BAB 10
INTEGRAL

A. Pengertian Integral

Jika sebelumnya kita telah membahas diferensial sebagai proses limit yang pertama, maka pada bab ini kita membahas topik selanjutnya yaitu integral. Dalam istilah ilmu ukur (geometris) integral membahas luas (area) di bawah suatu kurva. Pembahasan mengenai integral ini akan mencakup pengertian integral dan cara mengintegralkan suatu fungsi (Asauri, 2009).

Integral dapat didefinisikan sebagai perhitungan kebalikan dari diferensial suatu fungsi (suatu fungsi asal yang diturunkan dapat dikembalikan ke fungsi asalnya dengan cara integral) (Supangat, 2006). Dengan mempelajari integral kita dapat mencari fungsi asal dari suatu fungsi yang kita ketahui. Misalkan untuk di ekonomi dengan menggunakan integral kita bisa mencari fungsi biaya total dari fungsi biaya marjinal yang kita miliki.

Sebagaimana yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa integral berhubungan dengan luas di bawah kurva suatu fungsi. Hal ini dapat dibantu pembahasannya secara ilmu ukur (geometris). Akan tetapi, secara analitis, integral dan diferensial tidak tergantung pada ilmu ukur. Suatu penafsiran geometris hanya dipergunakan untuk membantu memudahkan pembahasan atau penganalisasian.

Integral merupakan kebalikan dari diferensial (antiderivatif). Bila suatu fungsi $y = f(x)$ mempunyai suatu turunan (derivatif) adalah $f(x) = F(x)$ untuk setiap nilai x dalam interval $a \leq x \leq b$, dan bila dx adalah

Derivatifnya $\frac{dy}{dx} = f(x)$, dan

Diferensialnya $dy = f(x)\, dx$

Kedua derivatif dan diferensial ini adalah sama, dimana $f(x)$ adalah fungsi yang kontinu dari x dalam batas-batas $a \leq x \leq b$ dimana fungsi $y = f(x)$ dan turunan (derivatif)-nya $f'(x) = f(x)$.

Proses untuk memperoleh fungsinya kembali atau fungsi asalnya adalah dengan kebalikan dari diferensialnya. Proses inilah yang dikenal dengan istilah *integral*. Tanda untuk integral (*integral sign*) adalah $\int$. Sehingga dari penjelasan di atas kita dapat menarik suatu benang merah bahwa integral adalah sebagai antiderivatif (*integral of differential*). Jika diferensialnya adalah: *dy = f (x) dx*, integralnya adalah: $y = \int f\,(x)\,dx$.

Meskipun integral adalah kebalikan dari diferensial, perlu diingat bahwa tidak semua fungsi dapat diintegralkan. Selain itu perlu pula diperhatikan bahwa teknik integral dapat lebih sulit dibandingkan dengan teknik diferensial.

Dalam perhitungan diferensial, bahwa setiap derivatif dari suatu fungsi konstan, nilainya adalah 0 (nol), maka dalam perhitungan integral ini sebagai hasil perhitungannya selalu ditambahkan dengan konstanta (c), sehingga hasil perhitungan integral di atas menjadi: $\int f'\,(x)dx = f(x) + c$. Oleh karena itu, tambahan suatu nilai konstan yang sembarang untuk suatu fungsi *f(x)* akan mempunyai integral $\int F\,(x)\,dx$. Jadi, jika *f (x)* adalah suatu fungsi yang lain dan c adalah nilai konstan yang sembarang, integral kedua fungsi tersebut yaitu *f(x)* dan *f (x) + c* adalah sama, yaitu: *F (x)*.

Atau dengan kata lain, dapatlah disebutkan bahwa bila *f (x)* dan *g (x)* adalah dua fungsi yang kontinu. Turunan atau diferensial kedua fungsi tersebut adalah sama yaitu *F(x)*, maka selisih antara kedua fungsi tersebut yaitu *f(x) – g(x)* adalah konstanta (= c).

Selanjutnya, untuk hitung integral ini diberikan notasi $\int$ (dibaca: integral). Dengan bentuk umum hasil kebalikan dari diferensialnya, sebagai berikut:

Suatu fungsi y = f(x), yang differensur menjadi $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

$$atau\; dy = f(x)'dx.$$

Jika hasil dari diferensiasi dinyatakan oleh $f'(x)$, maka integral dari fungsi tersebut dinyatakan oleh:

$$y = \int f'(x)dx = f(x) + c$$

Rieman Integral

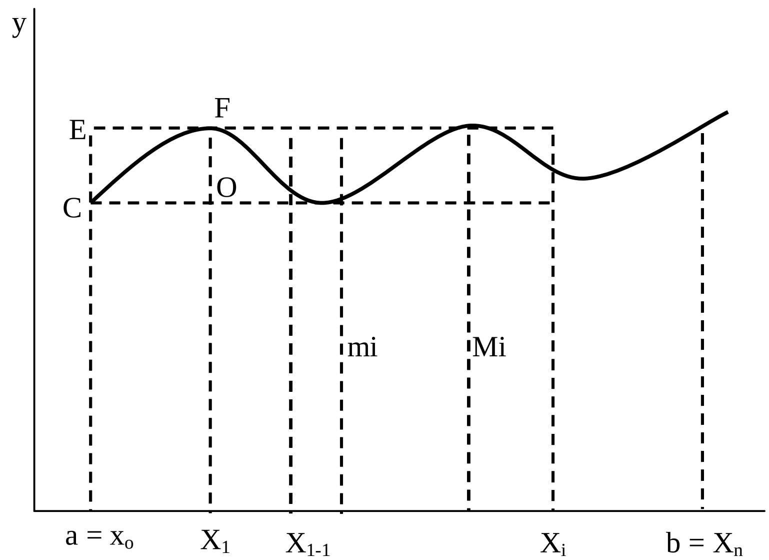
Misalkan suatu fungsi yang kontinu Y = f (x) mempunyai grafik seperti terlihat pada Gambar 10.1. dibawah ini. Daerah kurva fungsi ini dibatasi oleh interval [a, b] yang dapat dianggap sebagai rangkaian titik-titik.

