BAB 11
MATRIKS

A. Pengertian Matriks

Salah satu hasil penemuan penting dalam matematika adalah matriks dan vektor, yang merupakan pengembangan lanjutan dari sistem persamaan linier. Sehingga aljabar matriks dan aljabar vektor sering disebut pula dengan istilah aljabar linier. Pada bab 11 ini kita akan menjelaskan hal ikhwal dasar yang berkenaan dengan matriks. Konsep-konsep matriks serta kaidah-kaidah pengoperasiannya dijelaskan secara bertahap, satu demi satu.

Matriks secara umum dapat didefinisikan sebagai suatu susunan bilangan dalam bentuk empat persegi panjang (Supangat, 2006). Matriks dapat pula didefinisikan sebagai kumpulan bilangan yang disajikan secara teratur dalam baris dan kolom yang membentuk suatu persegi panjang, serta termuat diantara sepasang tanda kurung (Dumairy, 2007).

Secara umum, suatu matriks dituliskan sebagai:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Penulisan matriks dapat menggunakan tanda kurung bisasa atau tanda kurung siku. Bilangan-bilangan yang terkandung di dalam suatu matriks dinamakan unsur. Jajaran horizontal unsur-unsur matriks dinamakan baris, sedangkan jajaran vertikal unsur-unsur matriks dinamakan kolom.

Unsur suatu matriks secara umum dilambangkan dengan notasi a_{ij} , *i* menunjukkan baris sedangkan *j* menunjukkan kolom. Demikian a_{ij} berarti unsur matriks A pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j*.

Matriks terdiri atas satu atau sejumlah baris dan satu atau sejumlah kolom, tetapi jumlah baris dan jumlah kolom suatu matriks tidak harus sama. Matriks yang terdiri atas *m* baris dan *n* kolom dinamakan matriks berukuran *m* x *n* atau matriks berorde *m* x *n*. Dengan demikian banyaknya baris dan kolom melambangkan ukuran atau orde atau dimensi dari matriks yang bersangkutan. Matriks yang jumlah barisnya sama dengan jumlah kolomnya (*m* = *n*) dinamakan matriks bujursangkar (*square matrix*).

Matriks tidak mempunyai nilai numerik. Hal ini memberikan makna bahwa meskipun matriks merupakan suatu kumpulan bilangan, tetapi ia sendiri tidak melambangkan sesuatu bilangan. Hal ini berbeda dengan determinan, yang bersifat numerik. Selain dilambangkan dengan huruf besar bercetak tebal, matriks sering pula dituliskan dengan lambang unsur umumnya dikurung, misalnya:

$A = (a_{ij}) = [a_{ij}]$ atau ;

$A_{m \times n} = (a_{ij})_{mxn} = [a_{ij}]_{m \times n}$

Contoh-contoh Matriks

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 3 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Pada matriks yang pertama merupakan contoh dari matriks yang memiliki orde 2 x 3, sebab memiliki 2 baris dan 3 kolom. Kemudian berikutnya ialah matriks dengan orde 3 x 2, sebab memiliki 3 baris dan 2 kolom. Sedangkan yang terakhir adalah matriks bujur sangkar karena memiliki orde yang sama yaitu 2 x 2. Jika matriks pertama, kedua dan ketiga masing-masing diberi nama **X, Y,** dan **Z**, maka dapatlah dituliskan: $\mathbf{X}_{2 \times 3}$, $\mathbf{Y}_{3 \times 2}$, dan $\mathbf{Z}_{2 \times 2}$.

Berikutnya apakah yang dimaksud dengan vektor. Secara umum vektor dapat didefinisikan sebagai bentuk matriks khusus yang hanya mempunyai satu baris atau satu kolom. Dalam hal ini dibedakan dua macam vektor yaitu vektor-baris dan vektor-kolom. Vektor baris tak lain adalah matriks sebaris atau matriks barbaris tunggal. Sedangkan vektor kolom adalah matriks sekolom atau matriks berkolom tunggal.

Suatu vektor biasanya dilambangkan dengan sebuah huruf kecil bercetak tebal atau huruf kecil biasa beranak-panah di atasnya. Kecuali itu bisa pula dilambangkan dengan huruf besar (seperti halnya lambang matriks), mengingat vektor pada dasarnya juga merupakan sebuah matriks, yakni matriks berorde *m* x 1 (vektor kolom) atau berorde 1 x *n* (vektor baris).

Contoh vektor baris:

a = $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

b = $\begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

Contoh vektor kolom:

c = $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ d = $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$

Unsur suatu vektor dilambangkan dengan huruf kecil sesuai dengan nama vektornya dan diikuti oleh indeks kolom atau indeks barisnya. Dengan demikian a_{oj} menunjukkan unsur dari vektor-baris a kolom ke-*j*. Sedangkan c_{io}, menunjukkan unsur dari vektor-kolom c baris ke-*i*. Dalam contoh di atas, a_{o2}, berarti unsur dari vektor-baris a kolom k-2 yaitu bilangan -2.

