BAB 8
DIFERENSIAL

A. Kuosien Diferensiasi dan Derivatif

Diferensial membahas tentang tingkat perubahan suatu fungsi sehubungan dengan perubahan kecil dalam variabel bebas fungsi yang bersangkutan. Dengan diferensial dapat diketahui posisi dari fungsi yang sedang dipelajari seperti titik maksimum, titik belok ataupun titik minimum. Konsep diferensial menjadi salah satu alat analisis yang penting dalam ekonomi.

Jika y = *f(x)* dan terdapat tambahan variabel bebas x sebesar Δ x, maka bentuk persamaannya dapat dituliskan menjadi:

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Dimana Δx adalah tambaha x, dan Δy adalah tambahan y sebagai akibat adanya tambahan x. Jadi Δy ada karena adanya Δx. Apabila ruas kiri dan ruas kanan dari persamaan di atas dibagi Δx di kedua sisi, maka diperoleh:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Bentuk $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ inilah yang disebut dengan hasilbagi perbedaan atau kuosien diferensiasi (*difference quotient*), memperlihatkan tingkat perubahan rata-rata variabel terikat y terhadap variabel bebas x.

Proses penurunan sebuah fungsi, disebut juga proses pendiferensiasian atau diferensasi, pada dasarnya merupakan penentuan limit suatu kuosien diferensiasi dalam hal pertambahan variabel bebasnya sangat kecil atau mendekati nol. Hasil yang diperoleh dari proses diferensiasi tersebut dinamakan turunan atau derivatif (derivative).

Dengan demikian, jika y = *f(x)*

maka kuosien diferensiasinya $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

dan turunan fungsinya $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

B. Kaidah Diferensial

Derivatif pertama dari suatu fungsi y = *f(x)* adalah limit bagi perbedaan di mana $\Delta_x \rightarrow 0$, oleh karena itu untuk menentukan nilai dari derivatif suatu fungsi tersebut dapat dilakukan dengan dua cara, antara lain:

1. Menentukan hasilbagi perbedaan dari fungsi tersebut, seperti pada metode laju perubahan fungsi;
2. Mencari nilai limit dari hasil bagi perbedaan tersebut ketika delta x (jarak perubahan dari x) mendekati nol ($\Delta_x \rightarrow 0$).

Akan tetapi, pada bab ini dibahas metode secara langsung untuk mencari nilai derivatif pertama dari suatu fungsi dengan cara menggunakan aturan-aturan diferensiasi (cara kedua).

Notasi derivatif yang digunakan dalam buku ini: $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ $atau\, f'(x)$, dengan aturan sebagai berikut:

- **Diferensiasi Konstanta → y = k (Konstanta)**

Untuk suatu fungsi konstan → y = k (konstanta), turunan pertama dari fungsi tersebut adalah 0 (nol), seperti telah diungkapkan sebelumnya pada metode laju perubahan fungsi:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Contoh:

a. y = 7, maka $\frac{dy}{dx} = 0$

b. y = log 10, maka $\frac{dy}{dx} = 0$

c. y = ln e, maka $\frac{dy}{dx} = 0$

- **Diferensiasi Fungsi Pangkat: *f(x)* = x^n**

Untuk suatu fungsi *f(x)*: y = x^n, secara umum derivatif (turunan pertama) dari fungsi tersebut dinyatakan:

$$\frac{dy}{dx} = n.x^{n-1}$$

Contoh:

a. y = x^{10}, maka $\frac{dy}{dx} = 10\, x^9$

b. y = x^8, maka $\frac{dy}{dx} = 8\, x^7$

c. y = x^{21}, maka $\frac{dy}{dx} = 21\, x^{20}$

- **Diferensiasi Perkalian Konstanta dengan Fungsi:**

  (y = k . u, dimana u = *f(x)* dan k = Konstanta)

Untuk suatu fungsi *f(x)*: y = k .u, di mana u fungsi dari x dan k Konstanta, secara umum derivatif (turunan pertama) dari fungsi tersebut dinyatakan:

$$\frac{dy}{dx} = k.\frac{du}{dx}$$

Contoh:

a. y = ax^n, maka $\frac{dy}{dx} = a\ (n)x^{n-1} = anx^{n-1}$

b. y = $3x^9$, maka $\frac{dy}{dx} = 3\ (9)x^{9-1} = 27x^8$

c. y = $10x^{-3}$, maka $\frac{dy}{dx} = 10(-3)x^{-3-1} = -30x^{-4}$

d. y = $\sqrt{2x^8}$, atau y = $(2x)^{8/2}$ → $\frac{dy}{dx} = 8x^3$

- **Diferensiasi Pembagian Konstanta dengan Fungsi**

  Jika $y = \frac{k}{v}$, dimana v = *f(x)*, maka $\frac{dy}{dx} = -\frac{k.dv/dx}{v^2}$

Contoh:

a. $y = \frac{4}{x^3}, \frac{dy}{dx} = -\frac{4(3x^2)}{(x^3)^2} = -\frac{12x^2}{x^6}$

b. $y = \frac{5}{x^4}, \frac{dy}{dx} = -\frac{5(4x^3)}{(x^4)^2} = -\frac{20x^3}{x^8}$

- **Diferensiasi Penjumlahan (Pengurangan) Fungsi: y = u ± v**

Suatu fungsi penjumlahan, y = u ± v, di mana u = *f(x)* dan v = g(x), turunan pertama dari model fungsi tersebut dinyatakan:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

Atau:

$$\frac{dy}{dx} = u' \pm v'$$

Contoh:

a. y = (5x + 7), maka $\frac{dy}{dx} = u' + v' \rightarrow \frac{dy}{dx} = 5 + 0$

b. y = ($4x^2$ + 10x + 3), maka $\frac{dy}{dx} = u' + v' \rightarrow \frac{dy}{dx} = 8x + 10$

c. y = $5x^2 - 7x^{-3}$, maka $\frac{dy}{dx} = 10x + 21x^{-4}$

d. y = (5x + 6) + ($5x^3$ + 4x), maka $\frac{dy}{dx} = u' + v' \rightarrow \frac{dy}{dx} = (5) + (15x^2 + 4)$

- **Diferensiasi Perkalian Fungsi: y = u .v**

Suatu perkalian fungsi: y = u . v, di mana u = *f(x)* dan v = g(x), turunan pertama dari model fungsi tersebut dinyatakan:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot (v) + (u) \cdot \frac{dv}{dx}$$

Atau:

$$\frac{dy}{dx} = u' \cdot v + u \cdot v$$

Contoh:

a. $y = (4x^6 + 8x - 12)(½\, x^3 + 8)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}(v) + (u)\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (24x^5 + 8)\left(\frac{1}{2}x^3 + 8\right) + (4x^6 + 8x - 12)(\frac{3}{2}x^2)$$

b. $y = (2x^2 - 4x)(3x^{1/3} + 8x^{-2})$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}(v) + (u)\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (4x - 4)\left(3x^{\frac{1}{3}} + 8x^{-2}\right) + (2x^2 - 4x)(x^{-\frac{2}{3}} - 16x^{-3})$$

c. $y = (2x^2 - 4x)(3x^{1/3} + 8x^{-2})(\frac{1}{3}x^4 - 3x^4)$

y = u. v. w

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{du}{dx}\right)(vw) + \left(\frac{dv}{dx}\right)(uw) + \left(\frac{dw}{dx}\right)(uv)$$

$$\frac{dy}{dx} + (4x - 4)\left\{\left(3x^{\frac{1}{3}} + 8x^{-2}\right)\left(\frac{1}{3}x^4 - 3x^4\right)\right\}$$
$$+ \left(x^{-\frac{2}{3}} - 16x^{-3}\right)\left\{(2x^2 - 4x)\left(\frac{1}{3}x^4 - 3x^4\right)\right\}$$
$$+ \left(\frac{4}{3}x^3 - 12x^3\right)\left\{(2x^2 - 4x)\left(3x^{1/3} + 8x^{-2}\right)\right\}$$

- **Diferensiasi Pembagian Fungsi**

Suatu fungsi $y = \frac{u}{v}$, di mana u = *f(x)* dan v = g(x), maka turunan dari fungsi tersebut dinyatakan:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)v - u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}$$

Atau dapat ditulis:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Contoh:

a. $y = \frac{2x^2}{x^3}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{(4x.)(x^3) - (3x^2).(2x^2)}{(x^3)^2} = \frac{4x^4 - 6x^4}{x^6}$

