BAB 9
DIFERENSIAL FUNGSI MAJEMUK

Apabila pada bab sebelumnya telah dibahas mengenai diferensial untuk bentuk fungsi yang sederhana, maka pada bab ini akan dibahas diferensiasi bagi fungsi yang terdapat lebih dari satu macam variabel bebas. Secara prinsip dasar tidak terdapat perbedaan antara diferensial untuk variabel bebas tunggal dengan yang memiliki fungsi majemuk. Pada bahasan ini akan diperkenalkan konsep diferensial parsial dan diferensial total. Hal ini perlu diperkenalkan mengingat pada umumnya suatu variabel ekonomi berhubungan fungsional terhadap tidak hanya satu macam variabel lain, tetapi justru terhadap beberapa macam variabel sekaligus. Oleh karenanya pengetahuan akan diferensial untuk fungsi majemuk sangat penting dimiliki, terutama dalam proses optimisasi fungsi di dalam ilmu ekonomi.

A. Diferensial Parsial

Suatu fungsi yang di dalamnya hanya mengandung satu variabel bebas, maka hanya akan memiliki satu macam turunan saja. Apabila *y = f(x)* maka turunannya hanyalah turunan *y* terhadap *x*, dengan kata lain *y' = dy / dx.*

Bagaimanakah jika suatu fungsi mengandung lebih dari satu variabel bebas? Jika suatu fungsi mengandung lebih dari satu variabel bebas, maka turunannya akan lebih dari satu macam pula, sesuai dengan jumlah macam variabel bebasnya. Jadi, jika sebuah fungsi mempunyai *n* macam variabel bebas maka ia akan memiliki *n* macam turunan. Jika *y = f(x, z)* maka akan terdapat dua macam turunan, yaitu turunan *y* terhadap *x* atau $\partial y / \partial x$ dan turunan *y* terhadap *z* atau $\partial y / \delta z$. Hal ini dapat terlihat pada contoh di bawah ini:

1. Jika terdapat $y = f(v, x)$

   $$y' \begin{cases} a)\ f_v(v,x) = \frac{\partial y}{\partial v} \\ b)\ f_x(v,x) = \frac{\partial y}{\partial x} \end{cases}$$

   $$dy = \frac{\partial y}{\partial v}\, dv + \frac{\partial y}{\partial x}\, dx.$$

2. $p = f(q, r, s)$

$$p' \begin{cases} a) \ f_q(q,r,s) = \frac{\partial p}{\partial q} \\ b) \ f_r(q,r,s) = \frac{\partial p}{\partial r} \\ a) \ f_s(q,r,s) = \frac{\partial p}{\partial s} \end{cases}$$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial q} dq + \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial s} ds$$

$\partial y/\partial v$ dan $\partial y/\partial x$ dalam butir 1 serta $\partial p/\partial q, \partial p/\partial r$ dan $\partial p/\partial s$ dalam butir 2 masing-masing dinamakan derivatif parsial. Sedangkan $(\partial y/\partial x)dx$, $(\partial y/\partial z)dz$, $(\partial p/\partial q)dq$, $(\partial p/\partial r)dr$ dan $(\partial p/\partial s)ds$ dinamakan diferensial parsial. Adapun *dy* dan *dp* dinamakan diferensial total.

Dalam menurunkan *y* terhadap *v* yang dilambangkan dengan $\partial y/\partial v$, hanya suku-suku yang mengandung variabel *v* yang diperhitungkan; sedangkan suku-suku yang tidak mengandung variabel *v* dianggap sebagai konstanta dan turunannya adalah nol. Di lain pihak, dalam menurunkan *y* terhadap *x* yang dilambangkan dengan $\partial y/\partial x$, hanya suku-suku yang mengandung variabel *x* yang diperhitungkan; sedangkan suku-suku yang tidak mengandung variabel *x* dianggap konstanta dan turunannya adalah nol.

Dalam perspektif ekonomi diferensial parsial dari suatu fungsi adalah menggambarkan bagaimanakah dampak perubahan suatu variabel apabila variabel lain dianggap konstan atau biasa dikenal dengan asumsi *ceteris paribus*. Sehingga jika $\partial y/\partial v$ merupakan turunan dari suatu fungsi $y = f(v,x)$, hal ini memberikan makna bagaimanakah dampak perubahan variabel *v* terhadap variabel *y*, jika variabel lain diasumsikan tidak berubah.

B. Derivatif Dari Derivatif Parsial

Fungsi dengan lebih dari satu variabel bebas dapat diturunkan lebih dari satu kali sebagaimana halnya dalam fungsi dengan satu variabel bebas. Oleh karenanya dari masing-masing turunan parsial masih memiliki kemungkinan untuk dapat diturunkan kembali. Apabila suatu turunan parsial berbentuk suatu fungsi yang tinggal mengandung satu macam variabel bebas, maka turunan berikutnya hanya ada satu macam. Akan tetapi bila turunan parsial berbentuk suatu fungsi yang masih mengandung beberapa macam variabel bebas, maka turunan berikutnya masih dapat dipecah-pecah lagi menjadi beberapa turunan parsial pula.

Contoh: $y = x^3 + 6z^2 - 5x^2z - 4xz^2 + 9\,z - 10$

(1) $\frac{\partial\, y}{\partial\, x} = 3\,x^2 - 10\,xz - 4\,z^2$

(2) $\frac{\partial\, y}{\partial\, z} = 12\,z - 5\,x^2 - 8\,xz + 9$

Dalam contoh ini baik $\partial\, y \,/\, \partial\, x$ maupun $\partial\, y \,/\, \partial\, z$ masih dapat diturunkan secara parsial lagi terhadap *x* maupun *z*.

(1.a) $\frac{\partial\, y}{\partial\, x}$ terhadap x : $\frac{\partial^2 y}{\partial\, x^2} = 6x - 10z$

(1.b) $\frac{\partial\, y}{\partial\, x}$ terhadap z : $\frac{\partial^2\, y}{\partial\, x\, \partial\, z}$ = -10*x* – 8*z*

(2.a) $\frac{\partial\, y}{\partial\, z}$ terhadap x : $\frac{\partial^2\, y}{\partial\, z\, \partial\, x}$ = -10*x* – 8*z*

(2.b) $\frac{\partial\, y}{\partial\, z}$ terhadap z : $\frac{\partial^2\, y}{\partial\, z^2}$ = 12 – 8*x*

Ternyata turunan parsial kedua (1a), (1b), (2a) dan (2b) masih dapat diturunkan secara parsial lagi baik terhadap *x* maupun terhadap *z*.

(1a.1) $\frac{\partial^2\, y}{\partial\, x^2}$ terhadap x : $\frac{\partial^2\, y}{\partial\, x^3} = 6$

(1a.2) $\frac{\partial^2\, y}{\partial\, x^2}$ terhadap z : $\frac{\partial^3\, y}{\partial\, x^2\, \partial\, z}$ = -10

(1b.1) $\frac{\partial^2\, y}{\partial\, x\, \partial\, z}$ terhadap x : $\frac{\partial^3\, y}{\partial\, x^2\, \partial\, z}$ = -10

(1b.2) $\frac{\partial^2\, y}{\partial\, x\, \partial\, z}$ terhadap z: $\frac{\partial^3\, y}{\partial\, x\, \partial\, z^2}$ = -8

(2a.1) $\frac{\partial^2\, y}{\partial\, z\, \partial\, x}$ terhadap x : $\frac{\partial^3\, y}{\partial\, z\, \partial\, x^2}$ = -10

(2a.2) $\frac{\partial^2\, y}{\partial\, z\, \partial\, x}$ terhadap z: $\frac{\partial^3\, y}{\partial\, z^2\, \partial\, x}$ = -8

(2b.1) $\frac{\partial^2\, y}{\partial\, z^2}$ terhadap x : $\frac{\partial^3\, y}{\partial\, z^2\, \partial\, x}$ = -8

(2b.2) $\frac{\partial^2\, y}{\partial\, z^2}$ terhadap z : $\frac{\partial^3\, y}{\partial\, z^3} = 0$

Sekarang turunan-turunan parsial ketiga ini tidak dapat lagi diturunkan secara parsial, karena masing-masing hanya tinggal mengandung konstanta.

C. Optimisasi dan Nilai Ekstrim

Setelah kita mampu memahami apa itu derivasi parsial, maka selanjutnya kita perlu mengetahui nilai ekstrem dari suatu fungsi. Kegunaan dari mengetahui nilai ekstrem ini adalah sebagai upaya dalam mencari suatu fungsi yang bersifat maksimisasi dan suatu fungsi yang bersifat minimisasi. Hal ini perlu dipahami mengingat ilmu ekonomi adalah ilmu yang mempelajari bagaimana melakukan pemilihan yang terbaik di antara pilihan yang ada dalam konteks keseimbangan.

Misalkan seorang produsen dihadapkan pada permasalahan menentukan besarnya produksi agar keuntungan yang diraih dapat optimal (maksimal) dengan memperhatikan berbagai keseimbangan antara sumber daya yang ada. Konsep optimisasi yang dapat dilakukan menurut Chiang (2005) disebut dengan "*The Guest for The Best*", yaitu melakukan pilihan-pilihan yang tepat di antara pilihan yang ada tersebut.

Nilai-nilai ekstrem (optimum) dari sebuah fungsi yang mengandung lebih dari satu variabel bebas dapat dicari dengan pengujian sampai derivatif keduanya:

Untuk $y = f(x, z)$,

Maka y akan mencapai titik ekstrimnya jika:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \;\; dan \;\; \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

Pengujian di atas merupakan pengujian tes derivatif pertama (*first order condition*). Langkah-langkah yang perlu diperhatikan pada penggunaan uji ini adalah (Chiang, 2005):

- Mencari nilai ekstrim $x = x_0$ dengan cara derivatif pertama dari fungsi tersebut sama dengan non atau $f\,'x = 0$.
- Menyelidiki perubahan tanda yang mungkin terjadi di sekitar nilai ekstrim $x = x_0$
  (1) $x = x_0$ merupakan titik relatif maksimum jika $f'(x)$ tandanya berubah dari + ke – di sekitar x_0.
  (2) $x = x_0$ merupakan titik relatif minimum jika $f'(x)$ tandanya berubah dari – ke + di sekitar x_0.
  (3) $x = x_0$ bukan merupakan titik relatif minimum atau maksimum (kemungkinan adalah titik belok) jika $f'(x)$ tandanya sama di sekitar x_0.