Dimensi suatu vektor tercermin dari banyaknya unsur pada vektor yang bersangkutan. Suatu vektor baris yang memiliki *n* unsur dinamakan vektor berdimensi –*n*. Pada contoh di atas, a ialah vektor-baris berdimensi 3. Suatu vektor kolom yang memiliki *m* unsur dinamakan vektor berdimensi –*m*. Vektor c pada contoh di atas ialah vektor berdimensi 3.

Dua buah matriks, yaitu matriks A dan matriks B dikatakan sama (dan dituliskan A = B) apabila keduanya berorde sama dan semua unsur yang terkandung di dalamnya sama ($a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap *i* dan *j*). Jika matriks A tidak sama dengan matriks B, ditulis A ≠ B.

Contoh:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & -5 & 9 \end{bmatrix}$

Berdasarkan contoh di atas, matriks A = matriks B (**A = B**), namun matriks A tidak sama dengan matriks C (**A ≠ C**) dan matriks B tidak sama dengan matriks C (**B ≠ C**).

Dimensi matriks adalah konsep operasional dari matriks, seperti:

1. Kesamaan Matriks
2. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks
3. Perkalian Matriks

Matriks A dan B dikatakan sama jika:

- A dan B mempunyai jumlah baris yang sama dan juga jumlah kolom yang sama
- Semua unsur yang seletak (bersesuaian) sama

Kemudian, dua buah vektor dikatakan sama apabila keduanya sejenis, sedimensi dan semua unsur yang terkandung di dalamnya sama.

Contoh:

$a = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

$b = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$

dari contoh di atas vektor a sama dengan vektor b (a = b), namun vektor x tidak sama dengan vektor y (v ≠ y). Dapat pula dituliskan a ≠ x ≠ v dan b ≠ x ≠ y.

Dengan penjelasan di atas, matriks dapat pula dipandang sebagai kumpulan vektor. A_{mxn} adalah matriks A yang merupakan kumpulan dari *m* buah vektor-baris dan *n* buah vektor-kolom.

$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 7 & 4 & -5 \end{bmatrix}$ adalah matriks yang merupakan kumpulan dari vektor-vektor: $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 7 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

B. Bentuk Khas Matriks

Matriks memiliki berbagai bentuk khas berkenaan dengan unsur-unsur yang dikandungnya. Sebelum kita mengenal bentuk-bentuk khas tersebut, ada baiknya terlebih dahulu difahami pengertian tentang diagonal utama pada matriks. Diagonal utama ialah diagonal yang mengurutkan secara silang unsur baris pertama kolom pertama ke unsur baris terakhir kolom terakhir, yakni diagonal yang bergerak dari sudut kiri-atas menuju ke sudut kanan-bawah (Dumairy, 2007)

1. Matriks Satuan

Matriks satuan atau matriks identitas ialah matriks bujursangkar yang semua unsur pada diagonal utama adalah angka-angka 1 sedangkan unsur-unsur lainnya nol. Dinamakan matriks satuan karena sifat matriks ini mirif dengan bilangan 1. Penulisannya lazim dilambangkan dengan notasi I_n, dimana indeks *n* mencerminkan ordenya. Demikian I_2 berarti matriks satuan berorde 2 x 2, I_4 berarti matriks satuan berorde 4 x 4, dan sebagainya.

Contoh:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Matriks Diagonal

Matriks diagonal ialah matriks bujursangkar yang semua unsurnya nol kecuali pada diagonal utama.

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks diagonal pada contoh terakhir di atas sekaligus juga adalah matriks satuan. Matriks identitas memang merupakan bentuk khusus atau bagian dari matriks diagonal. Jika dua matriks diagonal yang seorde dikalikan, hasilnya akan berupa matriks diagonal juga.

3. Matriks Nol

Matriks nol ialah matriks yang semua unsurnya nol. Matriks semacam ini lazim juga dilambangkan dengan angka 0.

Contoh:

$$0_{2x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 0_{3\,x\,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setiap matriks jika dikalikan dengan matriks nol akan menghasilkan matriks nol.

4. Matriks Ubahan

Matriks ubahan (*transpose matrix*) ialah matriks yang merupakan hasil pengubahan matriks lain yang sudah ada sebelumnya, di mana unsur-unsur barisnya menjadi unsur-unsur kolom dan unsur-unsur kolomnya menjadi unsur-unsur baris. Matriks ubahan biasanya dituliskan dengan menambahkan tanda aksen (′) pada notasi matriks aslinya. Ubahan dari matriks $A_{m\,x\,n} = [a_{ij}]$ adalah $A'_{m\,x\,n} = [a'_{ji}]$.

Contoh:

- A = $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ A' = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$
- B = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ B' = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$
- C = $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ C' = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Ubahan dari suatu matriks ubahan adalah matriks aslinya.

Jadi, (A')' = A, (B')' = B. (C')' = C.

5. Matriks Simetrik

Matriks simetrik ialah matriks bujursangkar yang sama dengan ubahannya. Matriks A dikatakan simetrik apabila A = A'

Contoh:

- A = $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ A'= $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

  A merupakan matriks simetrik, sebab **A = A'**
- B = $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ B' = $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

  B merupakan matriks simetrik, sebab **B = B'**

Jika sebuah matriks simetriks dikalikan dengan ubahannya, hasilnya akan berupa kuadrat dari matriks tersebut.