$= \frac{-2}{x^2} = -2x^{-2}$

b. $y = \frac{3x^3}{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{(9x^2)(x^2) - (2x)(3x^3)}{(x^2)^2} = \frac{9x^4 - 6x^4}{x^4}$

$= \frac{3x^4}{x^4} = 3$

- **Diferensiasi Polinomial**

  $y = C \,.\, x^n$

  $\frac{dy}{dx} = C \cdot n \cdot X^{n-1}$

  Contoh:

  a. $y = 5X^4 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 20x^3$

  $y = 10x^5 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 50x^4$

- **Diferensiasi Fungsi Komposit**

  Jika y = *f(u)*, sedangkan u = *g(x)*, dengan kata lain y = *f{g(x)}*,

  Maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$

  Contoh:

  a. $(3x^2 + 5)^2$

  Misalkan $u = 3x^2 + 5$, $du/dx = 6x$

  sehingga $y = u^2$, $dy/du = 2u$

  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = 2u(6x) = 2(3x^2 + 5)(6x) = 36x^3 + 60x$

  b. $(2x^2 + 3)^2$

  Misalkan $u = 2x^2 + 3$, $du/dx = 4x$

  sehingga $y = u^2$, $dy/du = 2u$

  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = 2u(4x)$

  $= 2(2x^2 + 3)(4x)$

  $= 16x^3 + 24x$

c. $(3x^3 + 8)^2$

Misalkan u = $3x^3 + 8$, $du/dx = 9x^2$

sehingga y = u^2, $dy/du = 2u$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = 2u(9x^2) = 2(3x^3 + 8)(9x^2)$

$= 54x^5 + 144x^2$

- **Diferensiasi Fungsi Berpangkat**

Jika y = u^n, dimana u = $g(x)$ dan n adalah konstanta

Maka $\frac{dy}{dx} = nu^{n-1}.\frac{du}{dx}$

Kaidah ini mirip dengan kaidah sebelumnya dan merupakan kasus khusus dari kaidah fungsi komposit. Untuk kaidah ini terdapat pula sebuah kasus khusus, yakni jika $u = f(x) = x$, sehingga $y = u^n = x^n$, maka $dy/dx = nu^{n-1}$

Contoh:

a. $(3x^2 + 5)^2$

Misalkan $u = 3x^2 + 5$, maka $du/dx = 6x$

$$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$= 2(3x^2 + 5)(6x) = 36x^3 + 60x$

b. $(2x^2 + 3)^2$

Misalkan $u = 2x^2 + 3$, maka $du/dx = 4x$

$$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$= 2(2x^2 + 3)(4x) = 16x^3 + 24x$

c. $(3x^3 + 8)^2$

Misalkan $u = 3x^3 + 8$, maka $du/dx = 9x^2$

$$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$= 2(3x^3 + 8)(9x^2)$

$= 54x^5 + 144x^2$

- **Diferensiasi Fungsi Logaritmik**

Jika $y = {}^a\log x$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$

Contoh:

$y = {}^5\log 2$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{2 \ln 5}$

- **Diferensiasi Fungsi Komposit-Logaritmik**

  Jika $y = {}^{a}\log u$, dimana $u = g(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{\log_a e}{u} . \frac{du}{dx}$

  Contoh:

  $y = \log\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$

  Misalkan $u = \frac{(x-3)}{(x+2)} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{(x+2)-(x-3)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$

  $$\frac{dy}{dx} = \frac{\log_a e}{u} . \frac{du}{dx}$$
  $$= \frac{\log e}{\frac{(x-3)}{(x+2)}} . \frac{5}{(x+2)^2}$$
  $$= \frac{5 \log e}{(x-3)(x+2)} = \frac{5 \log e}{(x^2-x-6)}$$

- **Diferensiasi Fungsi Komposit-Logaritmik-Berpangkat**

  Jika $y = ({}^{a}\log u)^n$, dimana $u = g(x)$ dan n adalah konstanta, maka

  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{\log_a e}{u} . \frac{du}{dx}$

  Contoh: $y = (\log 5\, x^2)$

  Misalkan $u = 5\, x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 10x$

  $$\frac{dy}{dx} = 3(\log 5\, x^2)^2 \left(\frac{\log e}{5\, x^2}\right) (10x)$$
  $$= \frac{30x(\log 5\, x^2)^2 \log e}{5\, x^2} = \frac{6}{x}(\log 5\, x^2) \log e$$

- **Diferensial Fungsi Logaritma Natural**

  (${}^{e}\log x = \text{In } x$) jika $y = {}^{e}\log x$ atau $y = \text{In } x$, maka:

  $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot {}^{e}\log e \cdot (1)$$

  Jika $y = {}^{e}\log u$, di mana $u = f(x)$, maka:

  $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot {}^{e}\log e \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)$$

  Jika $y = (\ln u)^n$, dimana $u = g(x)$ dan n adalah konstanta, maka:

  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{1}{u} . \frac{du}{dx}$

  Contoh:

  a. $y = \ln x^3, maka\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(3x^3)$

  b. $y = (\ln 5\, x^2)^3$, maka $\frac{dy}{dx} = 3(\ln 5\, x^2)^2 \left(\frac{1}{5x^2}\right)(10x)$

  $$= \frac{6}{x}(\ln 5\, x^2)^2$$

- **Diferensiasi Fungsi Eksponensial**

Untuk menyelesaikan model diferensial dari fungsi eksponensial, caranya adalah sebagai berikut: "*Kalikan masing-masing ruas kiri dan kanan dengan Logaritma Natural* (*In*)", dari bentuk fungsi eksponensial: y =a^x, setelah dikalikan dengan In, hasilnya: In y = In a^x

Langkah selanjutnya, gunakan aturan logaritma yang menyatakan, bahwa log $a^b = b$ log a, sehingga hasil perkalian dengan *In* dari fungsi eksponensial tersebut menjadi: In $y = x$ In a, kemudian tentukan turunan (derivatif) dari fungsi masing-masing ruasnya, seperti berikut:

In y = In a^x, atau In $y = x$ In a

Hasil, turunan fungsi terhadap x pada masing-masing ruasnya, seperti berikut:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \ln \boldsymbol{a} + x \cdot 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \ln \boldsymbol{a}$$

$$\frac{dy}{dx} = (x \,\mathrm{In}\, \boldsymbol{a}) \cdot \ln \boldsymbol{a}$$

Contoh:

a. $y = 5^x$, $\frac{dy}{dx} = \boldsymbol{a^x} \ln \boldsymbol{a} = 5^{\boldsymbol{x}} \ln 5$

Dalam hal $y = e^x$, maka $dy/dx = e^x$ juga, sebab ln e = 1

b. $y = \ln 10^{(2x-3)}, \frac{dy}{dx}$

$y = \{\ln 10^{(2x-3)}\} \rightarrow y = (2x-3) \ln 10$

$\frac{dy}{dx} = 2 \ln 10$

- **Diferensiasi Fungsi Kompleks**

Jika $y = u^v$, dimana $u = g(x)$ dan $v = h(x)$

maka $\frac{dy}{dx} = vu^{v-1}.\frac{du}{dx} + u^v.\ln u.\frac{dv}{dx}$

penentuan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = u^v$ ini dapat pula dilakukan dengan jalan melogaritmakan fungsi atau persamaannya, kemudian mendiferensiasikan masing-masing ruasnya.

