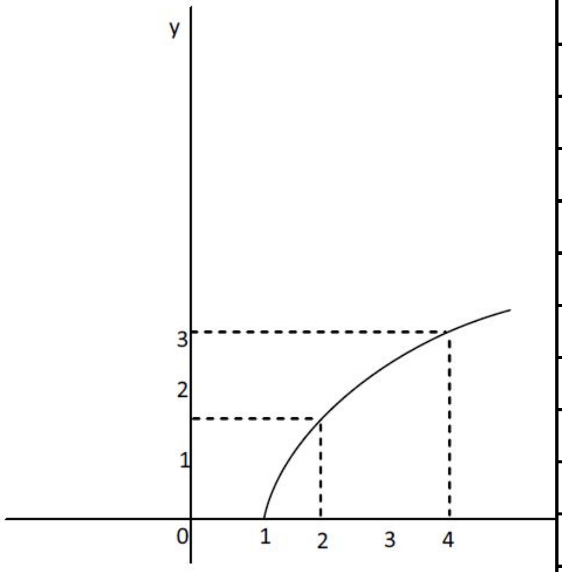
6. ${}^{e}\log (5x + 2)^{(12x - 3)} = (12x - 3)\ {}^{e}\log (5x + 2)$

   Fungsi di atas dapat dituliskan dalam bentuk :

   $\text{In } (5x + 2)^{(12x - 3)} = (12x - 3) \text{ In } (5x + 2)$

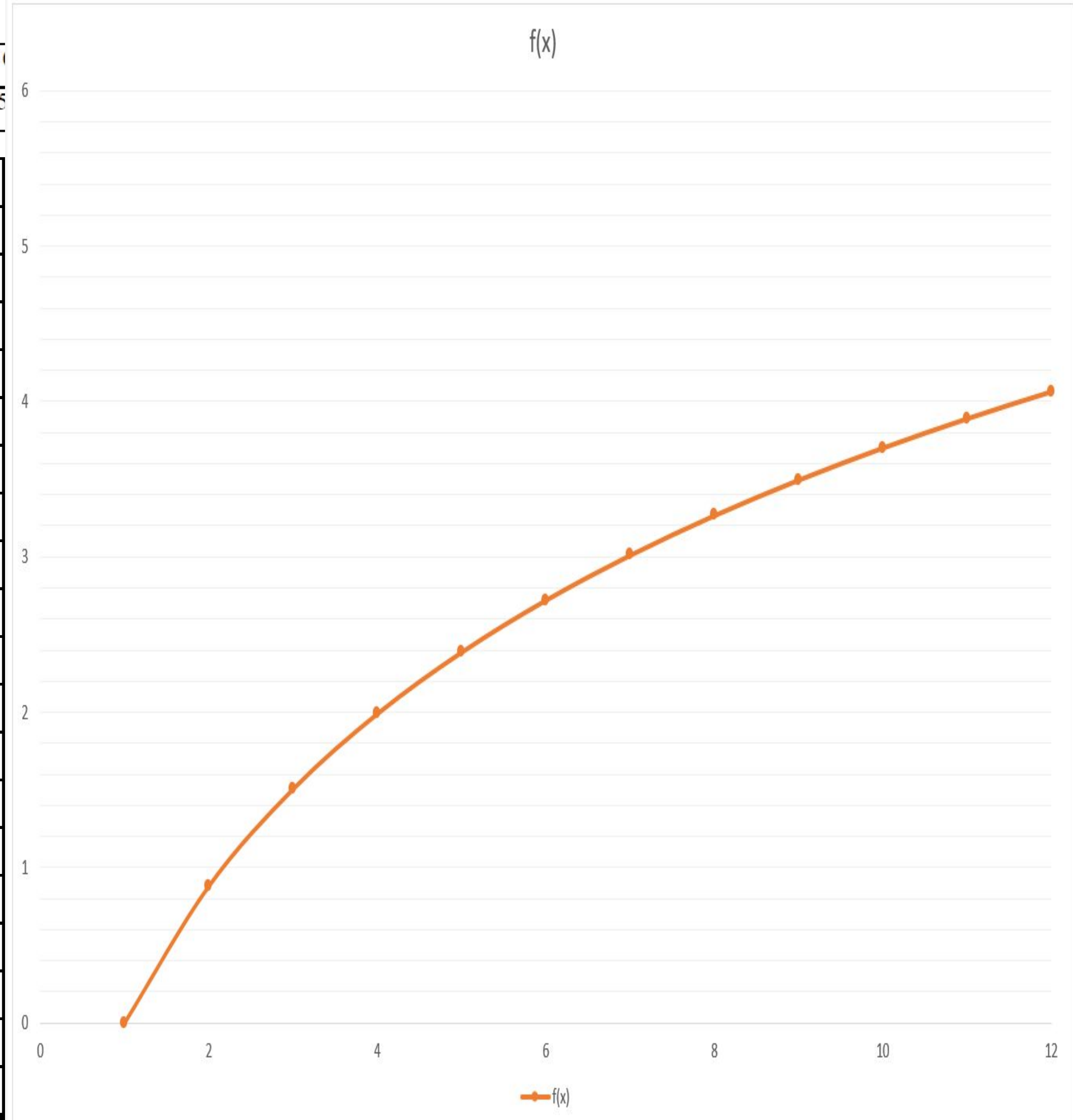
Apabila diketahui fungsi y = 5 log x

x	1	2	3	4	5	6	10
y	0	1,51	2,39	3,01	3,49	3,89	5



Gambar 3.13.
Grafik fungsi y = 5 log x

x	f(x)
1	0.000
1.5	0.880
2	1.505
2.5	1.990
3	2.386
3.5	2.720
4	3.010
4.5	3.266
5	3.495
5.5	3.702
6	3.891
6.5	4.065
7	4.225
7.5	4.375
8	4.515
8.5	4.647
9	4.771
9.5	4.889
10	5.000