Jadi, bila A simetrik maka AA' = AA = A^2. Matriks satuan juga merupakan matriks simetrik.

6. Matriks Simetrik Miring

Matriks simetrik miring ialah matriks bujursangkar yang sama dengan negatif ubahannya. Matriks A dikatakan simetrik miring (*skew symmetric*) apabila A = − A' atau A' atau A' = -A.

Contoh:

- A = $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ A' = $\begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ -A' = $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

  A merupakan matriks simetrik miring, sebab **A = -A'**

Ciri khas matriks simetrik miring ialah diagonal utamanya terdiri atas bilangan-bilangan nol.

7. Matriks Balikan

Matriks balikan (*inverse matrix*) ialah matriks yang apabila dikalikan dengan suatu matriks bujursangkar menghasilkan sebuah matriks satuan. Jika A merupakan sebuah matriks bujursangkar, maka balikannya dituliskan dengan notasi A^{-1}, dan $AA^{-1} = I$.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,2 & -0,8 \\ -0,2 & -0,2 & 0,7 \\ 0,2 & 0,2 & -0,2 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \qquad A^{-1} \text{ adalah balikan dari A}$$

Tidak setiap matrik bujursangkar mempunyai balikan.

8. Matriks Skalar, Ortogonal, Singular dan Nonsingular

Matriks skalar ialah matriks diagonal yang unsur-unsurnya sama atau seragam (λ). Dalam hal $\lambda = 1$, matriks skalar yang bersangkutan sekaligus juga adalah matriks satuan. Matriks skalar juga merupakan hasilkali sebuah skalar dengan matriks satuan, λ I = matriks skalar λ.

Matriks ortogonal ialah matriks yang apabila dikalikan dengan matriks ubahannya menghasilkan matriks satuan, $AA' = I$.

Matriks singular ialah matriks bujursangkar yang determinannya sama dengan nol, matriks semacam ini tidak mempunyai balikan. Sedangkan matriks non-singular ialah matriks bujursangkar yang determinannya tidak nol, matriks semacam ini mempunyai balikan.

C. Pengoperasian Matriks

1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Penjumlahan ataupun pengurangan dua buah matriks hanya dapat dilakukan apabila keduanya memiliki orde sama. Jumlah atau selisih dua matriks $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah sebuah matriks baru $C = [c_{ij}]$ yang berorde sama, yang unsur-unsurnya merupakan jumlah atau selisih unsur-unsur A dan B.

$$\boxed{A \pm B = C \quad \text{dimana} \quad c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}}$$

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Karena penjumlahan antar bilangan bersifat komutatif dan asosiatif, padahal matriks adalah kumpulan bilangan, maka untuk penjumlahan antar-matriks berlaku pula kaidah komutatif dan kaidah asosiatif.

Kaidah Komutatif	: A + B = B + A
Kaidah Asosiatif	: A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C

2. Perkalian Matriks dengan Bilangan (Skalar)

Hasil kali sebuah matriks A = [a_{ij}] dengan suatu skalar atau bilangan nyata λ adalah sebuah matriks baru B = [b_{ij}] yang berorde sama dan unsur-unsurnya λ kali unsur-unsur matriks semula ($b_{ij} = \lambda\, a_{ij}$). Suatu matriks dapat dikalikan dengan bilangan skalar mengalikan setiap unsur matriks dengan suatu bilangan:

λ A = B dimana $b_{ij} = \lambda\, a_{ij}$

Untuk perkalian matriks dengan skalar berlaku kaidah komutatif dan kaidah distributif.

Kaidah Komutatif	: λ A = A λ
Kaidah Distributif	: λ (A ± B) = λ A ± λ B

Contoh:

$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ dengan bilangan skalar (λ) = 4

Maka λ**A** = 4**A** = **B** = $\begin{bmatrix} 8 & -16 & 20 \\ 4 & 32 & 12 \\ 16 & 28 & 24 \end{bmatrix}$

3. Perkalian Matriks dengan Matriks

Suatu matriks A dan matriks B berlaku perkalian, jika dipenuhi syarat perkalian matriks, yaitu banyaknya kolom dari matriks A harus sama dengan banyaknya baris dari matriks B. Jika tidak demikian, maka perkalian matriks tidak dapat dilaksanakan. Hasilkali dua matriks $A_{m \times n}$ dengan $B_{n \times p}$ adalah sebuah matriks baru $C_{m \times p}$, yang unsur-unsurnya merupakan perkalian silang unsur-unsur baris matriks A dengan unsur-unsur kolom matriks B.

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Untuk perkalian antarmatriks berlaku kaidah asosiatif dan kaidah distributif, tetapi tidak berlaku kaidah komutatif.