Contoh:

$AC = f(Q) = Q^2 – 5Q + 20$, tentukanlah titik ekstrimnya.

Jawab:

$f'(Q) = 2Q – 5 = 0$

$Q = \frac{5}{2}$ → titik stasioner

Misal ambil $Q_1 = 2$ → $f'(2) = 2(2) – 5 = -1 < 0$

$Q_2 = 3 \rightarrow f'(3) = 2(3) - 5 = 1 > 0$

Berarti Q = $\frac{5}{2}$ adalah titik relatif minimum.

Karena derivatif pertama *f'(x)* adalah suatu fungsi dari *x*, maka *f'(x)* dapat didiferensialkan lagi terhadap *x* menjadi derivatif kedua dari fungsi *f(x)*, yang dapat dinotasikan dengan:

$$f''(x) \text{ } atau \text{ } \frac{d^2y}{dx^2}$$

Jika derivatif kedua *f"(x)* didifferensialkan lagi terhadap *x* menjadi derivatif ketiga, maka dinotasikan dengan:

$$f'''(x) \text{ } atau \text{ } \frac{d^3y}{dx^3}, \text{ dst}$$

Lalu sebenarnya bagaimanakah interpretasi dari derivatif kedua ini? Jika fungsi derivatif pertama *f'(x)* mengukur tingkat perubahan dari fungsi *f(x)*, maka fungsi derivatif kedua *f"(x)* mengukur tingkat perubahan dari fungsi derivatif pertama *f'(x)*. Atau dapat pula dikatakan bahwa derivatif kedua mengukur tingkat perubahan dari tingkat perubahan dari fungsi asli *f(x)*.

Misal akan dianalisis fungsi *f(x)* di titik $x = x_0$

Berdasarkan derivatif pertama:

$$\left.\begin{matrix} f'(x_0) > 0 \\ f'(x_0) < 0 \end{matrix}\right\} \text{ } artinya \text{ } nilai \text{ } fungsi \left\{\begin{matrix} meningkat \\ menurun \end{matrix}\right.$$

Berdasarkan derivatif kedua:

$$\left.\begin{matrix} f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{matrix}\right\} \text{ } artinya \text{ } slope \text{ } fungsi \left\{\begin{matrix} meningkat \\ menurun \end{matrix}\right.$$

Cara pengujian lain yang digunaka untuk menentukan titik ekstrim dari suatu fungsi adalah uji derivatif kedua (*second order condition*). Langkah-langkah yang perlu diperhatikan pada penggunaan uji ini adalah:

- Mencari nilai ekstrim $x = x_0$ dengan cara derivatif pertama dari fungsi tersebut sama dengan nol atau $f'(x) = 0$.
- Tentukan derivatif kedua atau *f"(x)* dari fungsi tersebut.
- Subtitusikan nilai ekstrim $x = x_0$ ke dalam derivatif kedua.

  (1) $x = x_0$ merupakan titik relatif maksimum jika $f''(x) < 0$

  (2) $x = x_0$ merupakan titik relatif minimum jika $f''(x) > 0$

(3) $x = x_0$ tidak dapat disimpulkan secara pasti atau uji derivatif kedua gagal jika $f''(x) = 0$.

Uji derivatif kedua berhubungan dengan kecekungan dari kurva suatu fungsi. Cara menguji kecekungan yaitu:

(a) Jika $f''(x) < 0$, maka fungsi cekung ke bawah (*concave*).

(b) Jika $f''(x) > 0$, maka fungsi cekung ke atas (*convex*).

Titik belok (*inflection point*) adalah suatu titik dimana kecekungan berubah. Cara mencari titik belok adalah mencari solusi dari $f''(x) = 0$. Berikut adalah resume tabel dari kondisi relatif ekstrim $y = f(x)$.

Kondisi	**Maksimum**	**Minimum**
FONC	$f'(x) = 0$	$f'(x) = 0$
SONC	$f''(x) \leq 0$	$f''(x) \geq 0$
SOSC	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$

Contoh:

Jika diketahui fungsi penerimaan: $R(Q) = 1200Q - 2Q^2$ dan fungsi biaya adalah $C(Q) = Q^3 - 61{,}25Q^2 + 1528{,}5Q + 3000$. Tentukanlah berapa nilai Q yang akan memaksimumkan keuntungan serta perlihatkan bahwa turunan keduanya terpenuhi.

Jawab:

Kondisi keuntungan maksimum adalah pada saat MR = MC, yaitu kondisi pada saat turunan pertama dari fungsi.

Keuntungan: $\pi(Q) = R(Q) - C(Q)$

$= 1200Q - 2Q^2 - (Q^3 - 61{,}25Q^2 + 1528{,}5Q + 3000)$

$= -Q^3 + 59{,}25Q^2 - 328{,}5Q - 3000$

Kondisi turunan pertama (*first order condition*)

$\pi'(Q) = 0 \rightarrow \pi'(Q) = -3Q^2 + 118{,}5Q - 328{,}5 = 0$

Kedua ruas dikalikan dengan $-\frac{1}{3}$:

$Q^2 - 39{,}5Q + 109{,}5 = 0$

(Q-3) (Q-36,5)

$Q_1 = 3$; $Q_2 = 36{,}5$

Kondisi derivatif kedua (*second order condition*)

π" (Q) = -6*Q* + *118,5*

Q = 3 → π" (3) = -6 (3) + 118,5 = 100,5 > 0

Q = 36,5 → π" (36,5) = -6 (36,5) + 118,5 = -100,5 < 0

Berdasarkan derivatif kedua, π" (36,5) < 0, maka keuntungan maksimum akan diperoleh perusahaan pada saat memproduksi sebanyak 36,5 unit.

D. Optimisasi Tanpa Kendala

Pada bagian ini kita akan membahas bagaimanakah cara mengoptimumkan suatu fungsi baik dalam mencari nilai maksimum maupun nilai minimum yang tidak memiliki kendala (*constraints*). Pada bagian sebelumnya apabila kita memiliki suatu fungsi dengan satu variabel bebas

$z = f(x)$

maka syarat perlu dan cukup (*necessary and sufficient condition)* bagi fungsi tersebut adalah:

- Turunan pertama: $dz = f'(x)\, dx = 0$ atau $\frac{dz}{dx} = f'(x) = 0$
- Kondisi turunan kedua yang harus dipenuhi

  $$f''(x) = \frac{d^2z}{dx^2}\begin{cases} \le 0 \rightarrow max \\ \ge 0 \rightarrow min \end{cases}$$

Kemudian misalkan saat ini kita memiliki fungsi dengan dua variabel bebas

$Z = f(x,y)$

Maka syarat perlu dan cukup bagi fungsi tersebut adalah:

- Turunan pertama

  $f_x = f_y = 0$ atau $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
- Turunan kedua derivatif parsial

  Diketahui $f_x \equiv \frac{\partial z}{\partial x}$ dan $f_y \equiv \frac{dz}{dy}$, maka

  $f_{xx} \equiv \frac{\partial}{\partial x} f_x$ atau $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

  $f_{yy} \equiv \frac{\partial}{\partial y} f_y$ atau $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

  $f_{xy} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ dan $f_{yx} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$
- Turunan kedua total diferensial

  Karena $dz = f_x\, dx + f_y\, dy$, maka

  $$d^2z \equiv d(dz) = \frac{\partial(dz)}{\partial x} dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y} dy$$

$$= \frac{\partial(f_x dx + f_y dy)}{\partial x} dx + \frac{\partial(f_x dx + f_y dy)}{\partial y} dy$$
$$= f_{xx} dx + f_{yx} dy\, dx + f_{xy} dx + f_{yy} dy\, dy$$
$$= f_{xx} dx^2 + f_{yx} dy\, dx + f_{xy} dx\, dy + f_{yy} dy^2$$

Berdasarkan Teorema Young, $f_{xy} = f_{yx}$ selama masing-masing derivatif parsial tersebut kontinu. Oleh karenanya persamaan diatas dapat dituliskan kembali

$$d^2z = f_{xx} dx^2 + 2f_{xy} dxdy + f_{yy} dy^2$$

Jadi untuk masalah optimisasi dua variabel, kondisi turunannya adalah:

$$SOSC: \begin{matrix} Max \rightarrow d^2z \leq 0 \\ Min \rightarrow d^2z \geq 0 \end{matrix}$$

Dimana $d^2z \begin{cases} < 0\ iff\ \ f_{xx} < 0;\ f_{yy} < 0;\ f_{xx}f_{yy} > {f_{xy}}^2 \\ > 0\ iff f_{xx} > 0;\ f_{yy} > 0;\ f_{xx}f_{yy} > {f_{xy}}^2 \end{cases}$

Jika disimpulkan, tabel kondisi untuk relatif ekstrem $z = f(x,y)$:

Kondisi	Maksimum	Minimum
FONC	$f_x = f_y = 0$	$f_x = f_y = 0$
SOSC	$f_{xx} < 0;\ f_{yy} < 0;\ f_{xx}f_{yy} > {f_{xy}}^2$	$f_{xx} > 0;\ f_{yy} > 0;\ f_{xx}f_{yy} > {f_{xy}}^2$

E. Optimisasi Dengan Kendala Persamaan

Pada saat kita mengekstrimkan atau mengoptimumkan suatu fungsi baik untuk mencari nilai maksimum maupun nilai minimun, seringkali kita terkendala oleh suatu fungsi lain yang harus dipenuhi. Terdapat kendala (*constraint*) ketika hendak mengoptimumkan suatu fungsi. Kasus optimisasi bersyarat semacam ini banyak dijumpai dalam bidang ekonomi. misalnya seseorang hendak memaksimumkan utilitas, tetapi memiliki kendala pada fungsi pendapatan; atau sebuah perusahaan ingin memaksimumkan labanya, namun terikat pada fungsi produksi.; atau perusahaan ingin memaksimumkan jumlah output, namun terkendala pada fungsi biayanya. Pada bagian ini kita akan berupaya menjelaskan bagaimanakah cara mengoptimumkan suatu fungsi yang memiliki kendala.