Dalam hal ini kita mengangap nilai dari fungsi y = f(x) tertentu (*finite*). Selanjutnya, kita bermaksud menghitung luas (area) di bawah kurva y = f(x) di antara a dan b. Untuk ini misalkan kita membagi interval [a, b] ke dalam jarak bagian (*sub internal*) yang sama. Maka, himpunannya adalah:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_{n-1} < x_n = b$$

Apabila kita lihat pada jalur di antara x_0 dan x_1, akan diperoleh suatu pendekatan atas luas (area) di bawah kurva dengan salah satu empat persegi panjang:

$$R_1 = x_0\ CD\ x_1\ atau\ R_1' = x_0\ EF\ x_1$$



Gambar 10.1. Grafik fungsi y = f(x)

Sedangkan R_1 dan R_1 dapat dihitung dengan:

$$R_1 = (x_1 - x_0)f(x_0)$$

$$R_1' = (x_1 - x_0)f(x_1)$$

Misalkan luas (area) di bawah kurva adalah R_1' maka kita dapat melihat dari Gambar 1. Di atas, bahwa:

$$R_1 < R_1" < R_1'$$

Keadaan seperti ini diperoleh karena x_o dan x_1 dipilih, sehingga $f\,(x_o)$ akan lebih kecil dan $f\,(x_1)$ akan lebih besar dari nilai $f\,(x)$ dalam (x_o, x_1).

Pada umumnya, jika kita mengambil suatu interval $(x_{i-1}\ ;\ x_i)$ seperti dapat dilihat pada Gambar 10.1. Dari seluruh nilai $f\,(x)$ dalam interval tersebut, akan mempunyai batas atas M_i dan batas bawah m_i seperti terlihat pada gambar. Selanjutnya, $M_i\,(x_i - x_{i-1})$ akan memberikan batas dari luar (area) ini, dan $m_i\,(x_i - x_{i-1})$ memberikan batas bawahnya.

Sekarang marilah kita lakukan hal seperti ini untuk seluruh interval yang ada. Pertama terhadap m_i dan kedua terhadap M_i. Maka, diperoleh:

$$z = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1})$$

Apabila dinyatakan: $(x_i - x_{i-1})\Delta x_i$, dapat kita sederhanakan perhitungan di atas menjadi:

$$z = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

Demikian pula halnya untuk M_i, dapat kita peroleh:

$$z = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Misalkan [a, b] suatu himpunan (set) S dan seluruh subinterval S_1 sub-himpunan yang terpisah (*disjoint sub sets*) sebanyak n, maka:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots\ldots + S_n$$

Selanjutnya, kita dapat melihat bahwa $(x_i - x_{i-1})$ merupakan suatu ukuran (dalam hal ini panjang) dari himpunan S_i (dalam hal ini suatu subinterval). Untuk menunjukkan ukuran tersebut, kita nyatakan sebagai $\mu\,(S_i)$. Dengan demikian, persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai:

$$z = \sum_{i=1}^{n} m_i \mu(S_i)$$

$$z = \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(S_i)$$

Persamaan ini akan menjadi bentuk umum. Perhitungan-perhitungan batas bawah dan batas atas dapat digabungkan dengan bagian dari himpunan (set) S di atas. Misalnya m adalah batas bawah dari fungsi f (x) dan M adalah batas atas, maka:

$$m\,\mu\,(S) < z < Z < M\,\mu\,(S)$$

Selanjutnya, luas di bawah kurva adalah A, maka:

$z < A < Z$

Sekarang marilah kita gunakan proses limit untuk perhitungan-perhitungan tersebut. Maksudnya adalah untuk menunjukkan bahwa z dan Z akan menuju ke suatu limit, dan limit itu adalah A. Untuk menjelaskannya, digunakan perbedaan antara m_i dan M_i dalam suatu interval (x_{i-1}, x_i) yang akan menjadi bertambah kecil. Misalkan:

$$Z - z = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\mu\,(S_1)$$

Apabila α adalah perbedaan yang terbesar antara M_i dan m_i, maka $\alpha \geq M_i - m_i$, sehingga

$$Z - z = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\mu \quad (S_1) \leq \underset{i=1}{\overset{n}{X}} \alpha\mu(S_1)$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} (S_i) = \alpha(b - a)$$

α akan menuju/mendekati nilai nol sebagai sub-bagian (*sub division*) yang diulang-ulang kembali. Dengan demikian, diperoleh:

$$Z - z \leq \alpha(b - a) \to 0$$

Sebagai sub-bagian yang diulang-ulang. Hal ini merupakan suatu peroses limit dan dalam limit itu dapat kita nyatakan: Z ≠ z = A. Bila suatu limit dicapai, bentuk umumnya ditulis sebagai:

$$\int f\,(x)\,dx$$

f (x) dinyatakan adalah menyeluruh atas S (dalam hal ini atas interval [a, b]).

Secara grafik, proses dari z → A merupakan pendekatan luas (area) di bawah suatu kurva dari sebelah dalam (*inside*) kurva tersebut. Limit z dan Z akan menjadi sama untuk luas suatu kurva, yaitu A.

Jadi integral diartikan sebagai limit dari suatu penjumlahan tertentu dari angka-angka {f (x) dx}. Integrasi adalah proses pencapaian suatu limit, dan integral adalah limitnya. Dalam contoh-contoh yang diberikan, integral ini menjadi luas di bawah kurva.