Kaidah Asosiatif	: A (BC) = (AB) C = ABC
Kaidah Distributif	: A (B + C) = AB + AC
	(A + B) C = AC + BC

Contoh:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2.3 + (-3).6 + 5.2 & 2.5 + (-3).(-7) + 5.9 \\ 8.3 + 2.6 + 4.2 & 8.5 + 2.(-7) + 4.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 76 \\ 44 & 62 \end{bmatrix}$$

4. Perkalian Matriks dengan Vektor

Suatu matriks yang bukan berbentuk vektor hanya dapat dikalikan dengan sebuah vektor kolom, dengan catatan jumlah kolom matriks sama dengan dimensi vektor-kolom yang bersangkutan, hasilnya adalah berupa sebuah vektor-kolom baru.

$$\mathbf{A}_{m \times n} \times \mathbf{b}_{m \times 1} = \mathbf{c}_{m \times 1}$$

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 + 3.1 + 5.3 \\ 2.2 + 4.1 + 6.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 26 \end{bmatrix}$$

D. Determinan Matriks

1. Menentukan Determinan Matriks

Determinan dari suatu matriks ialah penulisan unsur-unsur suatu matriks bujur sangkar dalam bentuk determinan, yaitu di antara sepasang garis tegak (| |). Determinan dari matriks A lazim dituliskan dengan notasi |A| atau D_A. Determinan berbeda dari matriks dalam tiga hal (Dumairy, 2007): *Pertama,* bahwa determinan unsur-unsurnya diapit dengan tanda kurung. *Kedua*, determinan senantiasa berbentuk bujur sangkar (jumlah baris = jumlah kolom, $m = n$), sedangkan matriks tidak harus demikian. *Ketiga*, determinan mempunyai nilai numerik tetapi tidak demikian halnya dengan matriks.

Pencarian nilai numerik dari suatu determinan dapat dilakukan dengan cara mengalikan unsur-unsur secara diagonal.

$$\text{Matriks } A\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \text{determinannya: } |A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Nilai numeriknya : $|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Contoh:

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix};\ |A| = 2.4 + 3.5 = 23$
- $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}; |B| = 5.8 + 3.7 = 61$

Untuk determinan berdimensi tiga:

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Penyelesaiannya :

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

(1) (2) (3) (4) (5) (6)

Contoh:

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

  $|A| = 1.5.9 + 2.6.7 + 3.4.8 - 7.5.3 - 8.6.1 - 9.4.2$

  $= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0$

- $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

  $|B| = 1.6.2 + 3.4.-1 + 0.2.0 - (-1).6.0 - 0.4.1 - 2.2.3 = -12$

Minor dan Kofaktor

Cara menyelesaikan determinan menggunakan cara di atas hanya dapat dilakukan sampai dengan matriks yang berdimensi tiga, tetapi tidak dapat diterapkan untuk menyelesaikan determinan matriks yang berdimensi lebih tinggi. Terkait dengan hal tersebut, Laplace mengembangan suatu solusi yang berlaku umum untuk determinan matriks berdimensi berapa pun, yaitu dengan menggunakan minor dan kofaktor dari determinan yang bersangkutan.

Perhatikan kembali penyelesaian determinan berdimensi tiga,

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Dengan mengatur letak suku-sukunya, penulisan ini bisa diubah menjadi:

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) + (a_{12}a_{23}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33}) + (a_{13}a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22}a_{13})$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{11}} - a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{12}} + a_{13}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{M_{13}}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = \sum_{i.j-1}^{n} a_{ij}M_{ij}$$

Ternyata, dengan "menutup" baris-baris dan kolom-kolom tertentu, determinan |A| terdiri atas beberapa determinan-bagian (*sub-determinant*). Determinan-determinan-bagian ini dinamakan minor. Suatu minor secara umum dilambangkan dengan notasi M_{ij}.

M_{11} adalah minor dari unsur a_{11}, diperoleh dengan jalan menutup baris ke-1 dan kolom ke-1 dari determinan | A |

M_{12} adalah minor dari unsur a_{12}, diperoleh dengan jalan menutup baris ke-1 dan kolom ke-2 dari determinan | A |

M_{13} adalah minor dari unsur a_{13}, diperoleh dengan jalan menutup baris ke-1 dan kolom ke-3 dari determinan | A |

Penulisan determinan dalam bentuk minor seperti di atas dapat diubah ke dalam penulisan dalam bentuk kofaktor. Kofaktor dari determinan | A | untuk minor tertentu M_{ij} dilambangkan dengan nitasi A_{ij}.

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}}$$

M_{ij} adalah minor dari unsur a_{ij} yang diperoleh dengan jalan menutup baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dari determinan | A |.

A_{ij} adalah kofaktor dari unsur a_{ij}.

Dengan demikian,

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^{2}M_{11} = +M_{11}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1)^{3}M_{23} = +M_{12}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = (-1)^{4}M_{13} = +M_{13}$$

Kofaktor A_{ij} praktis adalah sama dengan minor M_{ij} itu sendiri jika $i + j$ menghasilkan bilangan genap, dan A_{ij} adalah negatif dari M_{ij} apabila $i + j$ menghasilkan bilangan ganjil.

Penyelesaian determinan dalam notasi minor:

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

$$|A| = a_{11}M_{11} + a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

Atau :

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$ untuk setiap baris; $i = 1,2,\ldots, n$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$ untuk setiap kolom; $j = 1,2,\ldots, n$

Cara penyelesaian determinan yang dikembangkan oleh Laplace ini, dikenal dengan sebutan metoda ekspansi dengan kofaktor, berlaku atau terap untuk determinan berdimensi berapapun.