$y = u^v$

$\ln y = v \ln u$

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = v\frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \ln u \;\frac{dv}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \left(v \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \ln u \ \frac{dv}{dx}\right) u^v$ mengingat $y = u^v$

$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1}.\frac{du}{dx} + u^v.\ln u.\frac{dv}{dx}$

Contoh:

a. $y = 4x^{x^3}$

Misalkan $u = 4x \rightarrow \frac{du}{dx} = 4$; dan; $v = x^3 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 3x^2$

$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1}.\frac{du}{dx} + u^v.\ln u.\frac{dv}{dx}$

$= (x^3)4x^{x^3-1}(4) + 4x^{x^3}\ln 4x\ (3x^2)$

$= 16x^{x^3+2} + 12x^{x^3+2}\ln 4x$

$= 4x^{x^{3+2}}(4 + 3\ln 4x)$

b. $y = x^{(x^2+1)^3}$

Misalkan $u = x \rightarrow \frac{du}{dx} = 1$; dan; $v = (x^2+1)^3 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 6x(x^2+1)^2$

$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1}.\frac{du}{dx} + u^v.\ln u.\frac{dv}{dx}$

$= (x^2+1)^3 x^{(x^2+1)^3-1}(1) + x^{(x^2+1)^3} lnx\{6x(x^2+1)^2\}$

$= (x^2+1)^3 x^{(x^2+1)^3-1} + 6x^{(x^2+1)^3+1}\ (x^2+1)^2\ln x$

$= (x^2+1)^2 x^{(x^2+1)^3+1}\{(x^2+1)x^{-2} + 6\ln x\}$

- **Diferensiasi Fungsi Balikan**

Jika *y* = *f(x)* dan *x* = *g(y)* adalah fungsi-fungsi yang saling berkebalikan (*inverse function*), maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$

Contoh:

a. *x = 5y + 0,5 y*^{4}

$\frac{dx}{dy} = 5 + 2\,y^3 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = 1/(5 + 2\,y^3)$

b. *x = ln* (2 *y*^{3} + *y*^{2})

$\frac{dx}{dy} = \frac{6\,y^2+2y}{2\,y^3+y^2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{2y^3+y^2}{6y^2+2y} = \frac{2y^2+y}{6y+2}$

- **Diferensiasi Implisit**

Jika *f(x, y) = 0* merupakan fungsi implisit sejati (tidak mungkin dieksplisitkan), *dy/dx* dapat diperoleh dengan mendiferensiasikannya suku demi suku, dengan menganggap *y* sebagai fungsi dari *x*.

a. $4xy^2 - x^2 + 2y = 0$, tentukan *dy/dx*

$$8xy\,\frac{dy}{dx} + 4y^2 - 2x + 2\,\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(8\,xy + 2)\frac{dy}{dx} = 2x - 4y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 4y^2}{8\,xy + 2} = \frac{x - 2y^2}{4xy + 1}$$

Dalam contoh ini $4\,xy^2$ diperlakukan sebagai perkalian dua fungsi x, kemudian didiferensiasikan dengan menggunakan kaidah perkalian fungsi. Jadi, $u = 4\,x$ dan $v = y^2$, diperoleh $du/dx = 4$ dan $dv/dx = 2y\ (dy/dx)$, sehingga $d(uv)/dx = u(dv/dx) = u(dv/dx) + v(du/dx) = 8\,xy\ (dy/dx) + 4y^2$. Adapaun *dy/dx* dari x^2 adalah $2x$, sedangkan *dy/dx* dari $2y$ adalah $2\ (dy/dx)$.

b. $x^2y - e^x - e^y = 5$, tentukan *dy/dx*

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2\,xy - e^x - e^y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x^2 - e^y)\frac{dy}{dx} = e^x - 2\,xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - 2\,xy}{x^2 - e^y}$$

C. Hakikat Derivatif dan Diferensial

Telah dijelaskan sebelumnya perbedaan sekaligus kesamaan antara kuosien diferensi dan derivatif sebuah fungsi. Kuosien diferensi $\Delta y/\Delta x$ tak lain adalah lereng dari kurva $y = f(x)$. Sedangkan derivatif *dy/dx* adalah lim ($\Delta y/\Delta x$) untuk $\Delta x \to 0$. Jika Δx sangat kecil, $\lim_{\Delta x \to 0}(\Delta y/\Delta x) = \Delta y/\Delta x$ itu sendiri, atau derivatif fungsi yang bersangkutan sama dengan kuosien diferensinya ($dy/dx = \Delta y/\Delta x$). Jadi untuk Δx yang sangat kecil, derivatif (seperti halnya kuosien diferensi) juga mencerminkan lereng dari kurva $y = f(x)$ (Dumairy, 2007: 208).

Notasi derivatif *dy/dx* sesungguhnya terdiri atas dua suku, yaitu *dy* dan *dx*. Suku *dy* dinamakan diferensial dari *y*, sedangkan *dx* merupakan diferensial dari *x*. Diferensial dari *x (dx)* mencerminkan perubahan yang sangat kecil pada variabel bebas *x*.

diferensial dari $x : dx = \Delta x$

Adapun diferensial dari *y* (*dy*) mencerminkan taksiran perubahan pada variabel terikat *y* berkenaan dengan perubahan sangat kecil pada variabel bebas *x*. Diferensial dari variabel terikat sebuah fungsi sekaligus merupakan pula diferensial dari fungsi yang bersangkutan, yakni hasilkali derivatifnya terhadap perubahan pada variabel bebas.

diferensial dari *y : dy* $=\frac{dy}{dx}\ \Delta x$

Berdasarkan penjelasanmengenai masing-masing *dx* dan *dy* di atas, maka derivatif *dy/dx* tak lain adalah lereng taksiran dari kurva *y = f(x)* pada kedudukan *x* tertentu. Lereng yang sesungguhnya adalah kuosien diferensi $\Delta y/\Delta x$. Lereng taksiran ini dapat lebih besar dari, atau lebih kecil dari, atau sama dengan lereng yang sesungguhnya. Hal ini tergantung pada jenis fungsinya dan besar kecilnya perubahan pada variabel bebas.

Untuk fungsi *y = f(x)* yang linier, lereng taksiran senantiasa sama dengan lereng sesungguhnya, berapapun Δx. Atau dengan kata lain, derivatif fungsi linier tak lain adalah kuosien diferensinya, *dy/dx* = $\Delta y/\Delta x$. Berapapun Δx $(= dx)$, akan selalu *dy* = Δy, sehingga *dy/dx* = $\Delta y/\Delta x$.

Untuk fungsi *y = f(x)* yang non-linier, semakin besar Δx semakin besar pula perbedaan antara lereng taksiran (derivatif, *dy/dx*) dan lereng sesungguhnya (kuosien diferensiasi, $\Delta y/\Delta x$). Dengan Δx yang semakin besar, semakin besar pula perbedaan antara *dy* dan Δy, sehingga kian besar pula perbedaan antara *dy/dx* dan $\Delta y/\Delta x$. Sebaliknya, semakin kecil Δx semakin kecil pula perbedaan antara lereng taksiran dan lereng sesungguhnya. Dan jika Δx sangat kecil ($\Delta x \rightarrow$ 0), lereng taksiran akan sama dengan lereng sesungguhnya (kalaupun terdapat perbedaan, nilainya sedemikian kecilnya sehingga dapat diabaikan).

Untuk lebih dapat memahami penjelasan di atas, akan diberikan dalam bentuk contoh simulasi angka sebagai berikut:

Misalkan $y = 3x^2 - 4x + 5$ dan ingin diketahui serta dibandingkan nilai *dy* dan nilai Δy untuk $\Delta x = 0{,}0001$ dari kedudukan *x = 2*.

Jawab:

$\frac{dy}{dx} = 6x - 4 = 6(2) - 4 = 8$

$dy = \frac{dy}{dx}\Delta x = 8\ (0{,}0001) = 0{,}0008$

$\Delta y = f(x + \ \Delta x) - f(x)$

$= 3(x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x) + 5 - (3x^2 - 4x + 5)$

$= 3\ (2 + 0{,}0001)^2 - 4\ (2 + 0{,}0001) + 5 - 3(2)^2 + 4\ (2) = 0{,}0008$

Dalam contoh ini, untuk x = 2 dan $\Delta x = 0{,}0001$ ternyata dy = Δy = 0,0008, konsekuensinya dy/dx = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 8$. Berarti lereng taksirannya persis sama dengan lereng yang sesungguhnya.

Jika nilai Δx kita modifikasi menjadi $\Delta x = 0{,}0005$, maka:

$$dy = \frac{dy}{dx}\Delta x = 8\ (0{,}0005) = 0{,}004$$

$$\Delta y = 3(2 + 0{,}0005)^2 - 4(2 + 0{,}0005) + 5 - 3(2)^2 + 4(2) - 5 = 0{,}004$$

Sekali lagi $dy = \Delta y\ dan \frac{dy}{dx} = \ \Delta y/\Delta x$

Kemudian jika nilai $\Delta x = 0{,}001$, maka:

$$dy = \frac{dy}{dx}\Delta x = 8\ (0{,}001) = 0{,}008$$

$$\Delta y = 3(2 + 0{,}001)^2 - 4(2 + 0{,}001) + 5 - 3(2)^2 + 4(2) - 5 = 0{,}008003$$

Kali ini terdapat sedikit perbedaan antara dy dan Δy, yaitu sebesar 0,000003. Akan tetapi karena perbedaan sedemikian kecilnya sehingga dapat diabaikan. Dalam kasus ini, $dy < \Delta y$ berarti lereng taksirannya "*under-estimated*".