E. Perpotongan antara Dua Buah Fungsi

Dua buah fungsi dikatakan berpotongan apabila kedua buah fungsi tersebut mempunyai sebuah titik persekutuan yang disebut titik potong. Titik potong antara kedua buah fungsi diperoleh dengan mempersamakan kedua buah fungsi itu.

Contoh :

Carilah titik potong fungsi-fungsi y = 10 – 2x dan y = x + 2

Contoh :

Carilah titik potong fungsi-fungsi y = 10 – 2x dan y = x + 2

Jawab:

Titik potong antara kedua buah fungsi ini dapat diperoleh dengan mempersamakan kedua buah fungsi tersebut, yaitu:

$y = 10 - 2x$

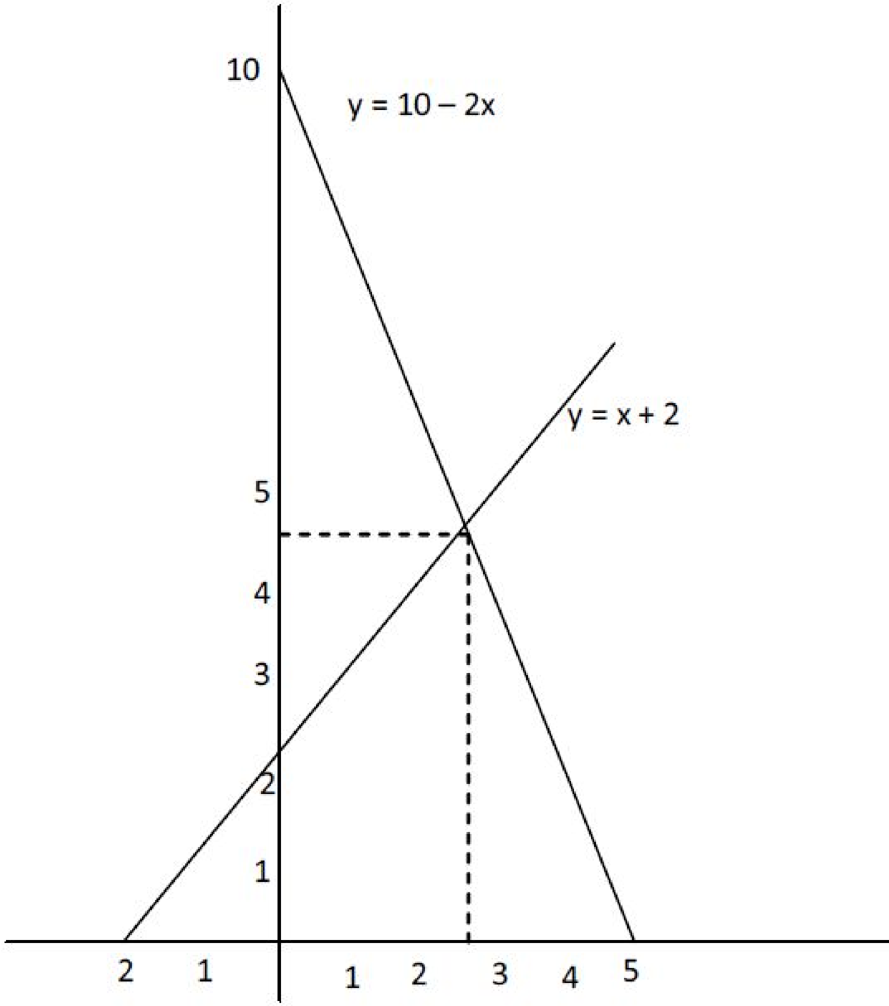
$y = x + 2$

$10 - 2x = x + 2$

$3x = 8$

$x = 2\frac{2}{3}$ dan $y = 4\frac{2}{3}$

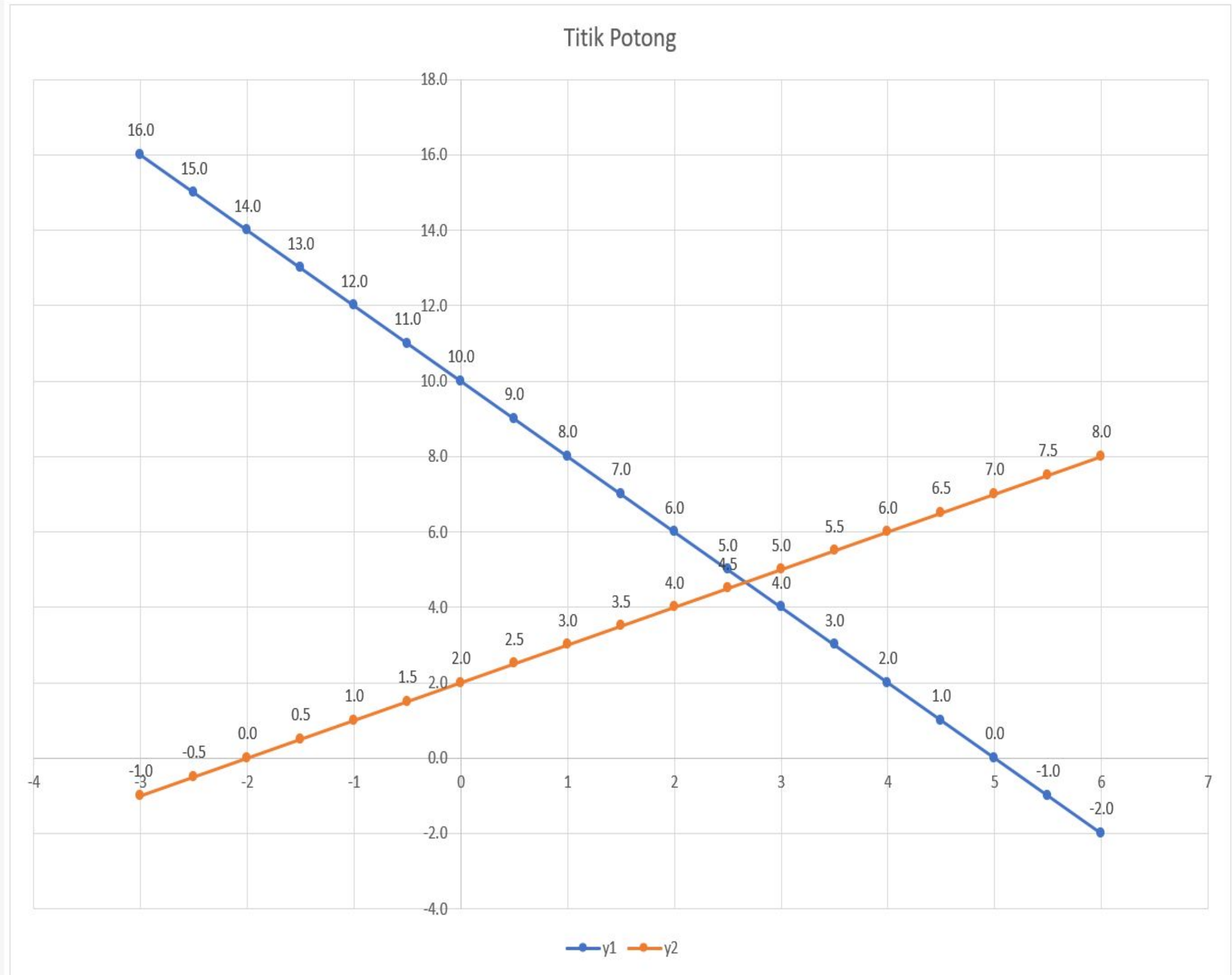
Jadi titik potong fungsi y = 10 – 2x dan y = x + 2 adalah titik $(2\frac{2}{3}; 4\frac{2}{3})$. Grafik fungsi y = 10 – 2x dan y = x + 2 serta titik potongnya dapat dilihat pada gambar