Contoh:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3 \quad \rightarrow \quad A_{11} = (-1)^2(-3) = -3$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -6 \quad \rightarrow \quad A_{12} = (-1)^3(-6) = 6$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 \quad \rightarrow \quad A_{13} = (-1)^4(-3) = -3$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1.(-3) + 2.6 + 3.(-3) = 0$$

2. Sifat-sifat Determinan Matriks

Determinan memiliki beberapa sifat khas berkenaan dengan nilai numeriknya, berikut akan dijelaskan sifat-sifat dari determinan matriks (Dumairy, 2007):

a. Nilai determinan adalah nol jika semua unsurnya sama.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 27 + 27 - 27 - 27 - 27 = 0$$

b. Nilai determinan adalah nol jika terdapat dua baris atau dua kolom yang unsur-unsurnya sama.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 80 + 48 + 30 - 80 - 30 - 48 = 0$$

c. Nilai determinan adalah nol jika terdapat dua baris atau dua kolom yang unsur-unsurnya sebanding

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \\ 4 & 12 & 10 \end{vmatrix} = 160 + 96 + 60 - 160 - 60 - 96 = 0$$

d. Nilai determinan adalah nol jika unsur-unsur pada salah satu baris atau kolom semuanya nol.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0$$

e. Nilai determinan tidak berubah jika semua baris dan kolomnya saling bertukar letak, dengan kata lain determinan dari matriks A sama dengan determinan dari matriks ubahannya.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 54 + 168 + 40 - 105 - 54 - 64 = 39$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 54 + 40 + 168 - 105 - 54 - 64 = 39$$

f. Nilai determinan berubah tanda (tetapi harga mutlaknya tetap) jika dua baris atau dua kolomnya bertukar letak.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 54 + 168 + 40 - 105 - 54 - 64 = 39$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 54 + 105 + 64 - 168 - 54 - 40 = -39$$

g. Determinan dari suatu matriks diagonal adalah hasilkali unsur-unsur diagonalnya.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2.4.5 = 40$$

h. Jika setiap unsur pada salah satu baris atau kolom dikalikan dengan suatu bilangan, nilai determinannya adalah sama dengan hasilkalinya dengan bilangan tersebut.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 39$. Jika baris kedua dikalikan 2, maka:

$$|\boldsymbol{A}*| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 108 + 336 + 80 - 210 - 108 - 128 = 78 = 2|A|$$

i. Jika semua unsur merupakan penjumlahan dari dua bilangan atau lebih determinannya dapat dituliskan sebagai penjumlahan dari dua determinan atau lebih.

j. Jika nilai determinan dari suatu matriks sama dengan nol, matriksnya dikatakan singular dan tidak memiliki balikan (*inverse*). Jadi bila $|A| = 0$, **A** merupakan matriks singular dan $\mathbf{A}^{-1}$ tidak ada.

k. Jika nilai determinan dari suatu matriks tidak sama dengan nol, matriksnya dikatakan non-singular dan memiliki balikan (*inverse*). Jadi bila $|A| \neq 0$, **A** merupakan matriks non-singular dan $\mathbf{A}^{-1}$ ada.

l. Pada penguraian determinan (ekspansi Laplace), nilai determinan sama dengan nol jika unsur baris atau kolom dikalikan dengan kofaktor unsur baris atau kolom yang lain, tetapi tidak sama dengan nol jika unsur-unsur baris atau kolom dikalikan dengan kofaktor unsur baris atau kolom itu sendiri.

E. Pengubahan Matriks (Transpose)

Mengubah (*transpose*) sebuah matriks berarti mengubah matriks tersebut menjadi sebuah matriks baru dengan cara saling menukarkan posisi unsur-unsur baris dan unsur-unsur kolomnya. *Transpose* dari matriks A dinyatakan dengan A' atau A^t. Hasil pengubahan suatu matriks dinamakan matriks ubahan (*transpose*), dilambangkan dengan menambahkan tanda aksen pada notasi matriks aslinya. Demikian ubahan dari matriks A adalah matriks ubahan A'. Karena dalam pengubahan terjadi pertukaran baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris, maka ubahan dari $A_{m\,x\,n}$ adalah $A'_{n\,x\,m}$ dan konsekuensinya $a_{ij} = a'_{ji}$

$$A_{m\,x\,n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ubahannya : } A'_{n\,x\,m} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ubahan dari suatu matriks ubahan adalah matriks aslinya. Ubahan dari suatu matriks bujur sangkar adalah matriks ubahan bujur sangkar juga. Dalam hal suatu matriks bujur sangkar sama dengan ubahannya, ia dinamakan matriks simetrik. Ubahan dari suatu matriks diagonal adalah matriks diagonal itu sendiri. Ubahan dari suatu vektor-baris adalah sebuah vektor-kolom, sebaliknya ubahan dari suatu vektor-kolom adalah sebuah vektor baris.