Selanjutnya akan dibahas mengenai derivatif dari derivatif. Setiap fungsi sebenarnya dapat diturunkan lebih dari satu kali tergantung pada derajatnya. Atau dengan kata lain, setiap turunan masih bisa diturunkan lagi. Turunan pertama suatu fungsi adalah turunan dari fungsi awal atau fungsi aslinya. Turunan kedua suatu fungsi adalah turunan dari turunan pertama, dan seterusnya.

Fungsi awal : $y = f(x)$

Turunan pertama : $y' \equiv f'(x) \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \frac{df(x)}{dx}$

Turunan kedua : $y'' \equiv f''(x) \equiv \frac{d^2y}{d^2x} \equiv \frac{d^2f(x)}{dx^2}$

Turunan ketiga : $y''' \equiv f'''(x) \equiv \frac{d^3y}{dx^3} \equiv \frac{d^3f(x)}{dx^3}$

Turunan ke-n : $y^n \equiv f^n(x) \equiv \frac{d^ny}{dx^n} \equiv \frac{d^nf(x)}{dx^n}$

Contoh:

$y = f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 10x - 15$

$y' = f'(x) = 6x^2 - 10x + 10$

$y'' = f''(x) = 12x - 10$

$y''' = f'''(x) = 12$

$y^{IV} = 0$

derivatif yang diperoleh dari derivatif sebuah fungsi dinamakan derivatif berderajat lebih tinggi (*higher-order derivatives*). Derivatif pertama dan derivatif kedua bermanfaat dalam pengoperasian di dalam analisis ekonomi, terkait dengan banyaknya fungsi di dalam analisis ekonomi.

D. Aplikasi Diferensial Dalam Ekonomi

Matematika sebagai alat untuk analisis dalam berbagai cabang disiplin ilmu, mempunyai peranan sangat menonjol sesuai dengan perkembangan ilmu pengetahuan. Dalam mempelajari teori ekonomi ilmu-ilmu sosial, matematika semakin banyak digunakan sebagai alat untuk mempermudah pemecahan masalah serta sebagai alat untuk mengambil keputusan ataupun perencanaan. Penggunaaan matematika dalam berbagai ilmu disiplin dinamakan sebagai matematika terapan, adalah merupakan bagian dari matematika, maka model penggunaan diferensial ini pun dinamakan sebagai diferensial terapan atau aplikasi diferensial.

Seperti telah diungkapkan sebelumnya, bahwa perhitungan diferensial adalah merupakan suatu perhitungan yang menyangkut masalah perubahan fungsi, maka sebagai kaitan permasalahan yang menyangkut masalah perubahan fungsi, maka sebagai kaitan permasalahan yang muncul di dalam teori ekonomi di antaranya perubahan marginal dari suatu fungsi, seperti perubahan atas biaya total (*Total Cost*), perubahan atas pendapatan total (*Total Revenue*), serta keuntungan maksimum dan lainnya.

1. Fungsi Biaya (Cost)

Dalam suatu proses produksi, dikenal istilah biaya. Biaya yang digunakan untuk seluruh proses produksi dikatakan sebagai biaya total (*Total cost*), sedangkan biaya yang digunakan untuk satu satuan unit produksi dikatakan sebagai biaya rata-rata (*Average Cost*). Biaya total terdiri dari total biaya tetap (jika produksi = 0) ditambah dengan biaya variabel, secara matematis biaya total dituliskan:

$$TC = TFC + TVC$$

Di mana:

TC : *Total cost*

TFC : *Total Fixed Cost* (biaya tetap)

TVC : *Total Variable Cost* (biaya tidak tetap)

Yang dimaksud dengan *fixed cost* adalah biaya dalam suatu unit kegiatan biaya ini tidak akan mengalami perubahan walaupun terjadi pengurangan atau penambahan produksi (misalnya dalam kegiatan produksi) sehingga untuk fungsi semacam ini di dalam matematika dikenal dengan istilah fungsi konstan FC = k (konstan).

Sedangkan yang dimaksud dengan *variable cost* adalah biaya yang sifatnya selalu berubah-ubah sesuai dengan suatu kondisi yang terjadi dalam suatu unit kegiatan, misalnya volume produksi ataupun kondisi yang lain; sehingga fungsi ini secara umum dinyatakan sebagai berikut: VC = f(Q), maka dari kenyataan itu dalam suatu proses produksi sebagai biaya totalnya adalah merupakan hasil jumlah dari unit biaya tetap yang terjadi dengan biaya variabelnya

TC = FC + VC

= k + f(Q)

Seperti telah diungkapkan sebelumnya, bahwa biaya rata-rata adalah merupakan biaya untuk satu satuan unit produksi, dengan demikian biaya rata-rata diartikan sebagai biaya total dibagi dengan jumlah unit yang diproduksi, secara matematis biaya rata-rata dituliskan:

$$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{TFC + TVC}{Q}$$

Di mana:

AC : *Average Cost* (biaya rata-rata)

Q : Jumlah unit barang

TFC : *Total Fixed Cost* (biaya tetap)

TVC : *Total Variable Cost* (biaya tidak tetap)

Fungsi biaya diasumsikan:

a. Jika tidak ada produk yang dihasilkan (Q = 0), maka biaya totalnya merupakan biaya tetapnya saja (*overhead*) atau 0 (nol).
b. Peningkatan biaya total sebanding dengan jumlah produk yang dibuat, sehingga biaya marginal selalu positif.
c. Untuk suatu produk yang jumlahnya sangat besar, biasanya akan terjadi perubahan laju yang makin tinggi, sehingga fungsi ini akan cenderung cekung ke atas. Namun demikian, hal tersebut tidak selalu terjadi demikian, karena

fungsi biaya dimungkinkan pula akan cenderung cekung ke bawah (sesuai dengan fungsi marginalnya yang menurun).

2. Fungsi Marginal Cost

Seperti telah diungkapkan sebelumnya, bahwa *marginal cost* adalah tingkat perubahan dari biaya total (*Total cost*) terhadap perubahan satu unit produk yang dihasilkan, secara matematika fungsi *marginal cost* merupakan turunan pertama atau derivatif pertama dari fungsi total *cost*-nya, selanjutnya bentuk umum dari struktur fungsi *marginal cost* adalah sebagai berikut:

$$MC \frac{d_{TC}}{d_Q} = \frac{d_{\{k+f(Q)\}}}{d_Q}$$

3. Model Fungsi Biaya

a. Fungsi Biaya Total Linear

Secara umum bentuk fungsi biaya total linear dituliskan dalam bentuk:

$$TC = a + bQ$$

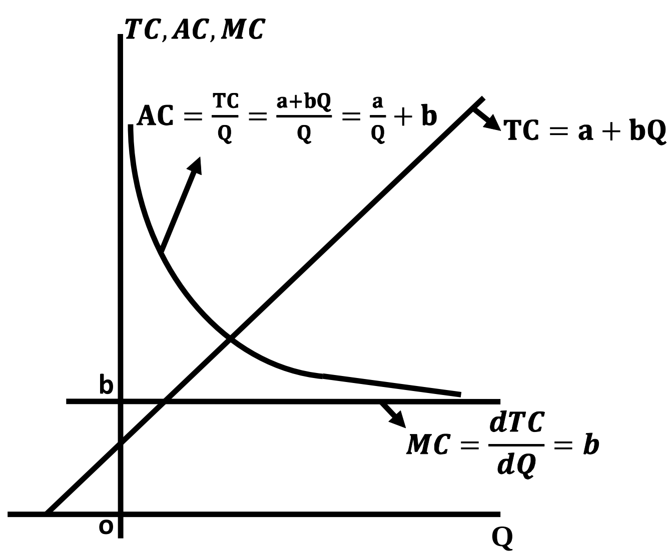
$$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{a+bQ}{Q} = \frac{a}{Q} + b$$

$$MC = b$$

Di mana:

TC	: *Total Cost;*	AC	: *Average Cost*
MC	: *Marginal Cost;*	Q	: Jumlah unit barang
a, b, c	: Konstanta		

Kurva:



Gambar 8.1.

b. Fungsi Biaya Total Kuadrat

Secara umum bentuk fungsi biaya total linear dituliskan dalam bentuk:

$$TC = a + bQ + cQ^2$$

$$AC\frac{a}{Q} + b + cQ$$

$$MC\frac{dTC}{Q} + b + 2cQ$$

Di mana:

TC : *Total Cost*

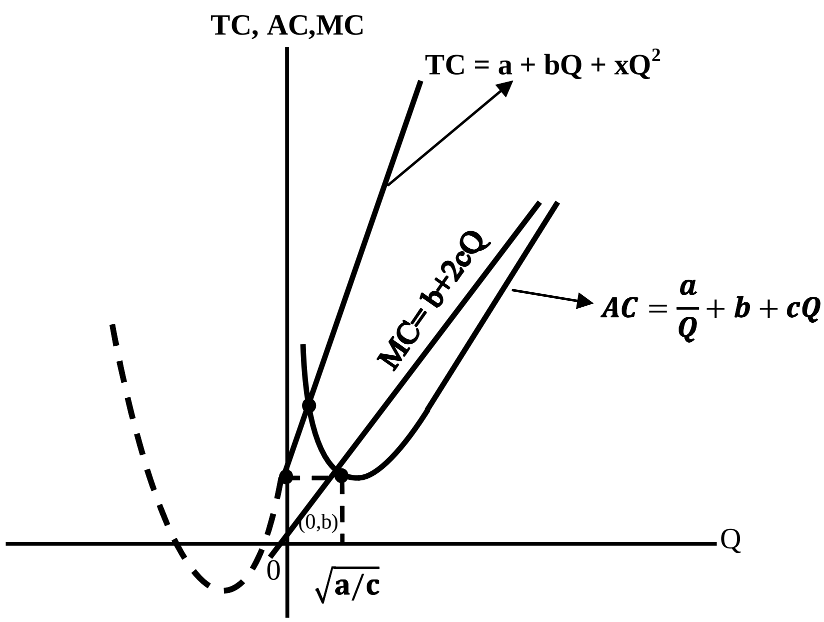
AC : *Average Cost*

MC : *Marginal Cost*

Q : Jumlah unit barang

a, b, c : Konstanta

Kurva:



Gambar 8.2.

Dari grafik fungsi pada Gambar 8.2. perhatikan biaya rata-rata:

$$AC\frac{a}{Q} + b + cQ$$

Biaya rata-rata minimum akan terjadi pada saat $\frac{d_{AC}}{d_Q} = 0$ (turunan pertama dari AC = 0), Sehingga:

$$\frac{d_{AC}}{d_Q} = -\frac{a}{Q^2} + c - \frac{a}{Q^2} + c = 0 \rightarrow c\frac{a}{Q^2} \text{ atau } cQ^2 = a$$

$Q = \pm\sqrt{\frac{a}{c}}$ (yang berlaku hanya yang positif)

Jadi, biaya rata-rata minimum akan terjadi pada saat: $Q = \sqrt{\frac{a}{c}}$

c. Fungsi Biaya Total Polinomial

Secara umum fungsi biaya polinomial tingkat lebih tinggi, dinyatakan:

$$TC = aQ^n + b$$

$$AC\,\frac{TC}{Q} = \frac{aQ^n + b}{Q} \text{ atau } AC = aQ^{n-1} + \frac{b}{Q}$$

$$MC\,\frac{d_{TC}}{d_Q} = a(n)Q^{n-1}$$

Di mana:

TC : *Total Cost*

AC : *Average Cost*

MC : *Marginal Cost*

Q : Jumlah unit barang

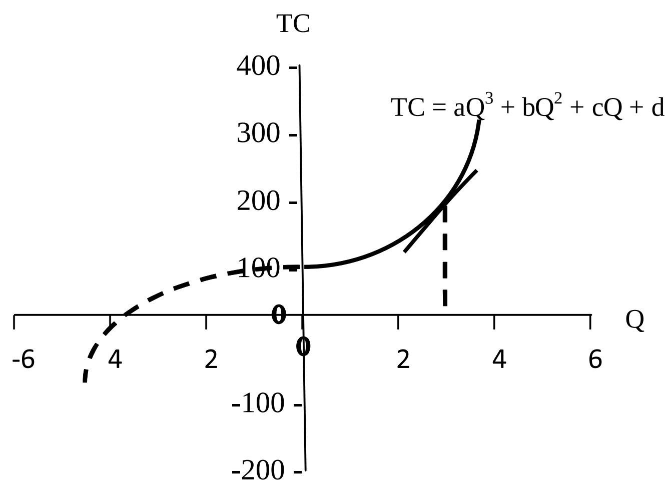
a, b : Konstanta ($a > 0$, $n > 1$, dan $b \geq 0$)

Kurva:

- **Untuk Pangkat Ganji**

  TC = aQ^n + b

  Jika n bilangan ganjil, maka kurvanya akan berbentuk:

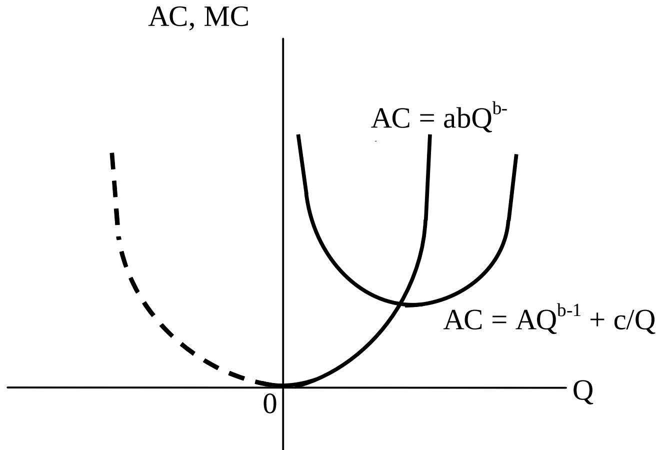


Gambar 8.3.

- **Untuk Pangkat Genap**

  TC = aQ^n + b

  Jika n bilangan genap, maka kurvanya akan berbentuk:



Gambar 8.4.

d. Fungsi Biaya Total Eksponensial

Secara umum fungsi biaya total eksponensial ditulis:

$\mathrm{TC} = \mathrm{a}e^{\mathbf{bQ}}$; $\mathrm{AC} = \frac{\mathbf{TC}}{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{ae^{bQ}}}{\mathbf{Q}}$

$\mathrm{MC} = \frac{\mathbf{d_{TC}}}{\mathbf{d_Q}} = \mathrm{abe}^{\mathbf{bQ}}$

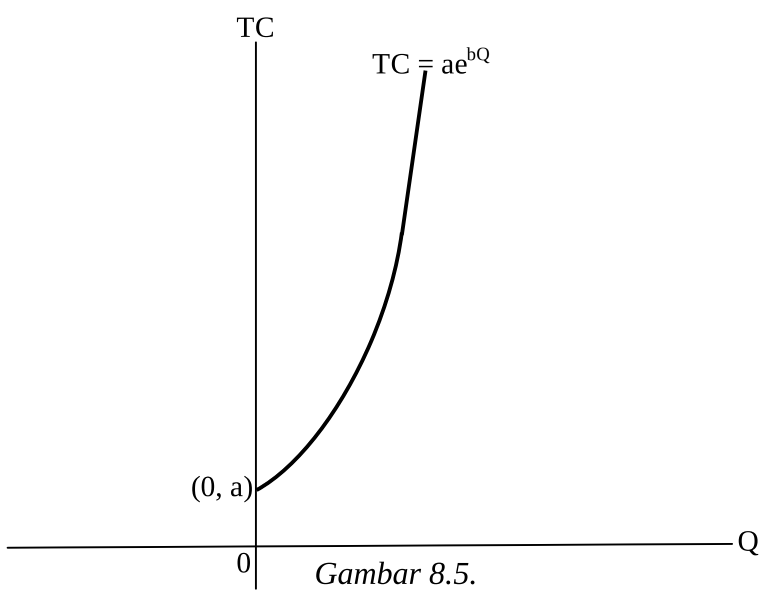
Di mana:

TC : *Total Cost;* AC : *Average Cost*

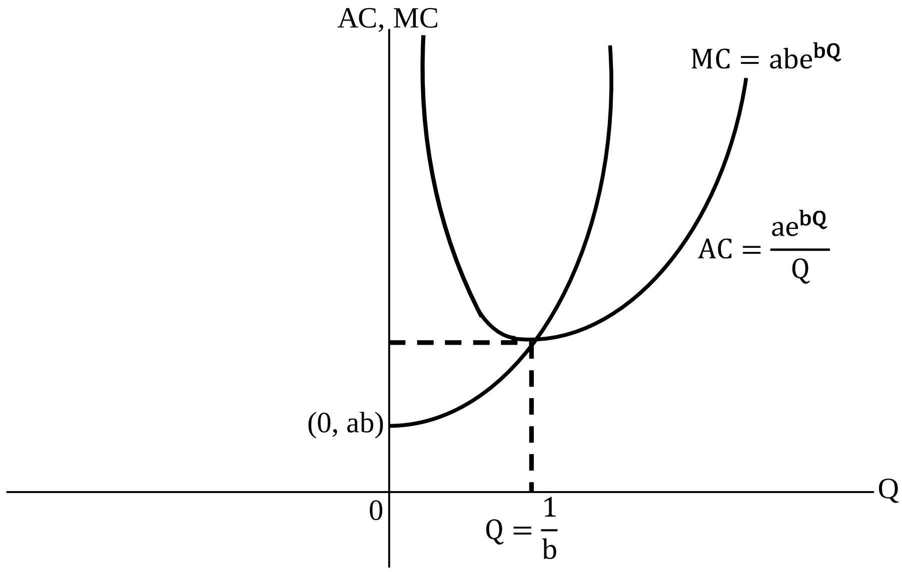
MC : *Marginal Cost;* Q : Jumlah unit barang

a, b : Konstanta (a > 0; b > 0; dan e = 2,7183)

Kurva:



Gambar 8.5.