B. Integral Tak Tentu

Yang dimaksud dengan integral tak tentu adalah suatu model perhitungan integrasi untuk harga x yang tidak terbatas, tujuan dari penentuan dengan model integral tak tentu ini, hanya semata-mata untuk mencari fungsi asalnya.

Telah diuraikan terdahulu bahwa integral berhubungan dengan persoalan mencari fungsi semula dengan mengetahui laju perkembangan fungsi tersebut. Dengan kata lain, perbandingan tingkat perubahan variabel tidak bebasnya dengan tingkat perubahan variabel bebasnya. Oleh karena itu disebut juga sebagai kebalikan diferensial atau anti derivatif.

Pada perhitungan diferensial, kita dapat menggunakan kaidah-kaidah umum untuk memudahkan perhitungan seperti yang telah diutarakan pada Bab 8.

Walaupun demikian, pada perhitungan integral dapat mengikuti langkah-langkah dalam melakukan penjumlahan tertentu dan menilainya dengan suatu proses limit. Akan tetapi, pada pengintegralan ini tidak ada kaidah-kaidah umum seperti pada pendiferensialan, sehingga suatu integral harus diperoleh dari rumus pendiferensialan. Disamping itu, hal ini menyebabkan proses pengintegralan tidaklah semudah proses pendiferensialan.

Ada beberapa macam aturan (kaidah) untuk cara pengoperasian atau penggunaan integral ini sesuai menurut jenis fungsinya seperti:

1. Fungsi Konstanta

- $\int 0\, dx = k$
- $\int k\, dx = kx + c$
- $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ **;** *k* = konstanta

2. Fungsi Berpangkat n → y = x^n

Suatu fungsi berpangkat n (untuk n ≠ - 1), diberikan rumus sebagai berikut:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$$

Sedangkan untuk fungsi berpangkat dengan *n* = -1, akan diberikan rumus:

$$\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln x + c$$

Contoh:

- $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{x^4}{4} + c = 0{,}25x^4 + c$
- $\int 8dx = \frac{8x^{0+1}}{0+1} + c = 8x + c$
- $\int 4x^2 dx = \frac{4x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{4}{3}x^3 + c$
- $\int 5\, dx = 5\int dx = 5x + c$

3. Fungsi Penjumlahan dan pengurangan

Untuk melakukan perhitungan dari model fungsi seperti ini (penjumlahan atau pengurangan fungsi), caranya adalah dengan melakukan pengitegralan dari masing-masing fungsi tersebut:

$$\int \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Contoh:

- $\int (3x^3 + 4x^2 + 5x)dx =$

  $\int (3x^3dx + 4x^2dx + 5x)dx = 3/4x^4 + 4/3x^3 + 5/2x^2 + c$

- $\int [x^2 + e^x]dx = \int x^2 dx + \int e^x dx$

$$= \frac{1}{3}x^3 + e^x + c$$

- $\int \left[\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right] dx = \int \sqrt{x\, dx} + \int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx =$

$\int x^{1/2} dx + \int x^{-1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + c =$

$2/3x\sqrt{x} + 2\sqrt{x + c}$

4. Fungsi Eksponensial

Jika $y = e^x$, maka $\frac{dy}{dx} = e^x$ atau $dy = e^x\, dx$

- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$
- $\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + c;\ b \neq 1$

Contoh:

Apabila kita temui: :$\int e^{3x+5} dx$.

Dengan memisalkan 3x + 5 = u, maka :$\frac{du}{dx} = 3 \rightarrow \therefore dx = 1/3\, du$

Sehingga: $\int e^{3x+5} dx \ = 1/3 e^u\, du = 1/3 \int e^u\, du$

$$= 1/3 e^u + c$$

$$= e^{3x+5} dx$$

5. Fungsi Logarima

Untuk mendiferensiasi fungsi logaritma Natural (In), sebagai berikut:

Jika $y = ln\, x$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ atau $dy = \frac{1}{x} dx \rightarrow y = \int \frac{1}{x} dx$

- $\int \frac{1}{x} dx = In\, x + c$
- $\int \ln x\, dx = x[\ln(x) - 1] + c$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = lnf(x) + c$; $f(x) > 0$
- $\int \frac{1}{ax^n} dx = \frac{1}{a}\int x^{-n} dx = \frac{1}{a}\left\{\frac{1}{1+(n)} x^{-n+1}\right\} + c$

Contoh:

- Bila y = x In x – x, maka:

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x} + In\, x - 1 = In\, x$

Sehingga :$\int$ In x dx = x – x + c

- $\int \frac{2}{x} dx = \int \frac{2dx}{x} = 2\, In\, x + c$
- $\int \frac{2}{2x+5} dx = \ln(2x+5) + c; \quad 2x + 5 > 0$

6. Model Berantai

Bila g (x) = u, maka g' (x) = $\frac{du}{dx}$ dan g' (x) dx = du,

sehingga $\int F\,(x)\,dx = \int G\,(u)\,du$

Contoh:

- $y = \int \frac{dx}{1+x}$ misalkan: 1 + x = u maka

  $\frac{du}{dx} = 1 \rightarrow \therefore du = dx$

  Jadi, $y = \int \frac{du}{u} = In\, u + c = In\,(x+1) + c$
- $y = \int e^{3x}$ dx misalkan 3x = u, maka

  $\frac{du}{dx} = 1 \rightarrow \therefore du = dx$

  $\frac{du}{dx} = 3 \rightarrow \therefore dx = 1/3\, du$

  Jadi y = $\int 1/3e^{u}.du \;=\; 1/3\int e^{u}du$

  $= 1/3e^{u} + c$

  $= 1/3e^{3x} + c$
- $y = \int e^{2x3} dx\; misalkan\; 2x + 3 = u, maka$

  $\frac{du}{dx} = 2 \rightarrow \therefore dx = 1/2\, du$

  Jadi y = $\frac{\int 1}{2e^{u}}.du$

  $= \; 1/2\int e^{u}du$

  $= 1/2e^{u} + c$

  $= 1/2e^{2x+3} + c$

7. Model Substitusi

Integrasi dari dua buah integral dapat dilakukan dengan cara substitusi, yaitu salah salah satu dari integral dimisalkan terlebih dahulu dengan variabel lain, sehingga bentuk fungsinya akan lebih mudah dijabarkan ke dalam penyelesaian integral sesuai dengan bentuk rumus yang telah ada.