Contoh:

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ maka $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ maka $B^t = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$

a. Ubahan Penjumlahan dan Pengurangan

Ubahan dari jumlah atau selisih beberapa matriks adalah jumlah atau selisih matriks-matriks ubahannya (Dumairy, 2007):

$$\boxed{(A_{m\,x\,n} \pm B_{m\,x\,n} \pm C_{m\,x\,n})' = A'_{n\,x\,m} \pm B'_{n\,x\,m} \pm C'_{n\,x\,m}}$$

Untuk ubahan penjumlahan, sebagaimana halnya pada operasi penjumlahan matriks, berlaku pula kaidah komutatif dan kaidah asosiatif, yaitu bahwa:

komutatif	: (A + B)' = (B + A)' atau A' + B' = B' + A'
Asosiatif	: {A + (B + C)}' = {(A + B) + C}' = A' + B' + C'

Contoh:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

Maka:

$$(A + B + C)' = \begin{bmatrix} 10 & 19 & 12 \\ 16 & 10 & 24 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 10 & 16 \\ 19 & 10 \\ 12 & 24 \end{bmatrix}$$

Atau:

$$A' + B' + C' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 16 \\ 19 & 10 \\ 12 & 24 \end{bmatrix}$$

b. Ubahan Perkalian

Ubahan dari perkalian matriks dengan skalar adalah perkalian skalar dengan matriks ubahannya. Ubahan dari perkalian antar matriks adalah perkalian matriks-matriks ubahannya dengan urutan yang terbalik.

$(\lambda A)' = \lambda A'$

$$\boxed{(A_{m\,x\,n} \times B_{n\,x\,n} \times C_{n\,x\,q})' = C'_{q\,x\,n} \times B'_{n\,x\,n} \times A'_{n\,x\,m}}$$

Untuk ubahan perkalian matriks dengan skalar, sebagaimana halnya pada operasi perkalian matriks dengan skalar, berlaku kaidah komutatif dan kaidah distributif, yaitu bahwa :

Komutatif	: $(\lambda A)' = (A\lambda)'$ atau $\lambda A' = A'$
Distributif	: $\{\lambda (A \pm B)\}' = (\lambda A \pm \lambda B)' = \lambda A' \pm \lambda B'$

Sedangkan untuk ubahan perkalian antarmatriks, seperti halnya pada operasi perkalian antarmatriks, berlaku kaidah asosiatif dan kaidah distributif, yaitu bahwa:

$\{A(BC)\}' = \{(AB)C\}' = (ABC)' = C'B'A'$	asosiatif
$\{A(B \pm C)\}' = (AB \pm AC)' = B'A' \pm C'A'$ $\{(A \pm B) C\}' = (AC \pm BC)' = C'A' \pm C'B'$	distributif

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$ABC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 566 \\ 294 \end{bmatrix}$$

F. Pembalikan Matriks (Inverse)

Membalik sebuah matriks berarti mencari suatu matriks balikan yang apabila dikalikan dengan matriks aslinya menghasilkan matriks satuan (Dumairy, 2007. Inverrs matrika A ialah merupakan matriks kebalikan dari A, hal tersebut dapat disimbolkan dengan A^{-1}. Formulasi dari matriks invers dinyatakan sebagai berikut (Supangat, 2006):

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

Dimana:

$|A|$ = determinan A

adj A = adjoint A = *transpose* dari matriks kofaktor

Karena invers matriks A ialah merupakan kebalikan dari matriks A-nya, maka hasil perkalian antara matriks A dengan inversnya akan menghasilkan matriks identitas (Supangat, 2006)

$$A^{-1} – A = I$$

Matriks balikan hanya terdapat pada matriks-matriks yang berbentuk bujur sangkar. Akan tetapi, sebagaimana telah disinggung sebelumnya, tidak setiap matriks bujur sangkar mempunyai balikan. Hanya matriks-matriks bujur sangkar yang nonsingular (determinannya ≠ 0) yang memiliki balikan.

1. Pembalikan Matriks Berorde 2 X 2

Andaikata B adalah balikan dari A, maka untuk dapat membentuk B haruslah diperoleh lebih dahulu unsur-unsurnya atau b_{ij}. Nilai b_{ij} dapat dihitung berdasarkan penemuan seperti diuraikan berikut.

Andaikan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

dan balikannya dilambangkan dengan $A^{-1} = B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

maka menurut definisi AB = I, yakni

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Atau

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \qquad a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 0$$
$$a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 0 \qquad a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 1$$

Dengan menyelesaikan keempat persamaan ini secara serempak untuk masing-masing b_{ij} diperoleh:

$$b_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \qquad b_{11} = \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$b_{11} = \frac{-a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \qquad b_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Perhatikan bahwa faktor pembaginya tak lain adalah determinan | A |.

$$|\,A\,| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$b_{11} = \frac{a_{22}}{|\,A\,|} \qquad b_{12} = \frac{-a_{12}}{|\,A\,|} \qquad b_{21} = \frac{-a_{21}}{|\,A\,|} \qquad b_{22} = \frac{a_{11}}{|\,A\,|}$$

Ini berarti jika pembagian nol atau | A | = 0, maka b_{ij} tak terdefinisi dan konsekuensinya matriks balikan B atau A^{-1} tidak dibentuk. Itulah sebabnya matriks A tidak mempunyai balikan jika | A | = 0.

