

BAB 7

MAKSIMUM DAN MINIMUM FUNGSI

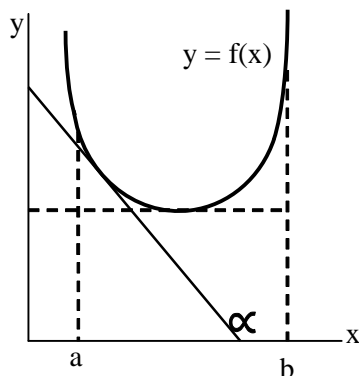
Dalam fungsi nonlinear sering ditemui titik ekstrem, terutama titik maksimum. Titik ini sangat penting untuk menentukan arah grafik. Dengan demikian, penentuan titik sangat dibutuhkan untuk penganalisisan.

A. Pengertian Titik Ekstrem

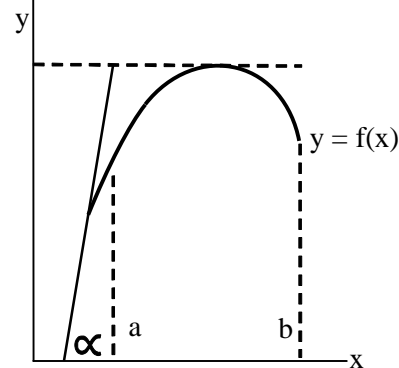
Titik yang pertambahan fungsinya mencapai posisi terendah dan kemudian menurun atau sebaliknya dimana merupakan titik yang pengurangan fungsinya mencapai posisi tertinggi dan kemudian meningkat merupakan titik ekstrem. Titik ekstrem ini merupakan titik stasioner. Titik ekstrem dapat berupa titik maksimum atau titik minimum. Syarat utama titik ekstrem ini adalah turunan atau diferensial fungsinya sama dengan nol ($\frac{dy}{dx} = 0$).

Suatu fungsi berlaku untuk batas-batas tertentu yaitu suatu fungsi $y = f(x)$ dimana $a \leq x \leq b$, mempunyai kemiringan ke bawah seperti terlihat pada Gambar 7.1. Maka, fungsi tersebut dinamakan fungsi yang menurun (*decreasing function*). Dalam hal ini nilai fungsi y menurun pada saat nilai x bertambah, sehingga kemiringan kurva yaitu $\frac{dy}{dx} = \text{tg } \alpha < 0$.

Sebaliknya, apabila fungsi itu mempunyai kemiringan yang meningkat seperti terlihat pada Gambar 7.2. fungsi tersebut dinamakan fungsi yang menaik (*increasing function*). Dalam hal ini nilai fungsi y menaik pada saat nilai x bertambah, sehingga kemiringan kurva yaitu $\frac{dy}{dx} = \text{tg } \alpha > 0$.



Gambar 7.1. Grafik Fungsi Menurun



Gambar 7.2. Grafik Fungsi Menaik

Dalam batas-batas a dan b itu, fungsi $f(x)$ tersebut akan mempunyai nilai fungsi y tertinggi/maksimum, dan nilai fungsi y yang terendah/minimum. Dengan begitu, kita melihat adanya dua istilah yang perlu kita ketahui, yaitu:

- Absolut maksimum/minimum
- Relatif maksimum/minimum.

Titik di mana nilai fungsi y adalah paling tinggi dari seluruh nilai fungsi y yang ada disebut dengan *absolut minimum*. Fungsi $f(x)$ mempunyai nilai fungsi yang absolut maksimum pada nilai $x = x_0$ dalam batas-batas $a \leq x \leq b$ jika fungsi $f(x)$ tersebut mempunyai nilai y yang paling tinggi, atau:

$$f(x_0) \geq f(x).$$

Demikian pula sebaliknya dengan *absolut minimum*, yaitu titik beberapa nilai fungsi y adalah paling rendah dari seluruh nilai fungsi y yang ada, atau

$$f(x_0) \leq f(x).$$

Suatu titik dimana nilai fungsi y adalah terbesar dibandingkan dengan nilai x yang lain berdekatan/sekitarnya disebut dengan *relatif maksimum*. Fungsi $f(x)$ mempunyai nilai fungsi y yang relatif maksimum pada nilai $x = x_1$ dalam batas-batas $a \leq x \leq b$.