Misal bentuk fungsi integral tersebut adalah:

$$\int f(u) \frac{du}{dx} dx = \int f(u) du = f(u) + c$$

Kalau diperhatikan bentuk integral di atas disubstitusikan dengan $\int dx$. (model seperti ini dapat juga dikatakan sebagai bentuk integral berantai).

Contoh:

- Jika kita akan mengintegralkan $\int \frac{x+3}{x^2+6x} dx$

  Misalkan: $u = x^2 + 6x$, maka $\frac{du}{dx} = 2x + 6$

  Karenanya pembilang $(x + 3) = ½ (du/dx)$. Sehingga:

  $$\int \frac{x+3}{x^2+6x} dx = \int \frac{1/2(\frac{du}{dx})}{u} dx$$
  $$= \frac{{}^1\!/_2 du}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$
  $$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2}\ln u + c$$
  $$= \frac{1}{2}\ln(x^2 + 6x) + c$$

- Jika kita memiliki akan mengintegralkan $\int 2x(x^2 + 1)dx$

  Dengan memisalkan: $u = x^2 + 1$

  $$\frac{du}{dx} = 2x$$
  $$du = 2x\, dx$$

  Maka $\int 2x(x^2 + 1)dx = \int u.du$

  $$= \frac{1}{2}u^2 + c$$
  $$= \frac{1}{2}(x^2 + 1)^2 + c$$

8. Model Integrasi Pemenggalan

Model ini adalah merupakan pengintegrasian dari suatu fungsi integrant dengan cara membalik pendiferensialan hasil kali fungsi tersebut atau dapat juga dikatakan, bahwa integral dari fungsi integrant adalah merupakan perkalian variabel-variabel integrant dikurangi dengan integrant dari balik integrant tersebut seperti:

$$\int f(x)g(x)dx = \int u' \cdot v dv$$

Misal: $f(x) = u$,

$$maka \frac{df(x)}{dx} = u' dan \int g(x)dx = v$$

Maka:

$$\int f(x)g(x)dx = u \cdot v - \int u'v \cdot dv$$

Contoh:

- Jika kita akan mengintegralkan $\int 3x^2 lnx\ dx$

  Misalkan: u = $3x^2$, maka u' = 6x

  $v = \int \ln x\ dx$

  $v\ = \frac{1}{x} + c$

  Maka: $\int 3x^2 lnx\ dx = (3x^2)\left(\frac{1}{x}\right) - \int (6x)\left(\frac{1}{x}\right) dx$

  $= 3x - \int 6\ dx$

  $= 3x - 6x + c$

  $= -3x + c$

C. Integral Tentu

Integral tentu adalah merupakan model perhitungan integral dari suatu fungsi dalam nilai-nilai batas x tertentu, sehingga hasil penyelesaiannya dari perhitungan ini merupakan sebuah bilangan tetap atau terukur. Pada dasarnya aturan/kaidah maupun cara penyelesaian dari integral tertentu ini, sama saja dengan integral tak tentu, namun demikian, yang membedakan pada integral tertentu ini hanya pada nilai-nilai batas x tertentu, sehingga hasil yang diperoleh dapat dikatakan sebagai nilai luas di bawah kurvanya.

Misalkan fungsi y = f(x) kontinu dalam interval $a \leq x \leq b$ kemudian interval tersebut dibagi menjadi subbagian, yaitu:

$\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots\dots\dots, \Delta_{x_n}$

Atau ditulis:

$\Delta_{BX_1} = X_1 - X_0, \Delta_{X_2} = X_2 - X_1, \dots\dots\dots\dots\dots.., \Delta_{X_n} = X_n - X_{n-1}$

Dalam setiap interval: $[X_0, X_1], [X_1, X_2], \dots\dots\dots, [X_{n-1}, X_n]$

Ditentukan suatu titik dengan notasi $\propto_1, \propto_2, \dots\dots\dots\dots, \propto_n$ sehingga:

$X_0 \leq \propto_1 \leq x_1, x_1 \leq \propto_2 \leq x_2, \dots\dots\dots.., x_{n-1} \leq \propto_n \leq x_n$ setiap titik tersebut di atas ditentukan nilai fungsi $f(\propto_1), f(\propto_2), \dots\dots\dots, f(\propto_n)$ dibentuk suatu penjumlahan:

$$S_n = f(\propto_1)\Delta_{X_1} + f(\propto_2) + \ \dots\dots\dots + f\left(\propto_n \Delta_{X_n}\right) = \sum_{i=1}^{n} f(\propto_1)\Delta_{x_i}$$

Penjumlahan ini disebut integral dari fungsi y = f(x) pada interval $[\propto, b]$ atau $\propto \leq x \leq b$

Untuk $\Delta_{x_i} \rightarrow 0$, maka: $\lim_{i \to o}\left(\sum_{i=0}^{n} f(\alpha_i)\Delta_{x_i}\right) = \int_a^b f(x)dx$

dimana a disebut limit bawah integral, b disebut limit atas integral, interval [a, b] disebut interval integral dan x disebut variabel integrasi. Jika f(x) diintegrasikan pada interval [a, b] maka:

$\int_{\propto}^{b} f(x)dx = f(x)$

Jika b > a maka:

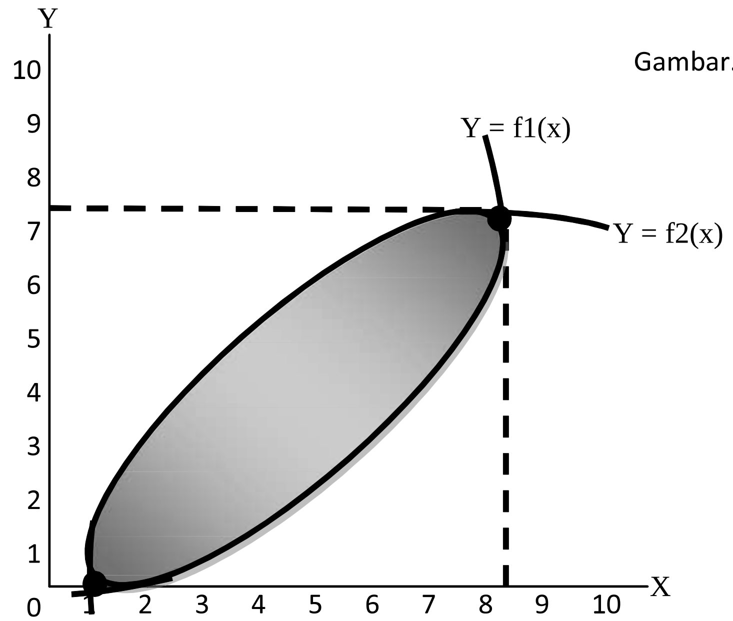
$\int_{\propto}^{b} f(x)dx = -\int_{b}^{\propto} f(x)dx$

Secara umum, integral tertentu dinyatakan:

$\int_{a}^{b} x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \Big|_{a}^{b} \qquad jika\, n \neq -1$

Dimana:

a ialah batas bawah ; b ialah batas atas



Gambar. 10.2

Sifat-sifat integral tertentu:

1. $\int_{a}^{b} kf(x)dx = k\int_{a}^{b} f(x)dx$
2. $\int_{a}^{b} [f_1(x)dx \pm \cdots \pm\ f_n(x)dx$
   $= \int_{a}^{b} f_1(x)dx \pm \int_{a}^{b} f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int_{a}^{b} f_n(x)dx$
3. $\int_{a}^{b} f(x)dx$
   $= \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx,\ \ dimana\colon a < c < b$
4. $\int_{a}^{b} f(x)dx = 0,\ \ dimana\colon\ a = b$

D. Integral Parsial

Selanjutnya kita akan membahas integral parsial, yaitu suatu proses pengintegrasian suatu fungsi integral dengan fraksi parsial, dan ini lebih sulit jika dibandingkan dengan pengintegrasian sebelumnya. Model penyelesaian integrasi semacam ini sesungguhnya merupakan pengintegrasian fungsi rasional, di mana penyebut dari fungsi ini berpangkat ganda dan terdiri dari beberapa fraksi (Supangat, 2006). Secara umum bentuk fungsi yang berbentuk fraksi parsial tersebut, dinyatakan sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} dx$$

Dalam bentuk integral seperti ini jika *f(x)* sebagai fungsi pembilang memiliki pangkat (derajat) yang lebih rendah dari fungsi penyebutnya *g(x)*, maka secara keseluruhan harus difaktorkan dan dibagi-bagi atas beberapa fraksi parsial dengan menyamakan variabel penyebut dan setiap fraksi penyebut berpangkat urut dari pangkat satu sampai dengan pangkat *n* menurut jenisnya.

Kemudian bagaimanakah jika suatu fungsi *(x)* adalah suatu fungsi rasional yang tak sebenarnya, dimana derajat pangkat pembilang lebih tinggi dari derajat pangkat fungsi penyebutnya?

Jika derajat pangkat pembilang lebih tinggi dari derajat pangkat fungsi penyebut, maka pengintegralan fungsi tersebut, terlebih dahulu dibagi-bagi atas beberapa fraksi integralnya, sehingga masing-masing fraksi merupakan fungsi rasional yang sebenarnya. Setelah penyebut dibagi-bagi atas beberapa fraksi dan membentuk beberapa fungsi dengan penyebut adalah fungsi-fungsi dari fraksi-fraksi itu, maka pada akhirnya barulah fungsi integral tersebut dapat diambil suatu kesimpulan bahwa kaidah (aturan) pengintegralan suatu fungsi dengan metode fraksi parsial hanya mungkin dilakukan apabila fungsi itu merupakan fungsi rasional yang sebenarnya, maka sejalan dengan hal tersebut, pada proses selanjutnya terlebih dahulu dicari hasil bagi antara pembilang dan penyebutnya, sehingga fungsi dimaksud terpecah secara parsial dan menjadi fungsi yang terdiri atas bagian-bagian yang membentuk fungsi rasional sebenarnya dan bukan fungsi rasional tak sebenarnya (Supangat, 2006).