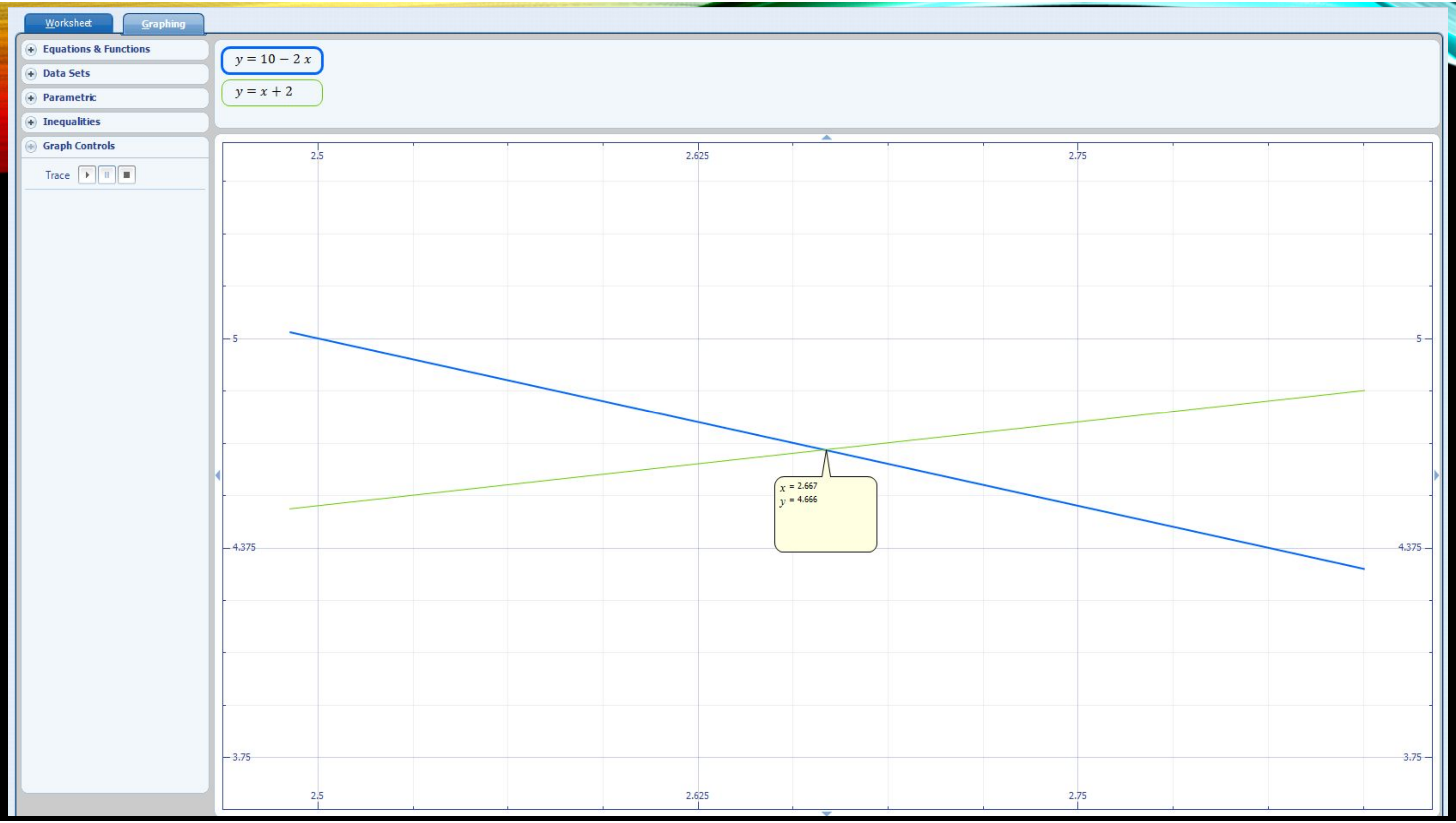


Gambar 3. 14

Grafik fungsi y = 10 – 2x dan y = x + 2

x	y1	y2
-3	16.0	-1.0
-2.5	15.0	-0.5
-2	14.0	0.0
-1.5	13.0	0.5
-1	12.0	1.0
-0.5	11.0	1.5
0	10.0	2.0
0.5	9.0	2.5
1	8.0	3.0
1.5	7.0	3.5
2	6.0	4.0
2.5	5.0	4.5
3	4.0	5.0
3.5	3.0	5.5
4	2.0	6.0
4.5	1.0	6.5
5	0.0	7.0
5.5	-1.0	7.5
6	-2.0	8.0





Worksheet
Graphing
Equations & Functions
Data Sets
Parametric
Inequalities
Graph Controls
Trace
y = 10 − 2 x
y = x + 2
2.5
2.625
2.75
5
4.375
3.75
x = 2.667
y = 4.666

PENGGAMBARAN FUNGSI NON-LINIER PADA MATEMATIKA

- Fungsi non-linier dalam matematika adalah fungsi yang tidak memiliki hubungan linear antara variabel input dan output. Dalam penggambaran grafik, fungsi non-linier cenderung memiliki kurva yang tidak lurus, atau berubah secara tiba-tiba dan tidak terduga.
- Contoh dari fungsi non-linier adalah fungsi kuadrat, yang memiliki persamaan umum $y = ax^2 + bx + c$, di mana a, b, dan c adalah konstanta, dan x adalah variabel input. Fungsi kuadrat memiliki grafik parabola yang membentuk kurva U atau terbalik.
- Selain fungsi kuadrat, ada banyak jenis fungsi non-linier lainnya, seperti fungsi eksponensial, fungsi logaritmik, dan fungsi trigonometri seperti sinus dan kosinus.
- Penggambaran grafik dari fungsi non-linier dapat membantu kita memahami hubungan antara variabel input dan output, serta membantu dalam memecahkan masalah matematika dan ilmu pengetahuan lainnya.

1. PENGGAL

- Penggal suatu kurva adalah proses membagi kurva menjadi beberapa bagian atau segmen kecil yang lebih mudah dianalisis atau dipahami. Dengan membaginya menjadi beberapa titik-titik yang terletak pada kurva tersebut. Kemudian, titik-titik tersebut digabungkan dengan garis lurus, sehingga membentuk beberapa segmen garis yang merepresentasikan kurva asli.
- Metode lainnya adalah dengan menggunakan pendekatan matematika, seperti metode interpolasi atau metode regresi. Dalam metode interpolasi, kurva asli diaproksimasi oleh kurva polinomial yang melewati setiap titik data. Sedangkan dalam metode regresi, kurva asli diaproksimasi oleh kurva polinomial yang sesuai dengan trend data.
- Penggalan kurva sangat penting dalam analisis data dan pemodelan matematika, karena dapat membantu mengidentifikasi pola, tren, atau hubungan antara variabel yang terkait dengan kurva tersebut.

FUNGSI NON LINIER

- Fungsi non Linier dapat berupa fungsi Kuadrat, fungsi Eksponen, fungsi Logaritma, fungsi pecahan, dll.
- Gambar dari fungsi non linier ini bukan suatu garis lurus, melainkan suatu garis lengkung.
- Fungsi kuadrat disajikan dalam gambar berupa suatu parabola vertikal & horizontal.
- Fungsi rasional yang gambarnya berbentuk hiperbola, fungsi kubik, lingkaran & elips.