Jadi, suatu fungsi $f(x)$ tersebut mempunyai nilai yang terbesar pada $x = x_1$ apabila dibandingkan dengan nilai x yang lain yang berdekatan/sekitarnya. Dengan kata lain,

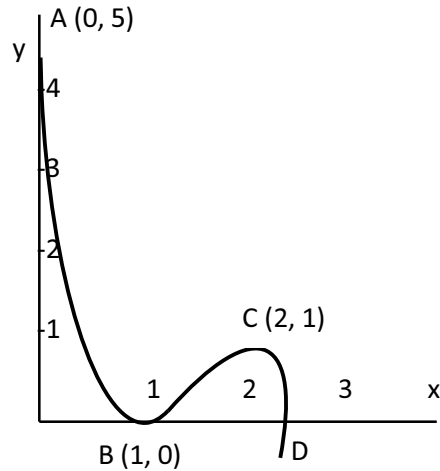
$$f(x_1 - \Delta x) \leq f(x) \geq f(x_1 + \Delta x).$$

Sebaliknya, *relatif minimum*, yaitu titik di mana nilai fungsi y adalah yang terkecil dibandingkan dengan nilai x yang lain yang berdekatan/sekitarnya, jadi

$$f(x_1 - \Delta x) \geq f(x) \leq f(x_1 + \Delta x).$$

Dalam gambar grafik seperti terdapat pada Gambar 6.3. dalam batas-batas $a \leq x \leq b$, titik-titik maksimumnya adalah:

- titik A adalah titik absolut maksimum;
- titik B adalah titik relatif minimum;
- titik C adalah titik relatif maksimum;
- titik D adalah titik absolut minimum.



Gambar 7.3.
 Grafik Fungsi $f(x) = (x - 1)^2 (5 - 2x)$

Suatu fungsi $f(x)$ mempunyai nilai maksimum dan minimum, maka titik tersebut $f'(x_0) = \frac{dy}{dx} = 0$. Titik yang demikian disebut titik kritis disebut titik kritis (*critical point*) atau titik ekstrem.

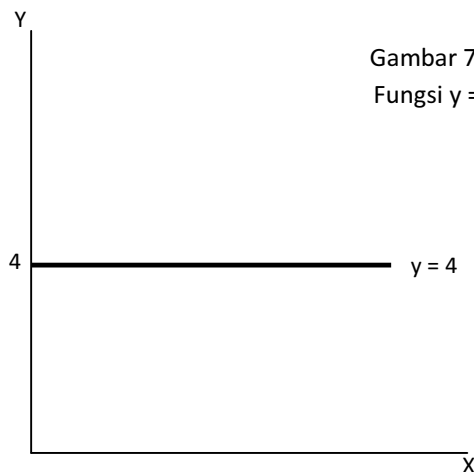
Dalam pembahasan selanjutnya, yang dimaksud maksimum dan minimum adalah relatif maksimum dan relatif minimum.

Contoh:

Jika diketahui fungsi $y = 4$, apakah fungsi tersebut memiliki nilai ekstrem.

Jawab:

Fungsi $y = 4$, merupakan fungsi linear yang sejajar dengan sumbu x , walaupun derivative pertamanya menunjukkan $= 0$ atau $\frac{dy}{dx} = 0$, fungsi ini tidak memiliki titik ekstrem baik titik maksimum maupun titik minimum.