Gambar 8.6.

e. Kurva Hubungan Fungsi Biaya Rata-rata dan Marginal Cost

Hubungan antara fungsi biaya rata-rata dengan fungsi biaya marginal, dinyatakan oleh AC = MC, hal ini dimaksudkan bahwa pada saat biaya rata-rata sama dengan biaya marginalnya, maka biaya rata-rata pada saat itu menjadi minimum. Biaya rata-rata dikatakan minimum jika dipenuhi syarat: Turunan pertama dari biaya rata-rata sama dengan nol $\left(\frac{d_{AC}}{d_Q} = 0\right)$ dan turunan kedua dari biaya rata-rata tersebut lebih besar dari nol $\left(\frac{d^2 AC}{d_{Q^2}} > 0\right)$, seperti berikut:

Perhatikan fungsi biaya rata-rata $\mathrm{AC} = \frac{\mathrm{TC}}{\mathrm{Q}}$ dan fungsi biaya marginal $MC = \frac{d_{TC}}{d_Q}$. Dalam hal ini seperti di atas, nilai biaya rata-rata minimum akan sama dengan nilai biaya marginalnya, atau AC_{min} = MC.

Kalau kita perhatikan fungsi dari biaya rata-rata (AC), maka turunan pertama dari fungsi ini akan didapat:

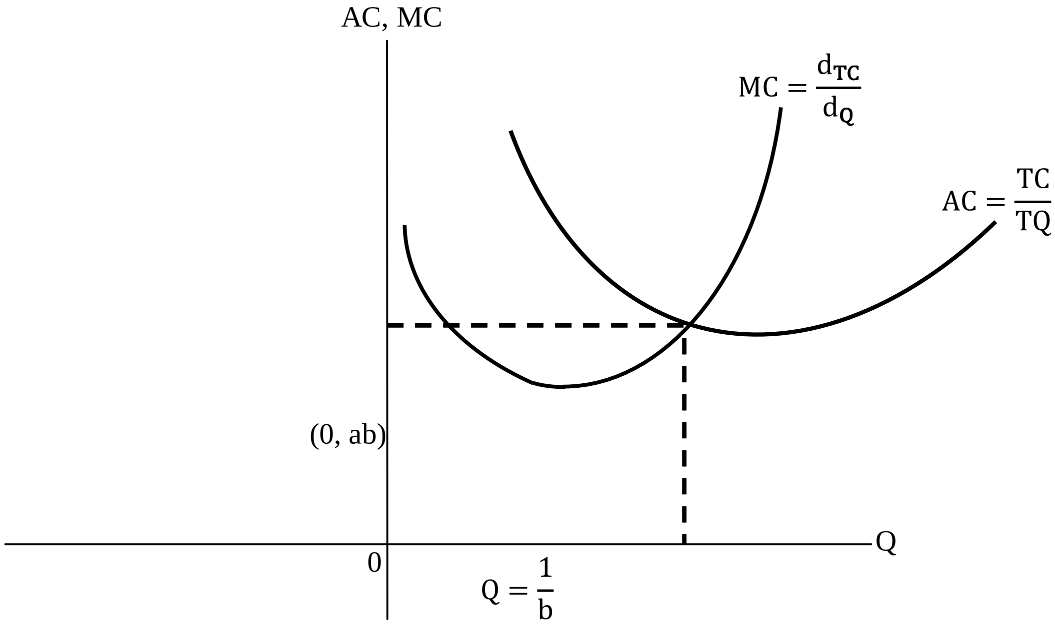
$$\frac{d_{AC}}{d_Q} = \frac{\frac{d_{TC}}{d_Q}(Q) - (TC)\left(\frac{d_Q}{d_Q}\right)}{Q^2} = \frac{\frac{d_{TC}}{d_Q}(Q) - (TC)}{Q^2}, untuk\ \frac{d_{AC}}{d_Q} = 0,$$

Maka turunan fungsi di atas, akan menjadi:

$$\frac{\frac{d_{TC}}{d_Q}(Q) - (TC)}{Q^2} = 0\ atau\ \frac{d_{TC}}{d_Q} = \frac{(TC)}{Q}$$

Untuk Q positif, maka turunan kedua pun akan didapati nilai positif $\frac{d^2TC}{d_{Q^2}} > 0$,

Dengan demikian terbukti bahwa biaya marginal akan sama dengan biaya rata-rata minimum AC = MC (terbukti).



Gambar 8.7.

4. Fungsi Penerimaan (Revenue)

Dalam suatu proses produksi, dikenal juga dengan istilah penerimaan (*Revenue*). Penerimaan yang didapat dari seluruh proses produksi dikatakan sebagai penerimaan total (*Total Revenue*).

Penerimaan total adalah merupakan hasil kali antara jumlah yang diproduksi dengan harga yang ditawarkan secara matematis penerimaan total dituliskan:

TR = P . Q

Di mana:

TR : *Total Revenue*

P : Harga yang ditawarkan

Q : Jumlah unit barang yang diproduksi

Seperti telah diungkapkan sebelumnya, bahwa penerimaan rata-rata adalah merupakan penerimaan untuk satu satuan unit produksi, dengan demikian penerimaan rata-rata diartikan sebagai penerimaan total dibagi dengan jumlah unit barang yang diproduksi atau merupakan fungsi permintaan, secara matematis penerimaan rata-rata dituliskan:

$$\mathrm{AR} = \frac{\mathbf{TR}}{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{P \cdot Q}}{\mathbf{Q}} = \mathrm{P}$$

Di mana:

AR : Penerimaan rata-rata (*Average Revenue*)

P : Harga

Q : Jumlah unit barang

a. Fungsi Marginal Revenue

Yang dimaksud dengan fungsi *marginal revenue* adalah tingkat perubahan dari penerimaan total (*Total Revenue*) terhadap perubahan satu unit produk yang terjual kepada konsumen atau merupakan fungsi turunan/derivatif dari fungsi *total revenue* ini antara lain adalah:

1. Fungsi *total revenue* pada pasar *perfect competitif* secara grafis merupakan fungsi linear yang melalui titik *origin*;
2. Fungsi *total revenue* pada pasar *imperfect competitif* secara grafis akan berbentuk fungsi parabola yang terbuka ke bawah.

   Kedua macam bentuk fungsi tersebut digambarkan seperti grafis di bawah ini.