FUNGSI KUADRAT

- Fungsi Kuadrat adalah Fungsi yang pangkat tertinggi dari variabel adalah dua.
- Bentuk umum dari fungsi Kuadrat :

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

- dimana : Y = Variabel terikat

  X = Variabel bebas

  a, b = koefisien, Dan $a \neq 0$

  c = konstanta.

CARA MENGGAMBAR FUNGSI KUADRAT

a. Dengan cara sederhana
   (*curve traicing process)*

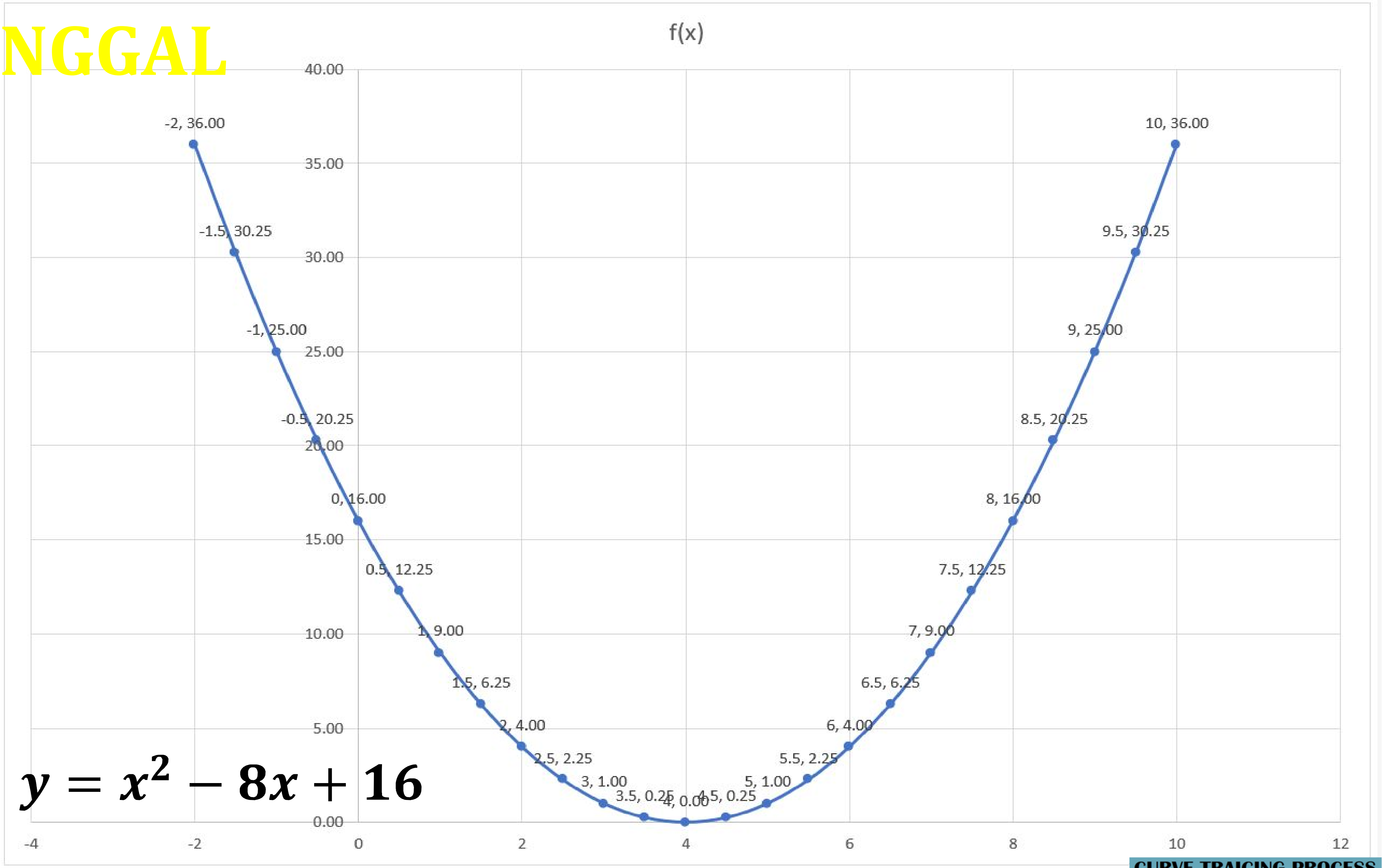
b. Dengan cara matematis
   (menggunakan ciri-ciri yang penting)

CURVE TRAICING PROCESS

- Yaitu dengan menggunakan tabel x dan y, dimana kita tentukan dulu nilai x sebagai variabel bebas, maka dengan memasukkan beberapa nilai x kita akan memperoleh nilai y.