Dalam melakukan perhitungan suatu fungsi yang memiliki kendala berupa suatu fungsi lain dapat diselesaikan dengan metode Lagrange. Caranya ialah dengan membentuk sebuah fungsi baru, disebut fungsi Lagrange, yang merupakan penjumlahan dari fungsi yang hendak dioptimumkan ditambah hasil kali pengganda Lagrange λ dengan fungsi kendalanya.

Misalkan hendak dioptimumkan

U =f(x,y)

dengan kendala *g (x, y) = c*

maka fungsi Lagrangenya:

$$Z = f(x, y) + \lambda\,[c - g(x, y)]$$

Dimana λ adalah lagrangne multiplier. Untuk mencari titik stasioner dari *Z*, maka dilakukan *FONC (first order necessary condition*).

FONC:

$Z_x = 0 \rightarrow f_x - \lambda g_x = 0$

$Z_y = 0 \rightarrow f_y - \lambda g_y = 0$

$Z_\lambda = 0 \rightarrow c - g(x,y) = 0$

Contoh:

Tentukan nilai ekstrem dari:

$U = x_1 x_2$

$s.t. x_1 + x_2 = 6$

Maka fungsi Lagrange: $Z = x_1 x_2 + \lambda(6 - x_1 + x_2)$

FONC: $Z_{x_1} = 0 \rightarrow x_2 - \lambda = 0$

$Z_{x_2} = 0 \rightarrow x_1 - \lambda = 0$

$Z_\lambda = 0 \rightarrow 6 - x_1 - x_2 = 0$

Dengan metode Cramer diperoleh solusi: $x_1* = 3$; $x_2* = 3$; $\lambda* = 3$. Dengan demikian, nilai optimumnya: $Z* = U* = 9$.

Pengganda Lagrange λ adalah suatu *variabel tak-tentu* yang hanya bersifat sebagai pembantu. Syarat di atas merupakan syarat yang diperlukan untuk menghitung nilai ekstrim dari fungsi baru yang dibentuk, dan karenanya disebut sebagai syarat yang diperlukan atau *necessary condition*.

Selanjutnya nilai ini akan diuji dengan *second order sufficient condition (SOSC)* untuk mengetahui apakah nilai optimum (stasioner) ini akan maksimum, minimum, atau bukan keduanya. Akan tetapi untuk mengetahui jenis nilai ekstrim tersebut, maksimum ataukah minimum, masih harus disidik melalui derivatif-parsial keduanya, yang merupakan syarat yang mencukupkan atau *sufficient condition.* Dalam hal ini nilai ekstrim tadi adalah:

Maksimum bila $F_{xx} < 0\ dan\ F_{yy} < 0$

Minimum bila $F_{xx} > 0$ dan $F_{yy} > 0$

Contoh:

Tentukan nilai ekstrim z dari fungsi $z = 2x + 2y$ dengan syarat $x^2 + y^2 = 8$. Jelaskan jenis nilai ekstrimnya.

Fungsi lagrange:

$\mathcal{L} = 2x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 8)$

Untuk menentukan nilai ekstrim maka fungsi lagrange diatas $\mathcal{L}' = 0$

$\mathcal{L}_x = 2 + 2\lambda x = 0$ ....(1)

$\mathcal{L}_y = 2 + 2\lambda y = 0$ ....(2)

Dari persaman 1 dan 2 karena sama-sama terdapat komponen λ di dalamnya, maka menjadi : $-\frac{1}{x} = -\frac{1}{y}$ atau $x = y$

Menurut fungsi kendala: $x^2 + y^2 = 8$

karena $x = y$, maka dituliskan menjadi: $y^2 + y^2 = 8$

$2y^2 = 8$

$y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2$

karena $y = \pm 2$, $x = \pm 2$

maka, $z = 2x + 2y = \pm 8$

jadi nilai ekstrimnya:

- Untuk $x = 2$ dan $y = 2$, $\lambda = -\frac{1}{2}$

  $\mathcal{L}_{xx} = 2\lambda = 1 < 0$

  $\mathcal{L}_{yy} = 2\lambda = 1 < 0$

  Karena $\mathcal{L}_{xx}$ dan $\mathcal{L}_{yy}$ < 0, nilai ekstrimnya adalah nilai minimum dengan $z_{min} = 8$

- Untuk $x = -2$ dan $y = -2$, $\lambda = \frac{1}{2}$

  $\mathcal{L}_{xx} = 2\lambda = 1 > 0$

  $\mathcal{L}_{yy} = 2\lambda = 1 > 0$

  Karena $\mathcal{L}_{xx}$ dan $\mathcal{L}_{yy}$ > 0, nilai ekstrimnya adalah nilai minimum dengan $z_{min} = -8$

Contoh:

Optimumkan fungsi $z = xy$ dengan kendala $2x + y = 20$

$\mathcal{L} = xy + \lambda(2x + y - 20)$

Syarat yang diperlukan untuk fungsi yang optimum ialah pada kondisi *FONC* = 0

$\mathcal{L}_x = y + 2\lambda = 0$ ....(1)

$\mathcal{L}_y = x + \lambda = 0$ ....(2)

Dari persamaan (1) dan (2) akan diperoleh

$-x = -\frac{1}{2}y$, berarti $2x = y$

$2x + y = 20$

$2x + 2x = 20$, diperoleh $x = 5$, maka $y = 10$

Jadi z optimum pada $x = 5$ dan $y = 10$

Dengan $z_{opt} = xy = (5)(10) = 50$

F. Optimisasi Dengan Kendala Pertidaksamaan

Pengembangan lebih lanjut dari model optimisasi bersyarat adalah metode Khun Tucker. Apabila dalam metode Lagrange berupaya melakukan optimisasi suatu fungsi terhadap kendala berbentuk persamaan, maka pada metode Khun-Tucker kita akan melakukan optimisasi suatu fungsi terhadap kendala yang berbentuk pertidaksamaan. Apabila dalam fungsi tujuan dan fungsi kendala yang berbentuk linier dikenal dengan *linear programming*, maka pada fungsi kendala atau tujuan yang tidak linier disebut dengan *non-linear programming*. Bentuk permasalahannya biasanya berupa:

Maksimum fungsi tujuan $f(x,y)$ terhadap kendala $g(z,y) \leq 0$

atau

minimum fungsi tujuan $f(x,y)$ terhadap kendala $g(x,y) \geq 0$

Prosedur penyelesaian pada permasalahan di atas dapat dilakukan dengan dua macam cara, yaitu (Dumairy, 2007): melalui metode Lagrange yang dimodifikasi kemudian diuji dengan kondisi (persyaratan) Kuhn-Tucker; atau; secara langsung dengan metode Kuhn-Tucker itu sendiri.

Prosedur metoda Kuhn-Tucker melalui metoda Lagrange yang dimodifikasikan dilakukan sebagai berikut (Dumairy, 2007):

(1) Anggap kendala pertidaksamaannya sebagai sebuah persamaan. Kemudian selesaikan masalahnya dengan metoda Lagrange yang biasa hingga diperoleh nilai optimum yang dicari [khusus dalam hal ini fungsi baru Lagrange harus dibentuk dengan cara: $F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$; jadi, tidak boleh: $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$].

(2) Lakukan pengujian terhadap nilai λ. Jika $\lambda > 0$ berarti nilai optimum yang diperoleh (berdasarkan kendala yang telah dimodifikasikan) tadi juga merupakan nilai optimum berkenaan fungsi kendala yang berbentuk pertidaksamaan. Jika $\lambda \leq 0$ berarti optimisasi fungsi tujuan *f(x,y)* tanpa menyertakan fungsi kendala *g(x,y)* sudah dengan sendirinya akan memenuhi kendalanya. [Dalam hal $\lambda \leq 0$ kendala yang bersangkutan dikatakan bersifat tidak mengikat (*non-binding*), oleh karenanya dapat diabaikan; dalam hal $\lambda > 0$ kendalanya disebut mengikat (*binding*).

Sedangkan prosedur metoda Kuhn-Tucker secara langsung dilakukan sebagai berikut (Dumairy, 2007):

(1) Rumuskan permasalahannya, misalnya maksimumkan *f(x,y)* terhadap *g(x,y)* ≤ 0, atau minimumkan *f(x,y)* terhadap *g(x,y)* ≥ 0.

(2) Tetapkan kondisi Kuhn-Tucker:

(a) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0$

(b) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0$

(c) $\lambda\, g\,(x,y) = 0$ di mana $g\,(x,y) \leq 0\; atau\; g\,(x,y) \geq 0$

(3) Ujilah (2c) masing-masing untuk $\lambda = 0$ dan $g\ (x,y) = 0$ guna menentukan mana diantaranya yang memenuhi persamaan-persamaan (2a) dan (2b) serta pertidaksamaan kendala $g(x,y)$. Nilai-nilai x dan y yang memenuhi ketiga kondisi ini merupakan nilai-nilai yang mengoptimumkan fungsi tujuan $f(x,y)$.

Contoh:

(1) Maksimumkan $f(x,y) = 10\,xy - 2{,}5\,x^2 - y^2$ terhadap kendala $x + y \leq 9$.