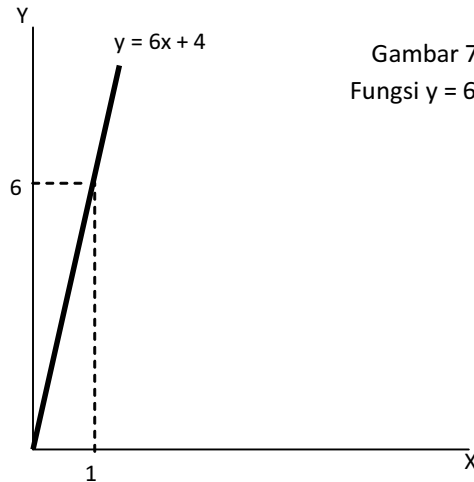
Gambar 7.4.
 Fungsi $y = 4$

Contoh:

Jika diketahui suatu fungsi $y = 6x + 4$, apakah fungsi tersebut memiliki nilai ekstrem.

Jawab:

Pada fungsi $y = 6x + 4$ tidak memiliki titik ekstrem sebab tidak dipenuhi syarat $\frac{dy}{dx} = 0$. Berdasarkan fungsi di atas $\frac{dy}{dx} = 6$, secara grafik dapat digambarkan.



Gambar 7.5.
Fungsi $y = 6x + 4$

Contoh:

Jika diketahui suatu fungsi $y = 5x^2 - 3x + 4$, apakah fungsi tersebut memiliki nilai ekstrem.

Jawab:

Derivatif dari fungsi di atas $\frac{dy}{dx} = 10x - 3$, syarat ekstrem $\frac{dy}{dx} = 0$,

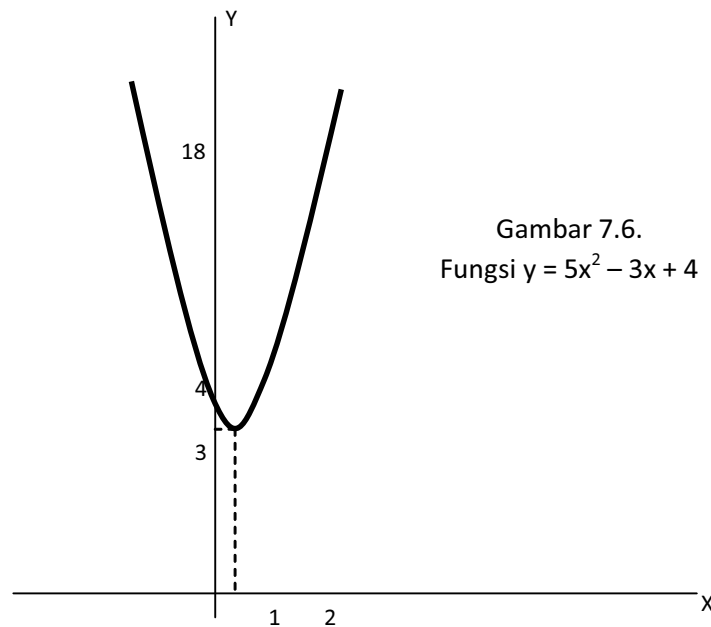
Maka $0 = 10x - 3 \rightarrow x = \frac{3}{10}$, fungsi tersebut memiliki titik ekstrem di $x = \frac{3}{10}$ dan

nilai $y = 5\left(\frac{3}{10}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{10}\right) + 4 = 3,64$.

Adapun jenis ekstremnya ditentukan dari derivatif keduanya yaitu $\frac{d^2y}{dx^2} = 10$,

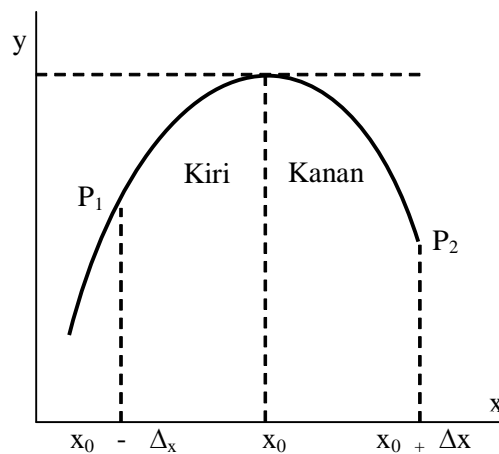
karena turunan keduanya positif atau: $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$,

maka titik ekstrem dimaksud adalah merupakan titik ekstrem minimum. Secara grafis dapat digambarkan sebagai berikut:



B. Persyaratan yang Dibutuhkan untuk Suatu Titik Ekstrem

Fungsi $f(x)$ mempunyai nilai y yang relatif maksimum pada $x = x_0$, dan fungsi $f(x)$ mempunyai turunan atau diferensialnya $f'(x)$ maka, turunan diferensialnya $f'(x_0) = \frac{dy}{dx} = 0$. Hal ini dapat dilihat dalam grafik berikut pada Gambar 7.7.



Gambar 7.7.
Titik ekstrem $y = f(x)$

Dari Gambar 7.7. terlihat bahwa di sebelah kiri kurva terdapat kurva yang menaik. Dalam hal ini ditemui pergeseran dari titik $P_1(x_0 - \Delta x, y_1)$ ke $P_0(x_0, y_0)$, perubahan-perubahan Δx kedua-duanya positif, sehingga perbandingan perubahan (*difference quotient*)-nya adalah positif, jadi:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} > 0$$

Sebaliknya, di sebelah kanan kurva terdapat kurva yang menurun. Dalam hal ini kita ditemui pergeseran dari titik $P_0 (x_0, y_0)$ ke $P_2 (x_0 + \Delta x, y_2)$. Perubahan Δy negatif dan perubahan Δx positif sehingga perbandingan perubahan (*difference quotient*)-nya adalah negatif, jadi:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} < 0$$

Berdasar uraian di atas, terlihat bahwa pada saat titiknya adalah $P_0 (x_0, y_0)$, grafik garis singgungnya adalah sejajar dengan sumbu x . Dalam hal ini tangensnya sama dengan nol.

$$\text{Jadi pada } x_0: \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = 0$$

Uraian yang disajikan di atas adalah mengenai titik absolut maksimum atau relatif maksimum. Akan tetapi, persoalan yang demikian juga berlaku untuk absolut minimum atau relatif minimum. Hanya saja pembahasannya terbalik. Kurva sebelah kiri naik, sedangkan kurva sebelah kanannya menurun.

Jadi, syarat pertama untuk suatu titik ekstrem adalah: $\frac{dy}{dx} = 0$.

Hal ini merupakan suatu persyaratan utama dari titik kritis.

Selanjutnya, marilah kita lihat kembali grafik yang terdapat pada Gambar 7.2. dan Gambar 7.7. Berdasarkan gambar-gambar grafik ini terlihat suatu kurva yang naik atau fungsi menaik (*increasing function*) pada kurva sebelah kiri. Akan tetapi, kemudian kurva menurun (*decreasing curve*) terlihat pada kurva sebelah kanan ; $\frac{dy}{dx} < 0$.

Dalam hal ini kita temui adanya penurunan dari suatu tingkat kenaikan.

Oleh karena $\frac{dy}{dx} = 0$, ini berarti $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$. Sehingga kita peroleh persyaratan-persyaratan yang dibutuhkan untuk suatu titik maksimum adalah:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ dan } \frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

Dengan cara seperti ini, kita akan mendapatkan persyaratan yang dibutuhkan untuk suatu titik *minimum*, yaitu

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ dan } \frac{d^2y}{dx^2} > 0.$$

Jadi, syarat kedua untuk titik ekstrem maksimum atau minimum adalah $\frac{d^2y}{dx^2} \geq 0$.

Ada tiga cara yang dapat digunakan untuk menentukan apakah titik ekstrem tersebut adalah titik maksimum atau titik minimum. Ketiga cara tersebut masing-masing menggunakan kriteria-kriteria dari keadaan yang berbeda-beda.