Contoh:

- Tentukan, balikan dari matriks A = $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

  $|A| = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 4$, berarti **A** non-singular dan $\mathbf{A^{-1}}$ ada

$b_{11} = \frac{a_{22}}{|A|} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

$b_{21} = \frac{-a_{21}}{|A|} = \frac{-5}{4} = -1{,}25$

$b_{12} = \frac{-a_{12}}{|A|} = \frac{-4}{4} = -1$

$b_{22} = \frac{a_{11}}{|A|} = \frac{8}{4} = 2$

Jadi, $\mathbf{A}^{-1} \equiv \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}75 & -1 \\ -1{,}25 & 2 \end{bmatrix}$

- Tentukan, balikan dari matriks A = $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

  $|A| = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$, berarti **A** singular dan $\mathbf{A}^{-1}$ tidak ada

2. Pembalikan Matriks Berorde lebih Tinggi

Pembalikan matriks yang berorde lebih tinggi pada prinsipnya sama seperti pembalikan matriks berorde 2 x 2 di atas.

Andaikan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ . & & . \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Dan balikannya A^{-1} = B, maka menurut definisi AB = I.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots \\ . & & . \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1n}b_{n1} & ---- & a_{11}b_{1n} + \ldots + a_{1n}b_{nn} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ a_{n1}b_{11} + \ldots + a_{nn}b_{n1} & ---- & a_{n1}b_{1n} + \ldots + a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots \\ . & & . \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots \\ . & & . \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad c_{ik} = \sum_{j=i}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

$c_{ik} = 1$ jika $i = k$ di mana: i = 1, 2, …, n

$c_{ik} = 0$ jika $i \neq k$ k = 1, 2, …, n

Dengan cara ini, untuk menemukan sebanyak n^2 unsur-unsur matriks balikannya (b_{ij}) terdapat n^2 persamaan mengandung b_{ij} yang harus diselesaikan. Jadi, jika misalnya matriks yang hendak dibalik berorde 4 x 4, berarti terdapat 4^2 unsur matriks balikan yang sama harus dicari; untuk itu terdapat 4^2 persamaan (yang mengandung unsur-unsur matriks balikan) yang harus diselesaikan.

3. Pembalikan Matriks dengan Adjoin dan Determinan

Membalik sebuah matriks dapat pula dilakukan dengan menggunakan adjoin dan determinan dari matriks yang bersangkutan. Hubungan suatu matriks bujur sangkar yang nonsingular dengan adjoin dan determinannya adalah:

$$A^{-1} = \frac{adj.\ A}{|\ A\ |}$$

Berdasarkan hubungan ini terlihat, A^{-1} ada atau dapat dibentuk jika dan hanya jika $|\ A\ | \neq 0$.

4. Penentuan Invers Matriks dengan Eliminasi Gauss

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear (SPL), sering kali digunakan operasi sederhana, yaitu dengan mengubah SPL uang asli menjadi SPL yang *equivalent* (sepadan). Sistem yang sepadan diperoleh jika dilakukan operasi elementer untuk persamaan (Supangat, 2006).

Operasi elementer untuk persamaan:

a. Pertukaran dua persamaan.
b. Perkalian suatu persamaan dengan konstanta yang tidak sama dengan nol.
c. Persamaan ke-i digantikan oleh penjumlahan antara persamaan ke-i dengan k dikalikan persamaan ke-j, di mana k merupakan nilai konstanta dan bukan 0 (nol).

Sejalan dengan pemikiran operasi elementer untuk persamaan, maka operasi elementer untuk matriks:

a. Pertukaran dua baris.
b. Perkalian suatu persamaan dengan konstanta yang tidak sama dengan 0 (nol).
c. Penggantian baris ke-i digantikan oleh penjumlahan baris ke-i dengan k dikalikan baris ke-j, untuk k merupakan nilai konstanta dan bukan 0 (nol).

5. Sifat-sifat Balikan

Balikan-balikan matriks mempunyai beberapa sifat khas, yaitu (Dumairy, 2007):

a. Balikan dari suatu matriks balikan adalah matriks aslinya $[A^{-1}]^{-1} = A$.
b. Determinan dari suatu matriks balikan sama dengan kebalikan dari determinan matriks aslinya; $| A^{-1} | = 1/| A |$.
c. Balikan dari suatu matriks ubahan sama dengan ubahan dari matriks balikannya; $| A'|^{-1} = [A^{-1}]'$.
d. Balikannya dari perkalian dua buah matriks sama dengan perkalian matriks-matriks balikannya dengan urutan yang terbalik; $[AB]^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
e. Balikan dari matriks satuan adalah matriks satuan itu sendiri; $I^{-1} = I$.

Latihan Soal

1. Jika diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & -2 & 10 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

   Tentukanlah: (a) Determinan dari matriks A; (b) Invers matriksnya jika ada

2. Jika diketahui matriks **Z** = $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 10 \\ 3 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, tentukanlah invers matriksnya?

DAFTAR PUSTAKA

Assauri, Sofjan. 2009. *Matematika Ekonomi* edisi 2. Jakarta: Rajawali Pers

Ayres, Frank & Philip A. Schmidt. 1992. *Schaum's Outline of Theory and Problems of College Mathematics* 2nd edition. New York: Mc.Graw Hill.

Carter, Michael. 2001. *Foundations of Mathematical Economics*. Massachussetts: The MIT Press.