Dengan menganggap kendala pertidaksamaan berlaku sebagai sebuah persamaan ($x + y \leq 9$ menjadi $x + y = 9$), maka berdasarkan metoda Lagrange:

$$F(x,y,\lambda) = 10\,xy - 2{,}5\,x^2 - y^2 - \lambda(x + y - 9)$$

$$\left.\begin{array}{l} F_x = 0 \rightarrow 10\,y - 5\,x - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 10\,y - 5\,x \\ F_y = 0 \rightarrow 10\,x - 2\,x - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 10\,x - 2\,y \end{array}\right\} x = 0{,}8\,y$$

Menurut kendala: $x + y = 9 \quad \rightarrow 0{,}8\,y + y = 9 \rightarrow y = 5$

$y = 5 \rightarrow x = 0{,}8(5) = 4 \rightarrow$ sehingga $f(x,y)_{maks} = 135$

$\lambda = 10(5) - 5(4) = 10(4) - 2(5) = 30.$

Karena $\lambda > 0$ berarti $x = 4$ dan $y = 5$, yang memaksimumkan *f(x,y)* terhadap kendala yang (dianggap) berbentuk persamaan, berlaku juga terhadap kendala yang berbentuk pertidaksamaan.

(2) Dengan metode kondisi Kuhn-Tucker langsung dimana $g(x,y) = x + y - 9 \leq 0$:

(a) $\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \rightarrow 10\,y - 5\,x - \lambda = 0$

(b) $\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \rightarrow 10\,x - 2\,y - \lambda = 0$

(c) $\lambda\, g = 0 \rightarrow \lambda(x + y - 9) = 0$ dimana $g = x + y - 9 \leq 0$

Jika $\lambda = 0$, maka $x = y = 0$ agar persamaan (a) dan (b) terpenuhi, dan kendala $x + y \leq 9$ juga dapat terpenuhi; dalam hal ini $f(0,0) = 0$.

Jika $x + y - 9 = 0$, maka $x = 9 - y$, sehingga:

$$\left.\begin{array}{l} \text{(a) } 10\,y - 5x - \lambda = 0 \rightarrow 10\,y - 45 + 5\,y - \lambda = 0 \\ \text{(b) } 10\,y - 2x - \lambda = 0 \rightarrow 90\ - 10\,y - 2\,y - \lambda = 0 \end{array}\right\} y = 5\ dan\ \lambda = 30$$

Dengan memasukkan $y = 5$ dan $\lambda = 30$ ke dalam (a) dan (b), diperoleh $x = 4$. Untuk $x = 4$ dan $y = 5$, $f(x,y) = 10(4)(5) - 2{,}5(4)^2 - (5)^2 = 135$. Jadi, sesuai dengan penyelesaian melalui metoda Lagrange sebelumnya, x dan y yang memaksimumkan $f(x,y)$, terhadap kendala pertidaksamaan $x + y \leq 9$ adalah $x = 4$ dan $y = 5$.

[Dalam pengujian $\lambda = 0$ sebelumnya kita juga menemukan bahwa $f(x,y)$ maksimum pada $x = y = 0$. Namun karena $f(4,5)$ lah yang dipilih].

Contoh:

Jika kita hendak meminimumkan suatu fungsi biaya:

$$C = x_1 - 4^2 + x_2 - 4^2$$

$$s.t: 2x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$-3x_1 - 2x_2 \geq -12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Fungsi Lagrange:

$$Z' = [x_1 - 4^2 + x_2 - 4^2] + \lambda_1[6 - 2x_1 + 3x_2] + \lambda_2[-12 - 3x_1 - 2x_2]$$

FONC:

$$\frac{\partial Z\prime}{\partial x_1} = 2x_1 - 4 - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \geq 0\ ;\ x_1 \geq 0\ ;\ x_1 \frac{\partial Z'}{\partial x_1} = 0$$

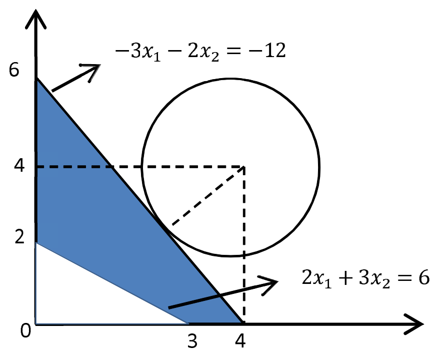
$$\frac{\partial Z\prime}{\partial x_2} = 2x_2 - 4 - 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0\ ;\ x_2 \frac{\partial Z'}{\partial 2} = 0$$

$\frac{\partial Z\prime}{\partial \lambda_1} = 6 - 2x_1 - 3x_2 \leq 0 \qquad ;\ \lambda_1 \geq 0\ ;\ \lambda_1 \frac{\partial Z'}{\partial \lambda_1} = 0$

$\frac{\partial Z\prime}{\partial \lambda_2} = -12 + 3x_1 + 2x_2 \leq 0 \qquad ;\ \lambda_2 \geq 0\ ;\ \lambda_2 \frac{\partial Z'}{\partial \lambda_2} = 0$

Mencari solusi dengan coba-coba, karena ada 2 variabel dan 2 kendala, maka jumlah kombinasi penyelesaian yang mungkin adalah: 2^{2+2} = 16 kemungkinan.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0;\ x_2 = 0 \\ x_1 = 0;\ x_2 > 0 \\ x_1 > 0;\ x_2 = 0 \\ x_1 > 0;\ x_2 > 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0;\ \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 > 0;\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 > 0;\ \lambda_2 > 0 \end{array}$$



Berdasarkan solusi grafik di atas dapat diketahui bahwa solusi yang mungkin hanya $x_1 > 0$ dan $x_2 > 0$, sehingga ada 4 solusi yang mungkin yaitu

$$x_1 > 0;\ x_2 > 0 \begin{cases} \lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0;\ \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 > 0;\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 > 0;\ \lambda_2 > 0 \end{cases}$$

- Misalkan solusi yang mungkin adalah: $x_1 > 0;\ x_2 > 0;\ \lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 0$

  Karena $x_1 > 0$ dan $x_1 \frac{\partial Z\prime}{\partial x_1} = 0,$ maka

  $\frac{\partial Z\prime}{\partial x_1} = 2x_1 - 4 - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$ ....(1)

  Karena $x_2 > 0$ dan $x_2 \frac{\partial Z\prime}{\partial x_2} = 0,$ maka

  $\frac{\partial Z\prime}{\partial x_2} = 2x_2 - 4 - 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$ ....(2)

Karena $\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 0$, maka dari persamaan (1) dan (2) diperoleh solusi x_1* = 4 dan x_2* = 4. Dengan demikian solusinya menjadi x_1* = 4; x_2* = 4; λ_1*=0; λ_2*=0. Selanjutnya akan diperiksa apakah solusi ini memenuhi kondisi Kuhn Tucker (KKT) atau tidak.

Karena $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_1 \frac{\partial Z\prime}{\partial \lambda_1} = 0$, maka

$\frac{\partial Z\prime}{\partial \lambda_1} = 6 - 2x_1 - 3x_2 < 0$ ....(3)

Subtitusi x_1* = 4 dan x_2* = 4 ke persamaan (3), terbukti $\frac{\partial Z\prime}{\partial \lambda_1} < 0$

Karena $\lambda_2 = 0$ dan $\lambda_2 \frac{\partial Z\prime}{\partial \lambda_2} = 0$, maka

$\frac{\partial Z\prime}{\partial \lambda_2} = -12 + 3x_1 + 2x_2 < 0$ ....(4)

Subtitusi x_1* = 4 dan x_2* = 4 ke persamaan (3), ternyata $\frac{\partial Z\prime}{\partial \lambda_2} > 0$. Jadi, solusi x_1* = 4; x_2* = 4; λ_1*=0; λ_2*=0 bukan solusi optimal yang memenuhi kondisi Kuhn-Tucker (KKT).

- Misalkan solusi yang mungkin adalah: $x_1 > 0;\ x_2 > 0;\ \lambda_1 = 0;\ \lambda_2 > 0$

  Karena $x_1 > 0$ dan $x_1 \frac{\partial Z\prime}{\partial x_1} = 0,$ maka

  $\frac{\partial Z\prime}{\partial x_1} = 2x_1 - 4 - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$ ....(1)

  Karena $x_2 > 0$ dan $x_2 \frac{\partial Z\prime}{\partial x_2} = 0,$ maka

  $\frac{\partial Z\prime}{\partial x_2} = 2x_2 - 4 - 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$ ....(2)

Karena $\lambda_1 = 0$, maka persamaan (1) dan (2) menjadi:

$2x_1 - 4 + 3\lambda_2 = 0$ ....(3)

$2x_2 - 4 + 2\lambda_2 = 0$ ....(4)

Eliminasi persamaan (3) dan (4) menghasilkan

$4x_1 - 6x_2 + 8 = 0$ ....(5)

Karena λ_2 dan $\lambda_2 \frac{\partial Z\prime}{\partial \lambda_2} = 0$, maka

$\frac{\partial Z\prime}{\partial \lambda_2} = -12 + 3x_1 + 2x_2 = 0$ ....(6)

Kemudian eliminasi persamaan (5) dan (6) menghasilkan:

$13x_1 - 28 = 0 \rightarrow x_1* = \frac{28}{13}$

Subtitusi nilai $x_1* = \frac{28}{13}$ ke persamaan (5) sehingga diperoleh nilai $x_2 *= \frac{36}{13}$.

Subtitusi nilai $x_1* = \frac{28}{13}$ ke persamaan (3) sehingga diperoleh nilai $\lambda_2 *= \frac{16}{13}$.

Maka solusinya menjadi: $x_1* = \frac{28}{13};\ x_2 *= \frac{36}{13};\ \lambda_1 *= 0;\ \lambda_2 *= \frac{16}{13}$

Selanjutnya akan diperiksa apakah solusi ini memenuhi kondisi Kuhn-Tucker ataukah tidak.