1. PENGGAL

x	f(x)
-2	36.00
-1.5	30.25
-1	25.00
-0.5	20.25
0	16.00
0.5	12.25
1	9.00
1.5	6.25
2	4.00
2.5	2.25
3	1.00
3.5	0.25
4	0.00
4.5	0.25
5	1.00
5.5	2.25
6	4.00
6.5	6.25
7	9.00
7.5	12.25
8	16.00
8.5	20.25
9	25.00
9.5	30.25
10	36.00



$$y = x^2 - 8x + 16$$

CURVE TRAICING PROCESS

CARA MATEMATIS

- Yaitu dengan menggambarkan ciri-ciri penting dari fungsi kuadrat, diantaranya :

1. Titik potong fungsi dengan sumbu y, pada x=0, maka y=d. Jadi titiknya adalah A(0,d).
2. Titik potong fungsi dengan sumbu x, pada y=0,maka kita harus mencari nilai Diskriminan (D) terlebih dahulu:

   Nilai diskriminan ini akan menentukan apakah parabola vertikal memotong, menyinggung dan atau tidak memotong maupun menyinggung sumbu x.

CARA MATEMATIS

✓ Jika nilai D = $b^2 - 4ac$ adalah negatif maka tidak terdapat titik potong pada sumbu x.

✓ Jika nilai D = $b^2 - 4ac$ adalah positif maka terdapat dua titik potong pada sumbu x.

yaitu pada titik : $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

titik : $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$

✓ Jika nilai D = $b^2 - 4ac$ adalah nol maka terdapat satu titik potong dengan sumbu x.

Titik : $\left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$

CARA MATEMATIS

3. Titik puncak, yaitu titik dimana arah dari grafik fungsi kuadrat kembali ke arah semula.

   Titik puncak :
   $$(x, y) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}\right)$$

4. Sumbu simetri adalah sumbu yang membagi/membelah dua grafik fungsi kuadrat tersebut menjadi dua bagian yang sama besar.

   Sumbu simetri : $x = \frac{-b}{2a}$

CONTOH

Gambarkan grafik fungsi $y = x^2 - 5x + 6$.

1. Titik potong fungsi dengan sumbu y, pada x=0, maka y=6. Jadi titiknya adalah A(0,6).
2. Titik potong fungsi dengan sumbu x, pada y=0,
   $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$
   Karena D=1 > 0, maka terdapat dua buah titik potong dengan sumbu x.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{(2)(1)} = \frac{5+1}{2} = 3$$

jadi titiknya B_1 (3,0)

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{(2)(1)} = \frac{5-1}{2} = 2$$

jadi titiknya B_2 (2,0)

CONTOH

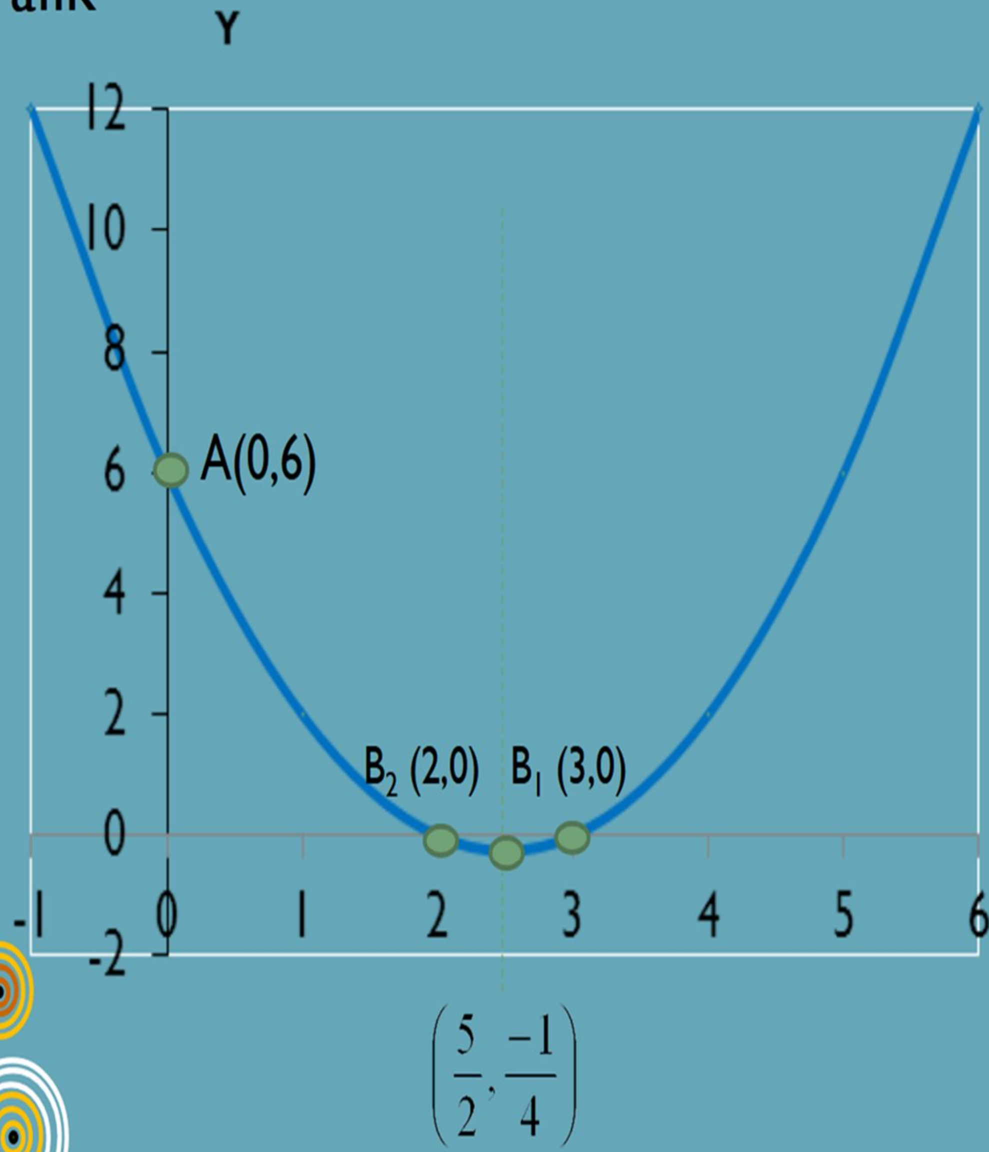
3. Titik puncak :