Pengintegrasian model rasional adalah dimaksudkan membagi-bagi fungsi rasional tersebut menjadi beberapa fraksi parsial. Untuk melakukan pengintegrasian model ini, perlu diperhatikan beberapa jenis dari fraksi parsialnya, yaitu (Supangat, 2006):

1. Faktor Linear Tunggal

Sebuah fungsi rasional dikatakan rasional dengan faktor linear tunggal jika penyebut merupakan sebuah fungsi linear tunggal, seperti berikut:

$$f(x) = \frac{a}{ax+b}, maka \int f(x)dx = \int \left(\frac{a}{ax+b}\right) dx$$

2. Faktor Linear Berulang

Jika sebuah fungsi rasional adalah fungsi rasional yang penyebutnya merupakan fungsi linear berpangkat n atau perkalian beberapa buah fungsi linear, maka fungsi tersebut dinamakan rasional dengan faktor linear berulang, seperti berikut:

$$f(x) = \frac{k}{(ax+b)^n}$$

Maka, model integrasi dari fungsi di atas dinyatakan seperti berikut:

$$\int f(x)dx = \int \left(\frac{A}{ax+b}\right) dx + \int \left(\frac{B}{(ax+b)^2}\right) dx + \ldots \int \left(\frac{Z}{(ax+b)^n}\right) dx \ldots \ldots$$

3. Faktor Kuadrat Tunggal

Sebuah fungsi rasional dengan penyebutnya merupakan fungsi kuadrat, maka fungsi rasionalnya dinamakan fungsi rasional dengan faktror kuadrat tunggal. Adapun yang dimaksud dengan penyebut fungsi kuadrat, dinyatakan sebagai barikut:

$$f(x) = \frac{k}{ax^2+bx+c}$$

Dari bentuk fungsi di atas, proses penyelesaian secara parsial dalam bentuk (model) integrasi dari fungsinya dinyatakan seperti berikut:

$$\int \frac{k}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{Adx}{a_{1x} \pm c_1} + \int \frac{Bdx}{(a_z x \pm c_2)}$$

4. Faktor Kuadrat Berulang

Jika sebuah fungsi rasional merupakan sebuah fungsi kuadrat berpangkat n atau perkalian beberapa buah fungsi kuadrat, maka fungsi tersebut dinamakan fungsi rasional kuadrat berulang.

$$f(x) = \frac{k}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Dari bentuk fungsi di atas, proses penyelesaian secara parsial dalam bentuk (model) integrasi dari fungsi dinyatakan seperti berikut:

$$\int f(x)dx = \int \left(\frac{(Ax+B}{ax^2+bx+c}\right)dx + \int \left(\frac{(C_X+D)}{(ax^2+bx+c)}\right)dx$$
$$+\int \left(\frac{(E_x+F)}{(ax^2+bx+c)^n}\right)dx$$

E. Penerapan Ekonomi

Integral sering digunakan dalam analisis ekonomi, misalnya mencari surplus konsumen, surplus produsen, dan lain-lain.

1. Surplus Konsumen

Telah dijelaskan bahwa fungsi permintaan P = f(x) menyatakan jumlah barang yang akan dibeli oleh konsumen pada saat tingkat harga tertentu, misalnya harga barang di pasar adalah PE dan konsumen dapat memberikan barang itu dengan harga yang lebih tinggi dari PE, maka kelebihan tersebut merupakan keuntungan pembeli (konsumen) keuntungan seperti ini dinamakan surplus konsumen (S_K) surplus konsumen dapat ditunjukkan secara geometris seperti pada Gambar 10.3.

Secara sederhana surplus konsumen dapat dicontohkan sebagai berikut. Misalkan Amir hendak naik ojek dari Stasiun Senen menuju Salemba, dalam benak Amir tarif ojek dari Stasiun Senen sampai dengan Salemba adalah sebesar Rp 20.000,-, namun setelah negosiasi dengan tukang ojek didapatkanlah suatu tarif yang disepakati sebesar Rp 15.000,-, maka surplus konsumen yang diperoleh oleh Amir adalah sebesar Rp 20.000 (*willingness to pay* dari Amir) dikurangi dengan Rp 15.000,- (harga pasar) yaitu sebesar Rp 5.000,-

Secara matematik surplus konsumen dinyatakan dengan rumus:

$$S_K = \int_0^{Q_e} f(Q_d)d_Q - P_eQ_e$$

Di mana:

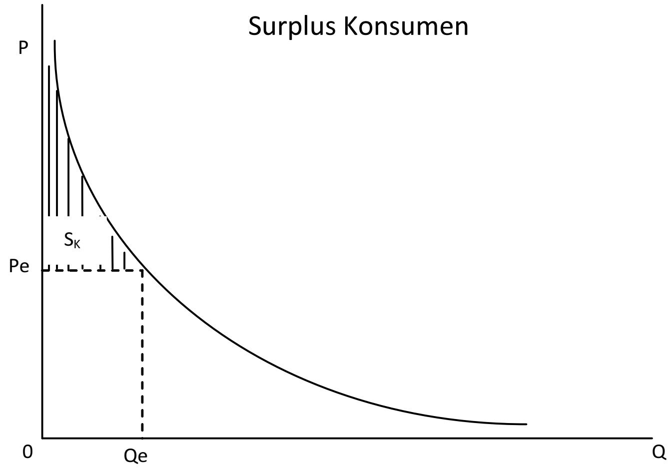
S_K : Surplus Konsumen

$F(Q_d)$: Fungsi permintaan

P_e : Harga di tingkat e

Q_e : Jumlah di tingkat e

Gambar 10.3.
Surplus Konsumen



2. Surplus Produsen

Pada tingkat harga P_E pihak produsen bersedia menjual barangnya di bawah harga pasar P_E, maka penjualan di bawah harga tersebut merupakan keuntungan produsen. Keuntungan seperti ini disebut surplus produsen (S_p). Secara geometris surplus produsen ini dapat ditunjukkan seperti pada Gambar 10.4:

Secara sederhana surplus produsen dapat dicontohkan sebagai berikut. Misalkan tukang ojek yang ditumpangi oleh Amir dari Stasiun Senen menuju Salemba, dalam benak tukang ojek tarif ojek dari Stasiun Senen sampai dengan Salemba adalah sebesar Rp 12.000,-, namun setelah negosiasi dengan penumpang didapatkanlah suatu tarif yang disepakati sebesar Rp 15.000,-, maka surplus produsen yang diperoleh oleh tukang ojek adalah sebesar Rp 15.000 (harga pasar) dikurangi dengan Rp 12.000 (*willingness to sell* dari tukang ojek yaitu surplus produsen sebesar Rp 3.000,-

Secara matematik surplus konsumen dinyatakan dengan rumus:

$$S_P = P_e Q_{e-} \int_0^{Q_E} f(Q_s) d_Q$$

Di mana:

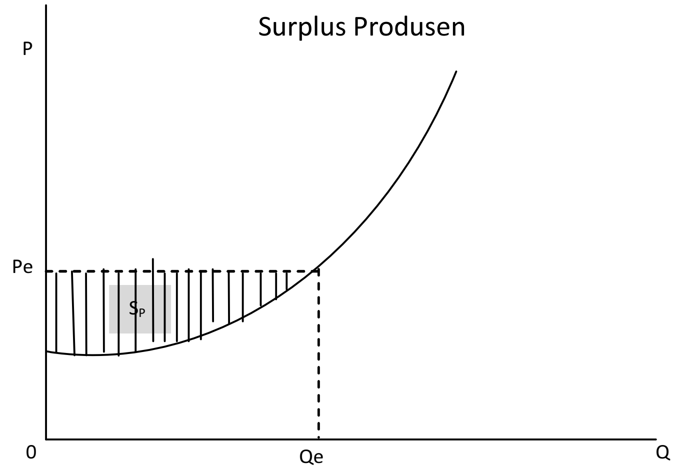
S_P : Surplus Produsen

$F(Q_s)$: Fungsi permintaan

P_E : Harga di tingkat E

Q_E : Jumlah di tingkat E

Gambar 10.4.
Surplus Produsen



Contoh:

1. Apabila diketahui fungsi permintaan adalah P = 45 – 0.5Q, hitunglah surplus konsumen pada harga Pe = 325 dan Qe = 25

Jawab:

$$S_K = \int_0^{Q_e} f(Q_d)d_Q - P_eQ_e$$

$$Sk = \int_0^{25}(45 - 0.5Q)dQ \text{ - } (325)(25)$$

$$Sk = [45Q - 0.25Q^2]_0^{25} - 812.5$$

Sk = $[45(25) – 0.25(25)^2] – 0 – 812.5 = 156.25$

Sehingga jumlah surplus konsumen ialah sebesar 156.25

2. Pada suatu fungsi penawaran tertentu $P = (Q + 3)^2$, hitunglah surplus produsen pada tingkat harga Pe = 81 dan Qe = 6

Jawab:

$$S_P = P_eQ_{e-} \int_0^{Q_E} f(Q_s)d_Q$$

$$Sp = (81)(6) - \int_0^6 (Q+3)^2 dQ$$

$$Sp = 486 - [\tfrac{1}{3}(Q+3)^3]_0^6$$

$$Sp = 486 - [\tfrac{1}{3}(6-3)^3 - \tfrac{1}{3}\ (0+3)^3] = 252$$

Sehingga jumlah surplus produsen ialah sebesar 252

3. Pada pasar persaingan sempurna, diketahui fungsi permintaan $P_d = 113 – Q^2$, dan fungsi penawaran adalah $P_S = (Q + 1)^2$, hitunglah surplus konsumen dan surplus produsen!

Jawab:

$Q^2 + 2Q + 1 = 113 - Q^2$

$2(Q^2 + Q - 56) = 0$

$(Q + 8)(Q - 7) = 0$

$Q_1 = -8; Q_2 = 7$

Yang dipilih adalah Q = 7, sebab tidak mungkin kuantitas keseimbangan dalam pasar yang negatif. Kemudian Q yang didapat dimasukkan kepada salah satu fungsi harga, misalkan dimasukkan pada fungsi harga permintaan

$Pd = 113 - Q^2$

$= 113 - (7)^2$

$P = 64$

Atau dapat pula dimasukkan pada fungsi harga penawaran:

$Ps = (Q + 1)^2$

$= (7 + 1)^2$

$P = 64$

Surplus Konsumen:

$$S_K = \int_0^{Q_e} f(Q_d)d_Q - P_eQ_e$$

$$Sk = \int_0^7 (113 - Q^2)dQ - (64)(7) = [113Q - \frac{1}{3}Q^3]_0^7 - 448 = 228{,}67$$

Sehingga surplus konsumen adalah sebesar 228,67

Surplus Produsen:

$$S_P = P_eQ_{e-} \int_0^{Q_E} f(Q_s)d_Q$$

$$Sp = (64)(7) - \int_0^7 (Q + 1)^2\, dQ = 448 - [\frac{1}{3}\ (Q + 1)^3]_0^7$$

$$Sp = 448 - (170{,}67 - 0{,}33) = 277{,}67$$

Sehingga surplus produsen adalah sebesar 277,67

4. Fungsi permintaan dan penawaran suatu barang masing-masing adalah $\rho = e^{-x+3}$ dan $\rho = e^{2x}$. Hitunglah surplus konsumen dan surplus produsen

Jawab:

Fungsi permintaan $D : \rho = e^{-x+3}$ dan fungsi penawaran $S : \rho = e^{2x}$

Keseimbangan pasar : $e^{-x+3} = e^{2x}$

$-x + 3 = 2x \rightarrow x_E = 1 \rightarrow P_E = e^{2x}$, sehingga titik keseimbangan pasar adalah $E(1, e^2)$