Subtitusi $x_1{*} = \frac{28}{13}, \lambda_1 {*}= 0\ dan\ \lambda_2 {*}= \frac{16}{13}$ ke persamaan (2), terbukti $\frac{\partial Z\prime}{\partial x_1} = 0$

Subtitusi $x_2 {*}= \frac{36}{13}; \lambda_1 {*}= 0\ dan\ \lambda_2 {*}= \frac{16}{13}$ ke persamaan (2), terbukti $\frac{\partial Z\prime}{\partial x_2} = 0$

Karena $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_1 \frac{\partial Z\prime}{\partial \lambda_1} = 0$, maka

$$\frac{\partial Z\prime}{\partial \lambda_1} = 6 - 2x_1 - 3x_2 < 0 \qquad ....(7)$$

Subtitusi $x_1{*} = \frac{28}{13}$ dan $x_2 {*}= \frac{36}{13}$ ke persamaan (7), terbukti $\frac{\partial Z\prime}{\partial \lambda_1} < 0$

Subtitusi $x_1{*} = \frac{28}{13}$ dan $x_2 {*}= \frac{36}{13}$ ke persamaan (6), terbukti $\frac{\partial Z\prime}{\partial \lambda_2} = 0$

Jadi, solusi $x_1{*} = \frac{28}{13}; x_2 {*}= \frac{36}{13}; \lambda_1 {*}= 0;\ \lambda_2 {*}= \frac{16}{13}$ merupakan solusi optimal yang memenuhi kondisi Kuhn-Tucker.

G. Penerapan Ekonomi

Pendekatan diferensiasi parsial sangat bermafaat untuk diterapkan pada model-model ekonomi yang mengandung lebih dari satu variabel bebas, dalam hal kita hendak menelaah secara parsial pengaruh dari salah satu variabel bebas tadi terhadap variabel terikatnya.

a. Pemintaan Marjinal dan Elastisitas Permintaan Parsial

Apabila terdapat hubungan antar dua macam barang dalam penggunaannya, maka dapat dikatakan permintaan dari masing-masing barang akan fungsional terhadap harga dari kedua macam barang tersebut (Dumairy, 2007). Atau dengan kata lain jika barang *A* dan barang *B* mempunyai hubungan penggunaan, maka:

$Q_{da} = f(P_a, P_b)$ dan $Q_{db} = f(P_a, P_b)$

Derivatif pertama dari Q_{da} dan Q_{dh} adalah fungsi-fungsi permintaan marjinalnya, di mana:

$\frac{\partial\ Q_{da}}{\partial\ \ P_a}$ adalah permintaan marjinal akan *A* berkenaan dengan P_a

$\frac{\partial\ Q_{da}}{\partial\ \ P_b}$ adalah permintaan marjinal akan *A* berkenaan dengan P_b

$\frac{\partial\ Q_{da}}{\partial\ \ P_b}$ adalah permintaan marjinal akan *B* berkenaan dengan P_a

$\frac{\partial\ Q_{db}}{\partial\ \ P_b}$ adalah permintaan marjinal akan *B* berkenaan dengan P_b

Dengan dapat diturunkannya fungsi permintaan marjinal tersebut, dapatlah dihitung elastisitas permintaan parsialnya. Dalam hal ini terdapat dua macam elastisitas permintaan, yaitu elastisitas yang mengukur kepekaan perubahan permintaan suatu barang berkenaan perubahan harga barang itu sendiri (*elastisitas harga-permintaan*).

$$\eta_{da} = \frac{\%\,\Delta\, Q_{da}}{\%\,\Delta\; P_a} = \frac{E\, Q_{da}}{E\, P_a} = \frac{\partial\, Q_{da}}{\partial\, P_a} \cdot \frac{P_a}{Q_{da}}$$

$$\eta_{db} = \frac{\%\,\Delta\, Q_{db}}{\%\,\Delta\; P_b} = \frac{E\, Q_{db}}{E\, P_b} = \frac{\partial\, Q_{db}}{\partial\, P_b} \cdot \frac{P_b}{Q_{db}}$$

η_{da} dan η_{db} keduanya merupakan elastisitas harga-permintaan, yaitu berapa besar perubahan dari kuantitas barang yang diminta jika terjadi perubahan harga barang itu sendiri.

Serta dapat pula diukur elastisitas yang mengukur kepekaan perubahan permintaan suatu barang berkenaan perubahan harga barang lain (*elastisitas silang-permintaan*).

$$\eta_{ab} = \frac{\%\,\Delta\, Q_{da}}{\%\,\Delta\; P_b} = \frac{E\, Q_{da}}{E\, P_b} = \frac{\partial\, Q_{da}}{\partial\, P_b} \cdot \frac{P_b}{Q_{db}}$$

$$\eta_{ba} = \frac{\%\,\Delta\, Q_{db}}{\%\,\Delta\; P_a} = \frac{E\, Q_{db}}{E\, P_a} = \frac{\partial\, Q_{db}}{\partial\, P_a} \cdot \frac{P_a}{Q_{db}}$$

η_{ab} dan η_{ba} keduanya adalah elastisitas silang permintaan. Jika η_{ab} maupun η_{ba} keduanya negatif ($\eta_{ab} < 0\; dan\, \eta_{ba} < 0$) untuk P_a dan P_b tertentu, berarti hubungan antara barang *A* dan barang *B* adalah komplementer atau saling melengkapi; sebab penurunan harga salah satu barang akan diikuti oleh kenaikan permintaan atas keduanya. Misalkan hubungan antara BBM bersubsidi dengan harga mobil. Jika terjadi kenaikan harga BBM bersubsisi akan cenderung memicu penurunan jumlah permintaan atas mobil, karena sifat hubungan yang saling melengkapi

Sedangkan jika η_{ab} maupun η_{ba} keduanya positif ($\eta_{ab} > 0\; dan\, \eta_{ba} > 0$) untuk P_a dan P_b tertentu, berarti hubungan antara barang *A* dan barang *B* adalah kompetitif/substitutif atau saling menggantikan; sebab penurunan harga salah satu barang akan diikuti oleh kenaikan permintaan atas barang tersebut dan penurunan permintaan atas barang lainnya. Misalkan: untuk sarapan kita dihadapkan pada dua jenis barang yaitu bubur ayam dan lontong sayur, jika salah satu harga anggaplah bubur ayam naik seribu rupiah dan lontong sayur harganya tetap, maka saat ini seakan-akan bubur ayam akan menjadi lebih mahal, sehingga orang akan menurunkan permintaan atas bubur ayam dan menambah konsumsi lontong sayur.

b. Perusahaan dengan Dua Macam Produk dan Biaya Produksi Gabungan

Suatu perusahaan dalam realitanya seringkali tidak hanya menghasilkan satu macam output, melainkan dua atau mungkin lebih macam output yang dihasilkan. Biaya yang dihasilkan untuk menghasilkan dua atau lebih macam output tersebut merupakan biaya produksi gabungan, maka untuk menghitung keuntungan maksimum yang dapat diperoleh dari perusahaan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan pendekatan diferensiasi parsial (Dumairy, 2007).

Untuk penyederhanaan, misalkan suatu perusahaan memproduksi dua macam barang, *A* dan *B*, di mana fungsi permintaan akan masing-masing barang dicerminkan oleh Q_a dan Q_b, serta biaya produksinya $C = f(Q_a, Q_b)$, maka

Penerimaan dari memproduksi *A* : $R_a = Q_a . P_a = f(Q_a)$

Penerimaan dari memproduksi *B* : $R_b = Q_b . P_b = f(Q_b)$

Penerimaan total: $R = R_a + R_b = f(Q_a) + f(Q_b)$

Dengan total $C = f(Q_a,\ Q_b)$ fungsi keuntungannya:

$\pi = R - C = f(Q_a) + f(Q_b) - f(Q_a, Q_b) = g(Q_a, Q_b)$

π maksimum bila $\pi' = 0$

(1) $\pi_{Q_a} = \frac{\partial \pi}{\partial Q_a} = 0$

(2) $\pi_{Q_b} = \frac{\partial \pi}{\partial Q_b} = 0$

Dari (1) dan (2) nilai Q_a dan nilai Q_b dapat diperoleh. Selanjutnya nilai π maksimum bisa dihitung.

Contoh:

Jika fungsi biaya total yang harus dikeluarkan oleh suatu perusahaan dalam memproduksi barang A dan B ialah $C = Q_a^2 + 3Q_b^2 + Q_a Q_b$. Kemudian harga jual dari masing-masing barang per unit adalah $P_a = 7$, dan $P_b = 20$. Hitunglah berapa banyak barang yang harus diproduksi dari masing-masing barang tersebut agar diperoleh keuntungan yang maksimum, dan berapa besarnya keuntungan maksimum tersebut.

$TR_a = Q_a . P_a = 7Q_a$

$TR_b = Q_b . P_b = 20Q_b$

$TR = TR_a + TR_b$

$TR = 7Q_a + 20Q_b$

$TC = Q_a^2 + 3Q_b^2 + Q_aQ_b$

$\pi = TR - TC = 7Q_a + 20Q_b - Q_a^2 - 3Q_b^2 - Q_aQ_b$

Kondisi profit maksimum ialah pada saat, $\pi' = 0$

$\frac{\partial \pi}{\partial Q_a} = 7 - 2Q_a - Q_b = 0$ ....(1)

$\frac{\partial \pi}{\partial Q_b} = 20 - 6Q_b - Q_a = 0$ ....(2)

Dari persamaan (1) dan (2) kita bisa lakukan eliminasi

$$\begin{array}{lcl} 2Q_a + Q_b = 7 & \times 1 & 2Q_a + Q_b = 7 \\ Q_a + 6Q_b = 20 & \times 2 & \underline{2Q_a + 12Q_b = 40} \\ & & 11Q_b = 33 \\ & & Q_b = 3 \end{array}$$

Hasil tersebut dimasukkan ke dalam persamaan (1) atau (2)

$$2Q_a + Q_b = 7$$
$$2Q_a = 7 – 3$$
$$Q_a = 2$$

$\pi = 7Q_a + 20Q_b - Q_a^2 - 3Q_b^2 - Q_aQ_b$

$\pi = 7(2) + 20(3) - (2)^2 - 3(3)^2 - (2)(3) = 37$

Sehingga agar suatu perusahaan dapat memperoleh keuntungan yang maksimum, maka perusahaan harus memproduksi sebanyak 2 unit barang *A* dan 3 unit barang *B*, dengan keuntungan yang didapat ialah sebesar 37.