   Bentuk umum dari fungsi *total revenue* adalah:

$$Total\,Revenue(TR) = f(Q)$$

$$Average\ Revenue\ (AR) = \frac{TR}{Q} = \frac{f(Q)}{Q}$$

$$Marginal\ Revenue\ (MR) = \frac{d_{TR}}{d_Q} = \frac{d_{f(Q)}}{d_Q}$$

Pada pasar *perfect competitif* fungsi *marginal revenue* sama dengan fungsi *average revenue*-nya (merupakan fungsi konstanta, pada grafik ditunjukkan Y = a), sedangkan pada pasar *imperfect competitif marginal revenue* tersebut merupakan garis-garis linear yang menyinggung grafik fungsi *total revenue*. Apabila kita perhatikan dari kedua bentuk fungsi di atas, maka besarnya *total revenue* dari masing-masing pasar cukup menonjol perbedaannya, seperti total penerimaan dari:

a. Pasar persaingan sempurna

   Batas total, penerimaan tak terbatas, artinya semakin banyak produksi yang bisa dibuat, maka semakin banyak pula penerimaan yang akan diperolehnya, hal ini dikarenakan bentuk fungsinya adalah fungsi linear

b. Pasar persaingan tak sempurna

Batas total penerimaan yang akan dicapai dari model pasar ini adalah terbatas, artinya bahwa dalam model fungsi semacam ini ada suatu batas tertentu atau produksi yang dapat dilakukan, sampai mencapai titik optimum dari penerimaannya c (hal ini disebabkan karena model fungsi *imperfect competitif* berbentuk parabola yang menghadap ke bawah, pada saat ini dikatakan bahwa *marginal revenue* adalah sama dengan nol atau dapat dikatakan pula untuk kondisi semacam ini antara lain adalah:

Total revenue dicapai pada saat *marginal revenue* sama dengan nol, di mana fungsi *marginal revenue* adalah merupakan derivatif pertama dari fungsi *total revenue*-nya. Jika diketahui fungsi *total revenue* sebagai berikut:

$(TR) = aQ^2 + bQ : a < 0$ maka:

$AR = \frac{aQ^2+bQ}{Q} = aQ + b$ dan MR = 2aQ + b

Total revenue maksimum, jika MR = 0, maka:

2aQ + b = 0 atau $Q = \frac{-b}{2 \cdot a}$

Apabila $Q = \frac{-b}{2 \cdot a}$ disubstitusikan ke dalam fungsi *total revenue*, maka *total revenue* maksimum tersebut dapat dihitung sebagai berikut:

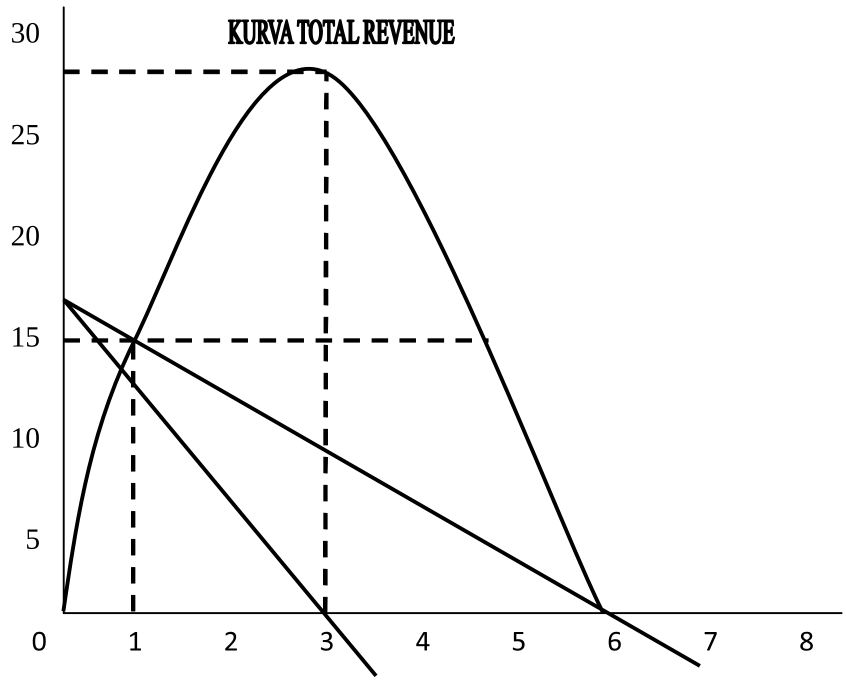
TR $= aQ^2 + bQ$

$= a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right)$

$= \frac{ab^2}{4a^2} + \frac{b^2}{2a} = \frac{-b^2}{4a}$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas titik maksimumnya adalah berkoordinat di P$\left(\frac{-b}{2a};\frac{b^2}{4a}\right)$, di mana $\frac{-b}{2a} = Q =$ unit produksi *total revenue* maksimum dan $\frac{-b}{4a} = R = total\, revenue$ maksimum.

Fungsi *marginal revenue* (MR) dan *average revenue* (AR) secara grafik pada pasar *imperfect cometitif* ini dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 8.8.

Jika kita perhatikan grafik fungsi *total revenue* di atas, maka berarti *total revenue* maksimum berada pada saat MR = 0, yaitu terletak di puncak parabola dari fungsi *total revenue* dengan titik koordinat di P$\left(\frac{-b}{2a};\frac{b^2}{4a}\right)$

Contoh:

Misalkan diketahui fungsi permintaan suatu barang adalah $P = 15 - 2Q$, tentukanlah berapa penerimaan marjinalnya.

Jawab:

$TR = P.Q = (15\text{-}2Q)\ Q = 15Q - 2Q^2$

Penerimaan marjinal:

$MR = 15 - 4Q$

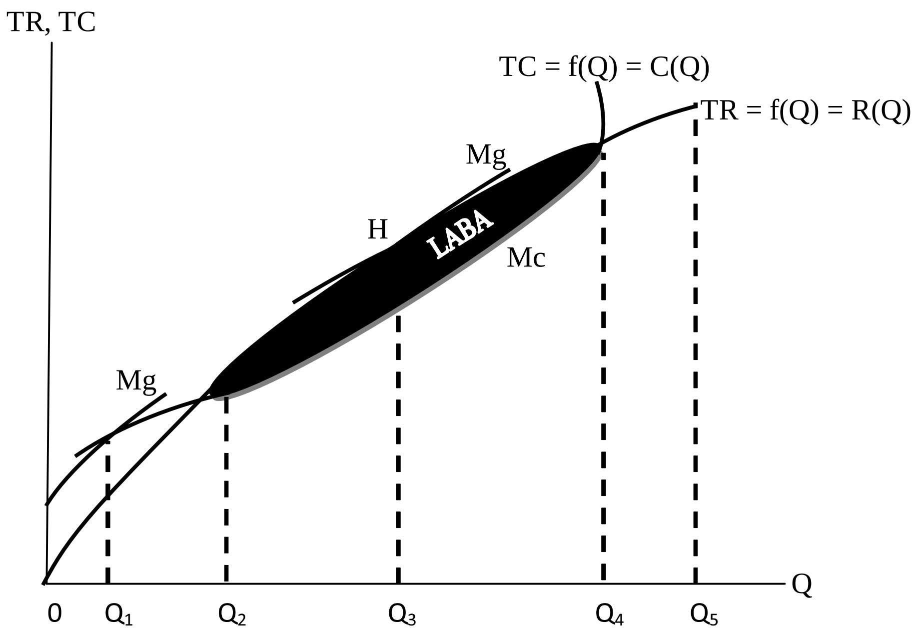
5. Maksimum Profit

Pada berbagai bentuk pasa, secara teoritis maksimum profit (keuntungan maksimum akan dapat dicapai pada saat *marginal revenue* sama dengan *marginal cost* (MR = MC) atau dengan kata lain, bahwa keuntungan akan diperoleh dari hasil selisih antara *total revenue* dengan *total cost*-nya bentuk umum untuk fungsi ini dinyatakan oleh:

π = TR – TC fungsi keuntungan (laba)

π_{max} adalah MR = MC

Atau $\frac{d_{TR}}{d_Q} = \frac{d_{TC}}{d_Q}$ secara grafik lihat grafik.



Gambar 8.9.

Contoh:

Jika diketahui fungsi permintaan adalah 1000 – 2Q, dan fungsi biaya total adalah $Q^3 - 59Q^2 + 1315Q + 2000$. Hitunglah kondisi keuntungan maksimumnya.

Jawab:

Penerimaan total (TR) = $P.Q = (1000 - 2Q)Q = 1000Q - 2Q^2$

Kondisi keuntungan maksimum adalah ketika MR = MC

MR = TR' = 1000 – 4Q

MC = TC' = $3Q^2 - 118Q + 1315$

π' : MR = MC

$1000 - 4Q = 3Q^2 - 118Q + 1315$

$-3Q^2 + 114Q - 315 = 0$

$-Q^2 + 38Q - 105 = 0$

$(-Q - 3)(Q - 35) = 0$

Maka akan diperoleh $Q_1 = 3$ dan $Q_2 = 35$

Untuk mengetahui mana yang lebih memaksimalkan keuntungan adalah yang memiliki turunan kedua lebih besar daripada nol.