$$(x, y) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{-1}{4} \right)$$

4. Sumbu simetri :

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{2}$$

Grafik



1.Titik potong fungsi dengan sumbu y, pada x=0, maka y=d. Jadi titiknya adalah A(0,d).

2.Titik potong fungsi dengan sumbu x, pada y=0,maka kita harus mencari nilai Diskriminan (D) terlebih dahulu:

✓Jika nilai $D = b^2 - 4ac$ adalah positif maka terdapat dua titik potong pada sumbu x.

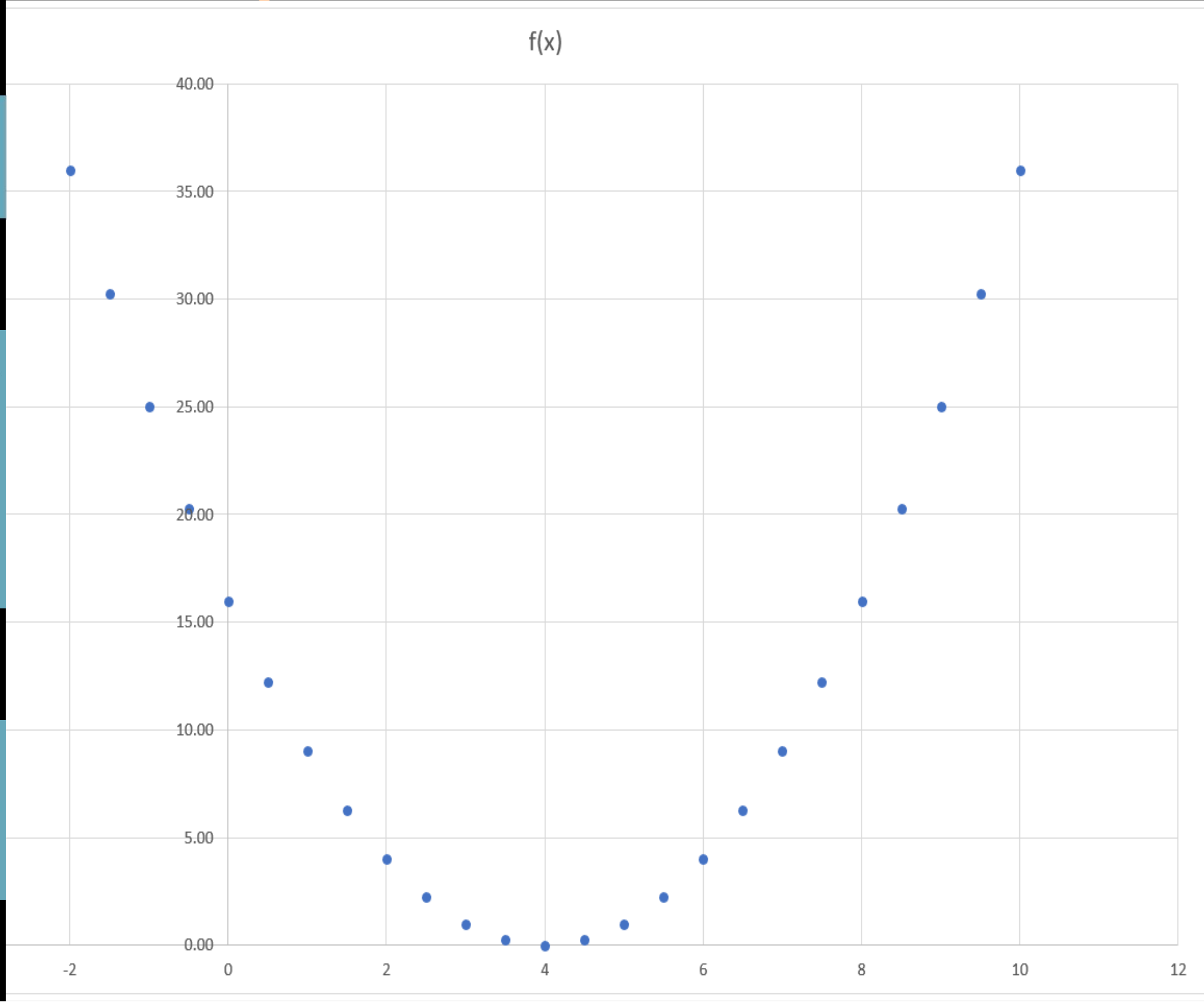
yaitu pada titik : $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

titik : $(x_1 , 0)$ dan $(x_2 , 0)$

✓Jika nilai $D = b^2 - 4ac$ adalah nol maka terdapat satu titik potong dengan sumbu x.