Selain cara di atas, dapat pula diselesaikan melalui nilai dari marjinalnya, yaitu dengan menghitung penerimaan marjinal dari masing-masing barang disamakan dengan biaya marjinal dari barang yang bersangkutan. Atau dengan kata lain kondisi keuntungan maksimum ialah pada saat $MR = MC$.

c. Utilitas Marjinal Parsial

Dalam kehidupan sehari-hari, kita sebagai konsumen mengonsumsi berbagai macam barang, tidak hanya satu barang. Jika utilitas dari konsumen dilambangkan dengan U dan barang yang dikonsumsinya dilambangkan dengan q_i (i = 2,…., n), maka fungsi utilitas dapat dituliskan dengan notasi $U = f(q_1, q_2, q_3, \ldots q_n)$.

Seandainya untuk penyederhanaan dianggap bahwa seorang konsumen hanya mengkonsumsi dua macam barang, katakanlah X dan Y, maka fungsi utilitasnya adalah:

$U = f(x,y)$

Derivatif pertama dari U merupakan utilitas marjinal parsialnya.

$\frac{\partial U}{\partial x}$ adalah utilitas marjinal berkenaan dengan barang X.

$\frac{\partial U}{\partial y}$ adalah utilitas marjinal berkenaan dengan barang Y.

Untuk U = konstanta tertentu, fungsi utilitas $U = f(x,y)$ merupakan suatu persamaan kurva indiferensi (*indefference curve*), yaitu kurva menunjukkan berbagai kombinasi konsumsi barang X dan Y yang memberikan tingkat kepuasan yang sama.

Keseimbangan Konsumsi. Keseimbangan konsumsi maksudnya ialah suatu keadaan atau tingkat kombinasi konsumsi beberapa macam barang yang memberikan kepuasan optimum. Secara geometri, keseimbangan konsumsi terjadi pada persinggungan kurva indiferensi dengan garis anggaran konsumen (*budget line*). Garis anggaran adalah garis yang mencerminkan kemampuan konsumen membeli berbagai macam barang berkenaan dengan harganya masing-masing dan pendapatan konsumen. Jika pendapatan konsumen berjumlah M serta harga barang X dan barang Y masing-masing P_x dan P_y per unit, persamaan *budget line*-nya dapat dituliskan dengan notasi $M = x.P_x + y.P_y$.

Tingkat kombinasi konsumsi yang memberikan kepuasan optimum atau keseimbangan konsumsi dapat dicari dengan Metoda Lagrange. Dalam hal ini, fungsi utilitas $U = f(x,y)$ dimaksimumkan terhadap fungsi anggaran $M = x.P_x + y.P_y$. analog dengan penyelesaian keseimbangan produksi sebagaimana diuraikan pada seksi sesudah ini, diperoleh fungsi baru Lagrange:

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda(x.P_x + y.P_y - M)$$

Agar F maksimum:

$F_x(x,y) = 0 \rightarrow f_x(x,y) + \lambda P_x = 0$ … … … … … … … … … … … … … … … … (1)

$F_y(x,y) = 0 \rightarrow f_y(x,y) + \lambda P_y = 0$ … … … … … … … … … … … … … … … … (2)

Selanjutnya perhatikan:

Utilitas total : $U = f(x,y)$

Utilitas marjinal : $MU = U' = f'(x,y)$

(i) Utilitas marjinal barang X : $MU_x = f_x(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}$

(ii) Utilitas marjinal barang Y : $MU_y = f_y(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}$

Dari (1) dan (2),

$$\frac{f_x\,(x,\ y)}{P_x} = \frac{f_y\,(x,\ y)}{P_y}$$

$$\frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y}$$

Jadi dalam rumusan lain dapat pula dinyatakan, bahwa keseimbangan konsumsi akan tercapai apabila hasil bagi utilitas marjinal masing-masing barang terhadap harganya bernilai sama.

Contoh:

Misalkan kepuasan seorang konsumen dari mengkonsumsi barang *X* dan *Y* dicerminkan oleh fungsi utilitas $U = x^2\ y^3$. Jumlah pendapatan konsumen 1000 rupiah, harga *X* dan harga *Y* per unit masing-masing 25 rupiah dan 50 rupiah.

a) Bentuklah fungsi utilitas marjinal untuk masing-masing.
b) Berapa utilitas marjinal tersebut jika konsumen mengkonsumsi 14 unit *X* dan 13 unit *Y* ? Jelaskan apakah dengan mengkonsumsi 14 unit *X* dan 13 unit *Y* kepuasan konsumen optimum ataukah tidak.

a) $U = x^2 y^3$

$$MU_X = U_x = \frac{\partial\, U}{\partial\, x} = 2\,xy^3$$

$$MU_Y = U_y = \frac{\partial\, U}{\partial\, y} = 2\,x^2y^3$$

b) Jika x = 14 dan y = 13,

$$MU_X = 2(14)(13)^3 = 61.516$$

$$MU_Y = 2(14)^2(13)^2 = 99.372$$

$$\frac{MU_X}{P_x} = \frac{61.516}{25} = 2.460.64$$

$$\frac{MU_Y}{P_y} = \frac{99.372}{50} = 1.987.44$$

Pada kondisi ini, $\frac{MP_X}{P_x} \neq \frac{MU_Y}{P_y}$

Berarti kombinasi konsumsi 14 unit *X* dan 13 unit *Y* tidak memberikan kepuasan optimum, tidak terjadi keseimbangan konsumsi. Keseimbangan konsumsi akan terjadi ketika pada kondisi $\frac{MP_X}{P_x} = \frac{MU_Y}{P_y}$. Karena pada kondisi ini tambahan mengonsumsi marjinal dari barang *X* akan sama dengan tambahan mengonsumsi marjinal atas barang *Y*.

d. Optimum Utilitas

Dalam teori perilaku konsumen kita mendapatkan suatu perilaku yang memaksimumkan utilitas dengan suatu kendala anggaran tertentu, ataupun sebaliknya. Fungsi utilitas pada perilaku konsumen berupaya untuk menjelaskan bagaimanakah pemilihan barang konsumsi yang dapat dilakukan konsumen terkait dengan upaya mencari tingkat utilitas yang optimal.

Terdapat dua solusi optimal pada teori perilaku konsumen, yaitu:

1. Memaksimumkan jumlah utilitas pada suatu kendala pendapatan tertentu

$\max_{X,Y}\ f(X,Y)$

s.t. $M = P_x X + P_y Y$

dimana:

f (X, Y) merupakan fungsi utilitas barang konsumsi

X adalah barang konsumsi X

Y adalah barang konsumsi Y

M adalah pendapatan konsumen

P_x adalah harga barang X

P_y adalah harga barang Y

Contoh:

Misalkan: diketahui fungsi utilitas seorang konsumen ialah $U = X^{0.5}Y^{0.5}$, dengan fungsi kendala pendapatan adalah:$M = P_x X + P_y Y$.

Hitunglah berapa jumlah barang konsumsi X dan Y yang dipilih oleh konsumen untuk memaksimumkan tingkat utilitas?

Jawab:

$$\max_{X,Y}\ U = X^{0.5}Y^{0.5}$$
$$s.t.\ M = P_X X + P_Y Y$$

Bentuk fungsi Lagrange dari fungsi maksimisasi di atas:

$$\mathcal{L} = X^{0.5}Y^{0.5} + \lambda\,(M - P_X X - P_Y Y)$$

Lakukan turunan pertama:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = 0.5X^{-0.5}Y^{0.5} - \lambda P_X = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = 0.5Y^{-0.5}X^{0.5} - \lambda P_Y = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = M - P_X X - P_Y Y = 0 \qquad (3)$$

Dari persamaan (1) dan (2) kita bisa dapatkan

$\frac{0.5X^{-0.5}Y^{0.5}}{P_X} = \frac{0.5Y^{-0.5}X^{0.5}}{P_Y}$

$\frac{P_Y}{P_X} = \frac{0.5X^{0.5}Y^{-0.5}}{0.5X^{-0.5}Y^{0.5}}$

$\frac{P_Y}{P_X} = \frac{X}{Y}$

$P_Y = \frac{P_X X}{Y}\ ; P_X = \frac{P_Y Y}{X}$ (4)

Persamaan (4) kita masukkan ke dalam fungsi kendala pendapatan

M = P_X X + P_Y Y

M = $\frac{P_Y Y}{X} X + P_Y Y$

$M = P_Y Y + P_Y Y$

M = 2 $P_Y Y$

$Y = \frac{M}{2P_Y}$

Untuk barang konsumsi X kita lakukan hal yang sama

M = P_X X + P_Y Y

M = $P_X X + \frac{P_X X}{Y} Y$

$M = P_X X + P_X X$

M = 2 $P_X X$

$X = \frac{M}{2P_X}$

Sehingga jumlah X dan Y yang memaksimalkan jumlah output adalah

$X = \frac{M}{2P_X}$ dan $Y = \frac{M}{2P_Y}$

2. Meminimumkan pendapatan pada suatu jumlah utilitas tertentu

   $\min_{X,Y}\ f(M)$

   s.t. U = f (X, Y)

   dimana:

   f (M) merupakan pendapatan

   X adalah barang konsumsi X

   Y adalah barang konsumsi Y

   P_X adalah harga barang X

   P_Y adalah harga barang Y

Misalkan: diketahui fungsi pendapatan adalah M = P_x X + P_y Y dengan fungsi utilitas $U = X^{0.5}Y^{0.5}$.

Hitunglah berapa jumlah barang konsumsi X dan Y yang dibutuhkan untuk meminimumkan pendapatan pada suatu jumlah kombinasi barang konsumsi X dan Y tertentu?