Turunan kedua: $\pi'' = -6Q + 114$

Jika Q = 3, $\pi'' = -6\ (3) + 114 = 96 > 0$

Jika Q = 35, $\pi'' = -6\ (35) + 114 = -96 < 0$

Karena $\pi'' < 0$ untk $Q = 35$, maka tingkat produksi yang menghasilkan tingkat keuntungan maksimal adalah pada saat jumlah barang yang diproduksi sebanyak 35 unit. Adapun besarnya keuntungan adalah:

$$\pi = TR - TC$$

$$= -(35)^3 + 57\ (35)^2 - 315\ (35) - 2000$$

$$= 13.925$$

6. Elastisitas

Elastisitas untuk mengukur kepekaan dari satu variabel terhadap yang lainnya. Secara spesifik, elastisitas adalah suatu bilangan yang menginformasikan kepada kita persentase perubahan yang terjadi pada satu variabel sebagai reaksi terhadap perubahan 1 persen pada variabel lain, apakah ia akan bereaksi cukup signifikan ataukah tidak. Secara garis besar elastisitas akan dibagi menjadi elastisitas permintaan dan elastisitas penawaran. Produk yang memiliki sifat elastis berarti perubahan 1 persen atas suatu variabel akan berpengaruh signifikan terhadap keseluruhan perubahan. Sementara produk yang memiliki sifat inelastis berarti bahwa perubahan 1 persen terhadap suatu variabel tidak akan berpengaruh besar terhadap keseluruhan variabel.. Selanjutnya, tingkat elastisitas ini dibagi menjadi dua bagian antara lain:

- Elastisitas Permintaan
- Elastisitas Penawaran

Secara umum tingkat elastisitas dinyatakan dalam bentuk matematis, sebagai berikut:

$$\varepsilon = \frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP}$$

Tingkat perubahan tersebut, ditulis:

$$\varepsilon = \frac{\Delta_{Qx}}{Qx} \cdot \frac{P_x}{\Delta P_x} = \frac{\Delta_{Qx}}{\Delta_{Px}} \cdot \frac{P_x}{Q_x}$$

Di mana:

ε : Elastisitas

Δ : Delta (tingkat perubahan)

Besaran nilai dari elastisitas adalah:

1) Inelastis (η < 1)

Perubahan permintaan (dalam persentase) lebih kecil daripada perubahan harga. Jika harga naik 10% menyebabkan permintaan barang turun sebesar , misalkan 5%. Contoh inelastis adalah permintaan barang kebutuhan pokok misalkan beras.

2) Elastis (η > 1)

Permintaan terhadap suatu barang dikatakan elastis bila perubahan harga suatu barang menyebabkan perubahan permintaan yang besar. Misalkan, bila harga turun 10% menyebabkan permintaan barang naik 20%. Karena itu nilai Eh lebih besar dari satu, barang mewah seperti mobil umumnya permintaan elastis

3) Elastis unitary (η = 1)

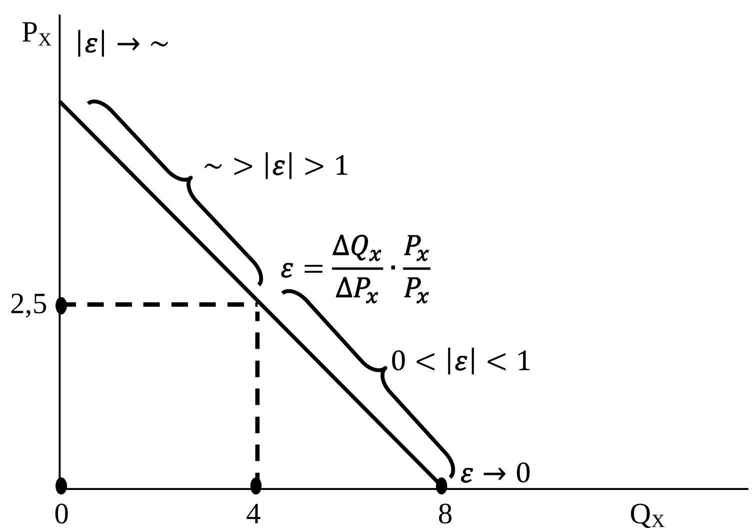
Jika harga naik 10%, maka permintaan barang turun 10% juga.

4) Inelastis sempurna (η = 0)

Berapapun harga suatu barang, orang akan tetap membeli jumlah yang dibutuhkan. Contohnya adalah permintaan garam.

5) Elastis tak terhingga (η = ~)

Perubahan harga sedikit saja menyebabkan perubahan permintaan tak terhingga besarnya.



Gambar 8.10.

a. Elastisitas Penerimaan (Demand Elasticity)

Yang dimaksud dengan elastisitas penerimaan adalah rasio (angka perbandingan) antara persentase perubahan jumlah barang yang diminta dengan persentase perubahan dari harga barang itu sendiri. Secara matematis elastisitas *demand* dapat dijabarkan dari fungsi Q = f(P)

Elastisitas demandnya:

$$\eta_d = \frac{dQ_d}{d_P} . \frac{P_d}{Q_d} \cdot$$

Di mana:

P = Harga per unit

Q = Jumlah barang yang diminta

Contoh:

Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $Q_d = 15 - 3P^2$. Tentukan elastisitas permintaan jika diketahui harga pasar adalah 4 ($P = 4$).

Jawab:

$$Q_d = 15 - 3P^2$$

$$Q'_d = \frac{dQ_d}{dp} = -6P$$

$$\eta_d = \frac{dQ_d}{d_P} . \frac{P_d}{Q_d}$$

$$\eta_d = -6P . \frac{P}{15-3P^2}$$

$$\eta_d = -6(4) . \frac{4}{15-3(4)^2} = 2{,}91 \ (elastis)$$

$\eta_d = 2{,}91$ berarti produk ini memiliki tipikal elastisitas yang elastis, dimana memberikan makna bahwa apabila terdapat kenaikan harga sebesar 1% maka akan terdapat penurunan jumlah barang yang diminta sebesar 2,91%.

b. Elastisitas Penawaran (Supply Elasticity)

Yang dimaksud dengan elastisitas penawaran (*Supply*), adalah rasio antara persentase perubahan jumlah barang yang ditawarkan dengan persentase perubahan dari harga barang itu sendiri. Secara matematis elastisitas *supply* dapat dijabarkan dari fungsi *supply*-nya sebagai berikut: Q = f(p)

Elastisitas *demand*-nya:

$$\varepsilon_d = \frac{P_S}{Q_S} \cdot \frac{dQ}{d_P}$$

Contoh:

Jika diketahui fungsi penawaran suatu barang adalah $Q_s = -200 + 7P^2$. Hitunglah elastistitas penawarannya pada tingkat harga $P = 10$ dan $P = 15$

Jawab:

$Q_s = -200 + 7P^2$

$Q'_s = 14P$

$$\eta_s = \frac{dQ_s}{dP}.\frac{P}{Q_s} = 14P.\frac{P}{-200+7P^2}$$

Pada $P = 10$, $\eta_s = 14(10).\frac{10}{-200+7(10)^2} = 2{,}8$

Pada $P = 15$, $\eta_s = 14(15).\frac{15}{-200+7(15)^2} = 2{,}3$

Berdasarkan perhitungan diatas, elastisitas penawaran berbentuk elastis.

Latihan Soal:

1. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi-fungsi di bawah ini:
   a. $y = 2x^3 + 5x^2 + 10x - 8$
   b. $y = 10 - 5x^{-1} + 4x^{-2}$
   c. $y = (x^2 - 4)(2x - 6)$
   d. $y = \frac{x^2-4}{2x-6}$
   e. $y = (3x^2 - x)\left(\frac{5x+2}{x}\right)$
   f. . $y = \log\left(\frac{x+2}{x-3}\right)$
   g. $y = \ln\left(\frac{x+2}{x-3}\right)$
   h. $xy - x^2 + y^2 = -78$
   i. $y = x^2 e^{x^2+5x-3}$
   j. $x = 4y + 8 - y^{-2}$
2. Misalkan $y = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 5$. Tentukan apakah dy/dx apakah "*over-estimated*" ataukah "*under-estimated*" sebagai penaksir $\Delta y/\Delta x$ pada $x = 3$ untuk $\Delta x = 0{,}02$
3. Dari fungsi-fungsi dibawah ini, buatlah turunan pertama sampai dengan turunan ketiganya:
   a. $y = x^3 - 10x^2 + 15x + 25$

b. $y = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 10x + 50$

c. $y = (5x + 12 - 2x^{-1})^3$

d. $y = \left(\frac{5x+2}{x}\right)^2$

e. $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$

4. Misalkan seorang monopolis menghadapi fungsi permintaan $Q = 100 - 5P$, dan fungsi biaya totalnya adalah $C = 20 - 4Q + 0,1\ Q^2$. Hitunglah kondisi jumlah produksi barang yang memaksimumkan keuntungan?