Titik : $\left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$

$$y = x^2 - 8x + 16$$



LATIHAN

1. Gambarlah grafik fungsi

   a. $y = 2x^2 - 9x + 12$

   b. $y = -x^2 + 8x - 15$

2. Jika diketahui fungsi :

   $y = 4 - x^2$ dan $y = 2x^2 - 5x + 4$

   a. Carilah titik potong antara kedua fungsi tersebut

   b. Gambarlah grafik kedua fungsi tersebut.

Pembentukan Persamaan Linier :

Tentukan persamaan liniernya !

1. Diketahui titik A(2,3) & titik B(6,5).
2. Diketahui titik A(2,3) & lereng garisnya/gradient adalah 0,5.
3. Diketahui penggal & lereng garis y = f(x) adalah 2 & 0,5.
4. Diketahui penggal suatu garis pada sumbu vertical & sumbu horizontal masing-masing adalah 2 & -4.

Untuk menentukan persamaan garis linear dapat pula dicari dengan menggunakan pola arah kemiringan (*gradient*). Jika *gradient* dinyatakan dengan m, di mana m adalah $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, maka selanjutnya persamaan: $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ dapat dituliskan $\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$

G Pembentukan Persamaan Linear ⇨ 113
1. Cara Dwi-Koordinat ⇨ 113
2. Cara Koordinat-Lereng ⇨ 114
3. Cara Penggal-Lereng ⇨ 114
4. Cara Dwi-Penggal ⇨ 115

Pencarian Akar-akar Persamaan Linier :

Carilah nilai variable-variable x & y dari dua persamaan berikut : $2x + 3y = 21$ & $x + 4y = 23$ dengan cara :

1. Substitusi [2 cara]
2. Eliminasi [2 cara]
3. Determinan → Next

H. Pencarian Akar-akar Persamaan Linear

1. Cara Subtitusi ⇨ 115
2. Cara Eliminasi ⇨ 116
3. Cara Determinan ⇨ 117

Pencarian Akar-akar Persamaan Linier > Determinan

2 variable (x & y) atau 2 persamaan :

1. $a.x + b.y = c$ &
2. $d.x + e.y = f$
3. $x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{bmatrix} c & b \\ f & e \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}} = \frac{c.e - f.b}{a.e - d.b}$
4. $y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{bmatrix} a & c \\ d & f \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}} = \frac{a.f - d.c}{a.e - d.b}$

Pencarian Akar-akar Persamaan Linier > Determinan

2x + 3y = 21 & x + 4y = 23

a.x + b.y = c & d.x + e.y = f

$$1.\ x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{bmatrix} c & b \\ f & e \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix}} = \frac{c.e - f.b}{a.e - d.b} = \frac{.-.}{.-.}$$

$$2.\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{bmatrix} a & c \\ d & f \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix}} = \frac{a.f - d.c}{a.e - d.b} = \frac{.-.}{.-.}$$

Pencarian Akar-akar Persamaan Linier > Determinan

3 variable (x, y & z) atau 3 persamaan :

1. $a.x + b.y + c.z = k$,
2. $d.x + e.y + f.z = l$ &
3. $g.x + h.y + i.z = m$

4. $$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{bmatrix} k & b & c \\ l & e & f \\ m & h & i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}} =$$

5. $$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{bmatrix} a & k & c \\ d & l & f \\ g & m & i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}} =$$

6. $$z = \frac{D_z}{D} = \frac{\begin{bmatrix} a & b & k \\ d & e & l \\ g & h & m \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}} =$$

Pencarian Akar-akar Persamaan Linier > Determinan

3 variable (x, y & z) / 3 persamaan :

$x + 2.y - z = 0$,

$2.x + 5.y - 2.z = 14$ &

$y - 3.z = -7$

↓

$a.x + b.y + c.z = k$ → 1 ; 2 ; -1 ; 0

$d.x + e.y + f.z = l$ → 2 ; 5 ; -2 ; 14

$g.x + h.y + i.z = m$ → 0 ; 1 ; -3 ; -7

1. $$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{bmatrix} k & b & c \\ l & e & f \\ m & h & i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}} =$$

2. $$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{bmatrix} a & k & c \\ d & l & f \\ g & m & i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}} =$$

3. $$z = \frac{D_z}{D} = \frac{\begin{bmatrix} a & b & k \\ d & e & l \\ g & h & m \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}} =$$

Pencarian Akar-akar Persamaan Linier > Determinan

3 variable (x, y & z) / 3 persamaan :

*x + **2**.y – **z** = **0** ,*

***2**.x + **5**.y – **2**.z = **14** &*

*y – **3**.z = **-7***

↓

***a**.x + **b**.y + **c**.z = **k** → 1 ; 2 ; -1 ; 0*

***d**.x + **e**.y + **f**.z = **l** → 2 ; 5 ; -2 ; 14*

***g**.x + **h**.y + **i**.z = **m** → 0 ; 1 ; -3 ; -7*

1. $$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 14 & 5 & -2 \\ -7 & 1 & -3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}} = \frac{63}{-3} = -21$$

2. $$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 14 & -2 \\ 0 & -7 & -3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}} = \frac{-42}{-3} = 14$$

3. $$z = \frac{D_z}{D} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 14 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}} = \frac{-21}{-3} = 7$$

Selesai