Jawab:

$$\min_{X,Y} M = P_X X + P_Y Y$$
$$s.t.\ U = X^{0.5}Y^{0.5}$$

Bentuk fungsi Lagrange dari fungsi maksimisasi di atas:

$$\mathcal{L} = P_X X + P_Y Y + \lambda\,(U - X^{0.5}Y^{0.5})$$

Lakukan turunan pertama:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X} = P_X - 0.5\lambda X^{-0.5}Y^{0.5} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Y} = P_Y - 0.5\lambda X^{0.5}Y^{-0.5} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda} = U - X^{0.5}Y^{0.5} = 0 \qquad (3)$$

Dari persamaan (1) dan (2) kita bisa dapatkan

$$\frac{P_X}{0.5X^{-0.5}Y^{0.5}} = \frac{P_Y}{0.5X^{0.5}Y^{-0.5}}$$

$$\frac{P_X}{P_Y} = \frac{0.5X^{-0.5}Y^{0.5}}{0.5X^{0.5}Y^{-0.5}}$$

$$\frac{P_X}{P_Y} = \frac{Y}{X}$$

$$X = \frac{P_Y Y}{P_X}\ ; Y = \frac{P_X X}{P_Y} \qquad (4)$$

Persamaan (4) kita masukkan ke dalam fungsi utilitas

$$U = X^{0.5}Y^{0.5}$$

$$U = \left(\frac{P_Y Y}{P_X}\right)^{0.5} Y^{0.5}$$

$$U = \left(\frac{P_Y}{P_X}\right)^{0.5} Y$$

$$Y = U\ \left(\frac{P_X}{P_Y}\right)^{0.5}$$

Untuk barang konsumsi X kita lakukan hal yang sama

$$U = X^{0.5}Y^{0.5}$$

$$U = \left(\frac{P_X X}{P_Y}\right)^{0.5} X^{0.5}$$

$$U = \left(\frac{P_X}{P_Y}\right)^{0.5} X$$

$$X = U\left(\frac{P_Y}{P_X}\right)^{0.5}$$

Sehingga jumlah barang konsumsi X dan Y yang akan meminimalkan pendapatan

$$X = U\left(\frac{P_Y}{P_X}\right)^{0.5} \qquad \text{dan} \qquad Y = U\left(\frac{P_X}{P_Y}\right)^{0.5}$$

Contoh

Misalkan kepuasan seorang konsumen dari mengkonsumsi barang X dan Y dicerminkan oleh fungsi utilitas $U = x^2 y^3$. Jumlah pendapatan konsumen 1000 rupiah, harga X dan harga Y per unit masing-masing 25 rupiah dan 50 rupiah, kita akan mencoba menghitung berapa kombinasi konsumsi X dan Y yang memberikan kepuasan optimum, serta besarnya nilai kepuasan optimum. Buktikan pula bahwa pada tingkat kepuasan optimum tersebut $MU_X/P_x = MU_Y/P_y$.

$$\left.\begin{array}{l} U = x^2 y^3 \\ 25\,x + 50\,y - 1.000 = 0 \end{array}\right\} \begin{aligned} F(x,y) &= x^2y^3 + \lambda(25 + 50\,y - 1.000) \\ &= x^2y^3 + 25\,\lambda x + 50\,\lambda y - 1.000\,\lambda \end{aligned}$$

Agar F maksimum:

$$F_x = 2xy^3 + 25\,\lambda \ = 0 \rightarrow -\lambda = \frac{2\,xy^3}{25} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$F_y = 3x^2y^2 + 50\,\lambda \ = 0 \rightarrow -\lambda = \frac{2\,x^2y^3}{25} \ldots.\ldots\ldots.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$

Berdasarkan (1) dan (2),

$$\frac{2xy^3}{25} = \frac{3y^2y^2}{50} \rightarrow 100\,xy^3 = 75\,x^2\,y^2, y = \frac{3}{4}x$$

$$25\,x + 50\,y - 1.000 = 0$$

$$25\,x + 50\left(\frac{3}{4}x\right) = 1.000 \rightarrow x = 16$$

$$y = \frac{3}{4}; \quad x = 2$$

$$U = x^2y^3 = (16)^2\,(12)^3 = 442.368\,.$$

Kombinasi konsumsi yang memberikan kepuasan optimum adalah 16 unit X dan 12 unit Y, dengan nilai kepuasan U = 442.368.

Untuk x = 16 dan y = 12,

$$MU_X = 2xy^3 = 2(16)(12)^3 = 55.296$$

$$MU_Y = 3\,x^2\,y^2 = 3(16)^2(12)^{12} = 110.592$$

$$MU_X/P_x = 55.296/25 = 2.211{,}84$$

$MU_Y/P_y = 110.592/50 = 2.211{,}84$ terbukti.

$$\frac{MU_X}{P_x} = \frac{MU_Y}{P_y}$$

e. Produk Marjinal Parsial

Produksi ialah suatu proses mengolah faktor produksi (input) menjadi suatu keluaran (output). Faktor produksi antara lain berupa modal, tenaga kerja, tanah, bahan baku, sumber daya alam, teknologi, dan sebagainya. Jika jumlah keluaran yang dihasilkan dilambangkan dengan P dan masukan yang digunakan dilambangkan dengan x_i (i = 1, 2…………., n) maka fungsi produksinya dapat dituliskan dengan notasi $P = f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n)$.

Sebagian dari masukan yang digunakan sudah barang tentu merupakan masukan tetap, sementara sebagian lainnya adalah masukan variabel. Selanjutnya untuk penyederhanaan model diasumsikan hanya dalam suatu proses produksi hanya terdiri dari dua faktor produksi yaitu modal (*K)* dan tenaga kerja (*L*), maka fungsi produksinya secara pasti dapat dinyatakan dengan

$$P = f(K,L)$$

Derivatif pertama dari *P* merupakan produk marjinal parsialnya.

$\frac{\partial P}{\partial k}$ adalah produk marjinal berkenan dengan masukan *K*

$\frac{\partial P}{\partial l}$ adalah produk marjinal berkenan dengan masukan *L*

Untuk *P* = konstanta tertentu, fungsi produksi $P = f(k,l)$ merupakan suatu persamaan *isoquant*, yaitu kurva yang menunjukkan berbagai kombinasi pengunaan masukan *K* dan *L* yang menghasilkan keluaran dalam jumlah sama.

Keseimbangan produksi maksudnya ialah suatu keadaan atau tingkat penggunaan kombinasi faktor-faktor produksi secara optimum, yakni suatu tingkat pencapaian produksi dengan kombinasi biaya terendah (*least cost combination*). Secara geometri, keseimbangan produksi terjadi pada persinggungan *isocost* dengan *isoquant.* Pada titik persinggungan tersebutlah terjadi jumlah kombinasi optimal antara faktor produksi *K* dan *L* yang akan memaksimalkan jumlah output.

Isocost adalah kurva yang mencerminkan kemampuan produsen membeli berbagai macam masukan berkenaan dengan harga masing-masing masukan dan jumlah dana yang dimilikinya. Jika jumlah dana yang dianggarkan untuk membeli masukan K dan masukan L adalah sebesar M, serta harga masukan K dan masukan L masing-masing P_k dan P_l, persamaan *isocost*-nya dapat dituliskan dengan notasi $M = K.P_k + L.P_l$.

Tingkat kombinasi penggunaan masukan yang optimum atau "*least cost combination*" dapat dicari dengan metoda Lagrange.

Dalam hal ini fungsi produksi $P = f(K, L)$ dimaksimumkan terhadap fungsi *isocost* $M = K.P_k + L.P_l$.

Fungsi tujuan yang hendak dioptimumkan : $P = f(K, L)$

Fungsi kendala yang dihadapai : $M = K.P_K + L.P_L$

$K.P_K + L.P_L - M = 0$

fungsi baru Lagrange : $F(K, L) = f(K,L) + \lambda(K.P_K + L.P_L - M)$

syarat yang diperlukan agar $F(K, L)$ maksimum:

$$F_k(K,L) = 0 \rightarrow f_K(K,L) + \lambda P_K = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$F_l(K,L) = 0 \rightarrow f_L(K,L) + \lambda P_L = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (2)$$

Dari (1) dan (2) nilai k dan nilai l dapat diperoleh.

Selanjutnya nilai p maksimum bisa dihitung.

Produksi total : $P = f(K, L)$

(1) Produksi marjinal masukan K : $MP_K = f_K(K,L) = \frac{\partial P}{\partial K}$

(2) Produksi marjinal masukan L : $MP_L = f_L(K,L) = \frac{\partial P}{\partial L}$

Pengembangan lebih lanjut persamaan (1) dan (2) di atas tadi akan menghasilkan:

(1) $f_K\ (K,L) + \ \lambda P_k = 0 \rightarrow f_k(K,L) = -\lambda P_k,\ -\lambda = \frac{f_k(K,L)}{P_k}$

(2) $f_L\ (K,L) + \ \lambda P_L = 0 \rightarrow f_L(K,L) = -\lambda P_L,\ -\lambda = \frac{f_L(K,L)}{P_L}$

Dengan demikian, syarat keseimbangan produksi dapat juga dirumuskan:

$$\frac{f_k(K,L)}{P_k} = \frac{f_L(K,L)}{P_L}$$

$$\frac{MP_K}{P_k} = \frac{MP_L}{P_l}$$

Jadi dalam rumusan lain dapat pula dinyatakan, bahwa produksi optimum dengan kombinasi biaya terendah akan tercapai apabila hasilbagi produk marjinal masing-masing masukan terhadap harganya bernilai sama.

Contoh:

Fungsi produksi suatu barang dinyatakan dengan $P = 6\ k^{2/3} /^{1/3}$. Bentuklah fungsi marjinal untuk masing-masing faktor produksi. Berapa produk marjinal tersebut jika digunakan 8 unit *K* dan 27 unit *L*?