Surplus Konsumen:

$$Sk = \int_0^1 e^{-x+3} dx - 1.e^2$$

$$= e^3 \int_0^1 e^{-x} dx - e^2$$

$$= e^3 \{(-e^{-x})\}]_0^1 - e^2$$

$$= e^3 (-e^{-1} + 1) - e^2$$

$$= -e^2 + e^3 - e^2$$

$$Sk = e^3 - 2e^2$$

Surplus produsen:

$$Sp = 1.e^2 - \int_0^1 e^{2x} dx$$

$$= e^2 - ½ (e^2 - 1)$$

$$Sp = ½ e^2 + ½ = ½ (e^2 + 1)$$

3. Fungsi Biaya

Jika kita hanya mengetahui berapa biaya marjinal dari suatu perusahaan, kemudian kita ingin mengetahui berapa biaya totalnya, maka dengan menggunakan integral kita dapat menghitung berapa fungsi biaya total dari perusahaan tersebut.

Contoh:

Jika diketahui fungsi biaya marjinal ialah $MC = f(Q)= 8e^{0,2Q}$ dan biaya tetap ialah 100, tentukanlah fungsi biaya totalnya (*TC*)?

$$TC = C(Q) = \int 8e^{0,2Q} dQ$$

$$=40e^{0,2Q} + c$$

Saat $Q = 0 \rightarrow TC = 100$

Maka: $100 = 40e^{0,2(0)} + c$

$100 = 40 (1) + c$

$C = 60$

Sehingga fungsi biaya total: $TC = C(Q) = 40e^{0,2Q} + 60$

4. Tabungan Masyarakat

Integral dapat pula dipergunakan untuk menentukan tabungan dari masyarakat jika kita hanya mengetahui fungsi dari kecenderungan menabung marjinal (*marginal propensity to save*) dari masyarakat pada suatu tingkat pendapatan tertentu.

Contoh:

Jika diketahui suatu fungsi kecenderungan menabung marjinal dari masyarakat adalah $S'(Y) = 0{,}8 - \frac{0{,}2}{\sqrt{Y}}$. Jika terjadi *dis-saving* sebesar 5 pada saat pendapatan masyarakat hanya sebesar 100. Tentukan tabungan dari masyarakat?

Fungsi tabungan: $S(Y) = \int S'(Y)dY$

$$= \int \left[0{,}8 - \frac{0{,}2}{\sqrt{Y}}\right] dY$$

$$= \int [0{,}8 - 0{,}2Y^{-0,5}]\, dY$$

$$= 0{,}8Y - 0{,}4Y^{0,5} + c$$

Saat Y = 100 -→ S = -5

Maka: -5 = (0,8) 100 – 0,4 $(100)^{0,5}$ + c

-5 = 80 – 4 + c

c = - 81

Sehingga $S(Y) = 0{,}8Y - 0{,}4Y^{0,5} - 81$

5. Fungsi Frekuensi dan Probabilitas

a. Probabilitas dalam menit pada saat menunggu giliran untuk dilayani pada suatu restoran ditentukan pada fungsi frekuensi: $f(t) = \frac{4}{81}t^3$ untuk $0 \leq t \leq 3$.

Apakah probabilitas menunggu antara 1 dan 2 menit?

$$P = \int_1^2 \frac{4}{81}t^3\, dt = \frac{1}{81}\, t^4]_1^2$$

$$= \frac{1}{81}\,(16) - \frac{1}{81}\,(1) = 0{,}1852$$

Probabilitas menunggu pelayanan antara 1 hingga 2 menit ialah sebesar 0.1852 atau 18,52%

b. Proporsi penyelesaian tugas pada suatu hari yang telah ditentukan dijelaskan oleh fungsi probabilitas $f(x) = 12(x^2 - x^3)$ untuk $0 \leq x \leq 1$.

Apakah probabilitas dari: (1) tugas yang mampu diselesaikan pada hari tersebut adalah dibawah 50%; (2) tugas mampu diselesaikan di atas 50%

- $P_a = \int_0^{0.5} 12(x^2 - x^3)dx = 12\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{0.5}$

$$= 12\left[\left(\frac{0.125}{3} - \frac{0.0625}{4}\right) - 0\right] = 0.3125$$

- $P_b = \int_{0.5}^{1} 12(x^2 - x^3)dx = 12\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{0.5}^{1}$

  $= 12\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{0.125}{3} - \frac{0.0625}{4}\right)\right] = 0.6875$

Total probabilitas ialah, $P_a + P_b = 0.3125 + 0.6875 = 1$

Latihan

1. Selesaikanlah integral dari fungsi berikut:
   a. $\int 9x^2 dx$
   b. $\int \left(x^2 - \sqrt{x} + 4\right) dx$
   c. $\int \sqrt{2 + 5x}\, dx$
   d. $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
   e. $\int \frac{(x+1+}{(x+1)^2+(a+1)^2} dx$
2. Jika diketahui fungsi permintaan adalah *Q= 60 – 0,50 P*, dan fungsi penawaran adalah *Q = -45 +3P*. Hitunglah besarnya surplus yang dinikmati oleh konsumen maupun oleh produsen?
3. Penawaran dan permintaan akan suatu barang di pasar masing-masing ditunjukkan oleh $Q_s = -30 + 5P$ dan $Q_d = 60 – 4P$. Hitunglah masing-masing surplus yang diperoleh konsumen dan produsen?
4. Carilah persamaan fungsi penerimaan total dan fungsi permintaan dari suatu perusahaan yang penerimaan marjinalnya *MR = 900 – 28Q*?
5. Jika diketahui $I(t) = 8t^{1/3}$, temukan tingkat pembentukan modal pada (a) 5 tahun, dan (b) 3 sampai 10 tahun?