Chiang, Alpha. C & Kevin Wainwright. 2005. *Fundamental Methods of Mathematical Economics* 4th ed. New York: Mc.Graw Hill.

Dumairy. 2007. *Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi edisi 2003/2004 cet-12*. Yogyakarta: BPFE Yogyakarta.

-----------. 2013. *Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi: Soal Jawab* ed. Pertama, cet. 12. Yogyakarta: BPFE Yogyakarta

Johannes, H dan Budiono Sri Handoko. 1980. *Pengantar Matematika Untuk Ekonomi*. Jakarta: LP3ES

Sembiring, L, dkk. 2005. *Matematika Keuangan* cet. 14. Bandung: M2S Bandung.

Simor, Carl P & Lawrence Blume. 1994. *Mathematics for Economists*. New York: WW Norton & Company.

Supangat, Andi. 2006. *Matematika Untuk Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Kencana.

Supranto, J. 2005. *Matematika Ekonomi dan Bisnis* jilid 1, edisi 2. Bogor: Ghalia Indonesia.

--------------. 2005. *Matematika Ekonomi dan Bisnis* jilid 2, edisi 2. Bogor: Ghalia Indonesia.

Werner, Frank & Yuri N. Sotskov. 2006. *Mathematics of Economics and Business.*New York: Routledge.

Widodo, Tri. 2005. *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Yogyakarta: UPP AMP YKPN.

GLOSARIUM

Deret hitung	Deret yang perubahan suku-sukunya berdasarkan penjumlahan terhadap sebuah bilangan tertentu
Deret ukur	Deret yang perubahan suku-sukunya berdasarkan perkalian terhadap sebuah bilangan tertentu
Derivatif	Hasil yang diperoleh dari proses diferensiasi
Diferensasi	Penentuan limit suatu kuosien diferensiasi dalam hal pertambahan variabel bebasnya sangat kecil atau mendekati nol
Diferensial parsial	Menggambarkan bagaimanakah dampak perubahan suatu variabel apabila variabel lain dianggap konstan atau biasa dikenal dengan asumsi *ceteris paribus*
Fungsi	Suatu bentuk hubungan matematis yang menyatakan hubungan ketergantungan (hubungan fungsional) antara satu variabel dengan variabel lain
Himpunan/kumpulan (*set*)	Kumpulan atau kelompok suatu objek atau unsur yang dirumuskan secara tegas dan dapat dibeda-bedakan
Integral	Perhitungan kebalikan dari diferensial suatu fungsi (suatu fungsi asal yang diturunkan dapat dikembalikan ke fungsi asalnya dengan cara integral)
Koefisien	Bilangan atau angka yang terkait pada dan terletak di depan suatu variabel dalam sebuah fungsi
Konstanta	Suatu bilangan yang tetap tidak berubah-ubah
Limit fungsi	Untuk suatu fungsi f(x) diandaikan sebuah peubah bebas x diasumsikan mempunyai nilai tertentu yang mendekati a, maka fungsi f(x) dapat dianggap berhubungan dengan suatu himpunan nilai
Matriks	kumpulan bilangan yang disajikan secara teratur dalam baris dan kolom yang membentuk suatu persegi panjang, serta termuat diantara sepasang tanda kurung

Matriks balikan (*inverse matrix*)	Matriks yang apabila dikalikan dengan suatu matriks bujursangkar menghasilkan sebuah matriks satuan
Matriks diagonal	Matriks bujursangkar yang semua unsurnya nol kecuali pada diagonal utama
Matriks identitas	Matriks bujursangkar yang semua unsur pada diagonal utama adalah angka-angka 1 sedangkan unsur-unsur lainnya nol
Matriks ortogonal	Matriks yang apabila dikalikan dengan matriks ubahannya menghasilkan matriks satuan
Matriks simetrik	Matriks bujursangkar yang sama dengan ubahannya
Matriks simetrik miring	Matriks bujursangkar yang sama dengan negatif ubahannya
Matriks singular	matriks bujursangkar yang determinannya sama dengan nol, matriks semacam ini tidak mempunyai balikan
Matriks skalar	Matriks diagonal yang unsur-unsurnya sama atau seragam
Matriks ubahan (*transpose matrix*)	Matriks hasil pengubahan matriks lain yang sudah ada sebelumnya, di mana unsur-unsur barisnya menjadi unsur-unsur kolom dan unsur-unsur kolomnya menjadi unsur-unsur baris
Pangkat dari suatu bilangan	Suatu indeks yang menunjukkan banyaknya perkalian bilangan yang sama secara beruntun
subhimpunan (sub-*set*)	Suatu himpunan yang beranggotakan satu objek atau beberapa objek
Titik belok (*inflection point*)	Suatu titik dimana kecekungan suatu fungsi berubah
Titik ekstrem	Titik yang pertambahan fungsinya mencapai posisi terendah dan kemudian menurun atau sebaliknya a merupakan titik yang pengurangan fungsinya mencapai posisi tertinggi dan kemudian meningkat
Variabel	unsur pembentuk fungsi yang mencerminkan atau mewakili faktor tertentu
Vektor	bentuk matriks khusus yang hanya mempunyai satu baris atau satu kolom