$P = 6\ k^{2/3} /^{1/3}$

$MP_K = P_k = \frac{\partial P}{\partial k} = 4\ k^{-1/3} /^{1/3} = \frac{4 /^{1/3}}{k^{1/3}}$

Jika *k* = 8 dan / = 27,

$MP_K = \frac{4(27)^{1/3}}{8^{1/3}} = \frac{4\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4(3)}{2} = 6$

$MP_L = \frac{2(8)^{2/3}}{27^{2/3}} = \frac{2\sqrt[2]{8^2}}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{2\ (4)}{9} = \frac{8}{9}$

Contoh:

Seorang produsen mencadangkan 96 rupiah untuk membeli masukan *K* dan masukan *L*. Harga per unit masukan *K* adalah 4 rupiah dan masukan *L* adalah 3 rupiah. Fungsi produksinya *P* = 12 *kl*. Buktikan bahwa untuk mencari tingkat produksi optimum berlaku ketentuan $MP_K / P_k = MP_L / P_l$.

$P = 12\ kl \rightarrow MP_x = \frac{\partial P}{\partial k} = 12\ l\ dan\ MP_L = \frac{\partial P}{\partial l} = 12\ k$

Untuk $P_k = 4, P_l = 3, k = 12\ dan\ l = 16$:

$\frac{MP_K}{P_k} = \frac{MP_L}{P_l} \rightarrow \frac{12\ l}{4} = \frac{12\ k}{3} \rightarrow \frac{12(16)}{4} = \frac{12(12)}{3}$ terbukti

f. Optimum Produksi

Apabila dalam teori perilaku konsumen kita mendapatkan suatu perilaku yang memaksimumkan utilitas dengan suatu kendala anggaran tertentu. Maka pada teori prilaku produsen kita juga mempunyai suatu perilaku yang memaksimumkan jumlah output dengan suatu kendala biaya tertentu. Fungsi produksi pada teori perilaku produsen dikenal dengan kurva isoquant, yaitu suatu kurva yang menggambarkan kombinasi faktor produksi (K (modal) dan L (tenaga kerja)) untuk menghasilkan suatu jumlah output tertentu. Kendala yang dihadapi oleh produsen adalah kendala biaya yang dikenal dengan kurva isocost. Titik optimal ialah pada kondisi persinggungan antara kurva isoquant dengan kurva isocost.

Terdapat dua solusi optimal sebagaimana pada teori perilaku konsumen, yaitu:

1. Memaksimumkan jumlah output pada suatu kendala biaya tertentu

   $\max_{K,L}\ f(K, L)$

s.t. C = wL + rK

dimana:

f (K, L) merupakan fungsi produksi output

L adalah tenaga kerja

K adalah modal

w adalah upah/gaji

r adalah tingkat bunga/sewa

Misalkan: diketahui fungsi produksi suatu barang ialah $Q = K^{0.5}L^{0.5}$, dengan fungsi kendala biaya adalah: C = wL + rK.

Hitunglah berapa jumlah faktor produksi K dan L yang dibutuhkan untuk memaksimumkan jumlah output?

Jawab:

$$\max_{K,L}\ Q = K^{0.5}L^{0.5}$$
$$s.t.\ C = wL + rK$$

Bentuk fungsi Lagrange dari fungsi maksimisasi di atas:

$$\mathcal{L} = K^{0.5}L^{0.5} + \lambda\,(C - wL - rK)$$

Lakukan turunan pertama:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0.5K^{-0.5}L^{0.5} - \lambda r = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0.5K^{0.5}L^{-0.5} - \lambda w = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = C - wL - rK = 0 \qquad (3)$$

Dari persamaan (1) dan (2) kita bisa dapatkan

$$\frac{0.5K^{-0.5}L^{0.5}}{r} = \frac{0.5K^{0.5}L^{-0.5}}{w}$$

$$\frac{w}{r} = \frac{0.5K^{0.5}L^{-0.5}}{0.5K^{-0.5}L^{0.5}}$$

$$\frac{w}{r} = \frac{K}{L}$$

$$w = \frac{rK}{L}\ ; r = \frac{wL}{K} \qquad (4)$$

Persamaan (4) kita masukkan ke dalam fungsi kendala biaya

C = wL + rK

C = $\frac{rK}{L}L + rK$

$C = rk + rK$

C = 2 rK

$K = \frac{C}{2r}$

Untuk jumlah tenaga kerja (L) kita lakukan hal yang sama

C = wL + rK

C = $wL + \frac{wL}{K}\ K$

$C = wl + wl$

C = 2 wl

$L = \frac{C}{2w}$

Sehingga jumlah K dan L yang memaksimalkan jumlah output adalah

$K = \frac{C}{2r}$ dan $L = \frac{C}{2w}$

2. Meminimumkan biaya pada suatu jumlah output tertentu

   $\min_{K,L}\ f(C)$

   s.t. Q = f (K, L)

   dimana:

   f (C) merupakan fungsi biaya

   L adalah tenaga kerja

   K adalah modal

   w adalah upah/gaji

   r adalah tingkat bunga/sewa

   Misalkan: diketahui fungsi biaya adalah C = wL + rK dengan kendala utilitas ialah $Q = K^{0.5}L^{0.5}$:

   Hitunglah berapa jumlah faktor produksi K dan L yang dibutuhkan untuk meminimumkan biaya pada suatu jumlah output tertentu?

   Jawab:

   $$\min_{K,L} C = wL + rK$$
   $$s.t.\ Q = K^{0.5}L^{0.5}$$

   Bentuk fungsi Lagrange dari fungsi maksimisasi di atas:

   $\mathcal{L} = wL + rK + \lambda\,(Q - K^{0.5}L^{0.5})$

   Lakukan turunan pertama:

   $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = r - 0.5\lambda K^{-0.5}L^{0.5} = 0$ (1)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w - 0.5\lambda K^{0.5}L^{-0.5} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = Q - K^{0.5}L^{0.5} = 0 \qquad (3)$$

Dari persamaan (1) dan (2) kita bisa dapatkan

$$\frac{r}{0.5K^{-0.5}L^{0.5}} = \frac{w}{0.5K^{0.5}L^{-0.5}}$$

$$\frac{w}{r} = \frac{0.5K^{0.5}L^{-0.5}}{0.5K^{-0.5}L^{0.5}}$$

$$\frac{w}{r} = \frac{K}{L}$$

$$K = \frac{wL}{r}\ ; L = \frac{rK}{w} \qquad (4)$$

Persamaan (4) kita masukkan ke dalam fungsi produksi

$$Q = K^{0.5}L^{0.5}$$

$$Q = \left(\frac{wL}{r}\right)^{0.5} L^{0.5}$$

$$Q = \left(\frac{w}{r}\right)^{0.5} L$$

$$L = Q\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5}$$

Untuk jumlah modal (K) kita lakukan hal yang sama

$$Q = K^{0.5}L^{0.5}$$

$$Q = K^{0.5}\left(\frac{rK}{w}\right)^{0.5}$$

$$Q = K\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5}$$

$$K = Q\left(\frac{w}{r}\right)^{0.5}$$

Sehingga jumlah K dan L yang meminimalkan biaya ialah

$$K = Q\left(\frac{w}{r}\right)^{0.5} \quad \text{dan} \quad L = Q\left(\frac{r}{w}\right)^{0.5}$$

Contoh:

Seorang produsen mencadangkan 96 rupiah untuk membeli masukan *K* dan masukan *L*. Harga per unit masukan *K* adalah 4 rupiah dan masukan *L* adalah 3 rupiah. Fungsi produksinya $P = 12\ KL$. Berapa unit masing-masing masukan seharusnya ia gunakan agar produksinya optimum, dan beberapa unit keluaran yang dihasilkannya dari kombinasi tersebut?

Fungsi produksi yang hendak dioptimumkan : $P = f(k,l) = 12\ kl$

Fungsi *isocost* yang menjadi kendala : $M = k.P_k + l.P_l$

$96 = 4\ k + 3\ l$

$96 – 4\ k – 3\ l = 0.$

Fungsi Lagrange:

$$F(k.l) = 12kl + \lambda(96 - 4\ k - 3\ l)$$
$$= 12kl + 96\lambda - 4\ \lambda k - 3\ \lambda l)$$

Agar F maksimum, $F_k = 0$ dan $F_l = 0$

$$\left.\begin{aligned} F_k(k,l) &= 12\ l - 4\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 3\ l \\ F_l(k,l) &= 12\ k - 3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 4\ k \end{aligned}\right\}\ 3\ l = 4\ k$$

$96 = 4\ k + 3\ l$

$96 = 4\ k + 4\ k \rightarrow k = 12$

$l = 4/3\ (12) = 16$

$P = 12\ kl = 12(12)(16) = 2304.$

Jadi agar produksinya optimum seharusnya digunakan kombinasi 12 unit K dan 16 unit L, denga hasil produksi 2304 unit.

Latihan

1. Jika diketahui: $R(Q) = 32Q - Q^2$

   $C(Q) = Q^2 + 8Q + 4$

   $\pi_0 = 18$

   Tentukan solusi dari optimisasi berikut yang memenuhi kondisi Kuhn Tucker:

   Max $R(Q)$

   s.t. $C - R \leq -\pi_0$

2. Jika diketahui fungsi produksi suatu barang ialah $Q = K^{0.2}L^{0.8}$, dengan fungsi kendala biaya adalah: C = wL + rK. (a) Hitunglah berapa jumlah faktor produksi K dan L yang dibutuhkan untuk memaksimumkan jumlah output? (b) Hitunglah berapa jumlah faktor produksi K dan L yang dibutuhkan untuk meminimumkan biaya pada suatu jumlah output tertentu?

3. Selesaikan optimisasi berikut dengan menggunakan Kuhn-Tucker dalam upaya memaksimumkan kepuasan terhadap jumlah waktu yang telah ditetapkan:

   Max $U(k, d) = kd^2 - 10k$

   s.t. $2k + 8d \leq 116$

4. Buktikan bahwa fungsi produksi *Cobb-Douglas* $P = 6K^{2/3}L^{1/3}$ adalah fungsi homogen berderajat satu (homogen linier)?