Cara Pertama:

Menggunakan pengertian atau definisi tentang relatif maksimum itu atas dasar fungsi $y = f(x)$, apabila fungsi $f(x)$ tersebut mempunyai nilai yang terbesar pada $x = x_1$ dibandingkan dengan pada x yang lain yang berdekatan/sekitarnya.

Jadi $f(x_0 - \Delta x) \leq f(x_0) \geq f(x_0 + \Delta x)$.

Sebaliknya, untuk titik relatif minimum yaitu $f(x_0 - \Delta x) \geq f(x_0) \leq f(x_0 + \Delta x)$.

Cara Kedua:

Dengan menggunakan turunan atau diferensial pertama $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ yaitu bila $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ mempunyai tanda aljabar yang berubah dari plus atau positif (+) ke minus atau negatif (-).

Jika x bertambah nilainya dari suatu nilai yang lebih kecil sedikit dari x_0 ke suatu nilai yang lebih besar sedikit dari x_0 , maka titik (x_0, y_0) tersebut merupakan titik relatif maksimum. Demikian pula hanya untuk titik relatif minimum, yaitu bila: tanda aljabarnya berubah dari minus atau negatif (-) ke plus atau positif (+).

Cara Ketiga:

Dengan menggunakan turunan atau diferensial kedua $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$ yaitu bila $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} < 0$, maka kurvanya cembung ke atas, sehingga titik pada saat $x = x_0$ adalah relatif maksimum.

Sebaliknya, bila $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} > 0$, kurvanya cembung ke bawah, sehingga pada saat $x = x_0$ adalah relatif minimum.

Contoh:

Diketahui fungsi: $y = 40 - 6x + x^2$

Persyaratan titik ekstrem diperoleh bila:

$$\frac{dy}{dx} = -6 + 2x = 0 \rightarrow \therefore x = 3$$

Persoalan yang berikut adalah: apakah pada $x = 3$, diperoleh nilai fungsi y maksimum atau minimum: untuk penentuannya kita lihat turunan (derivatif)-nya, yaitu $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 > 0$.

Dengan demikian, kita dapatkan kurva cembung ke bawah dan fungsinya mempunyai titik minimum pada $x = 3$. Nilai fungsi pada titik minimum tersebut adalah: $y = 40 - 6x + x^2 = 40 - 6 \times 3 + 3^2 = 31$. Jadi titik minimum fungsi ini adalah $P(3 ; 31)$.

Contoh:

Diketahui fungsi: $y = 2x^2 - 15x^2 + 36x + 20$

Persyaratan titik ekstrem dari fungsi ini diperoleh pada:

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 30x + 36 = 0$$

$$6(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$6(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$\rightarrow \therefore x_1 = 2 \text{ dan } x_2 = 3$$

Persoalan selanjutnya adalah apakah titik maksimum terdapat pada $x = 2$ atau $x = 3$? Untuk menentukannya dapat dilakukan dengan tiga cara, yaitu dengan melihat kriteria-kriteria yang digunakan masing-masing.

Cara pertama:

Dengan menggunakan pengertian atau definisi relatif maksimum atas dasar fungsi $y = f(x)$, apabila fungsi $f(x)$ tersebut mempunyai nilai yang terbesar pada $x = x_0$ dibandingkan dengan pada x yang lain yang/sekitarnya.

$$Y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 20$$

Marilah kita lihat titik ekstrem atau krisis pada $P_0(2, 48)$. Apabila kita lihat dan bandingkan titik di sekitar $x = 2$, yaitu

$$\text{titik } P_1 : x = 2,1$$

$$\text{titik } P_1 : x = 2,1 \text{ menghasilkan nilai } y = 47,972 \text{ dan}$$

$$\text{titik } P_2 : x = 1,9 \text{ menghasilkan nilai } y = 47,968$$

Dengan membandingkan ketiga titik P_0 , P_1 , dan P_2 tersebut di atas, dapat diperoleh kesimpulan bahwa:

$$f(x_0 - \Delta x) \leq f(x_0) \geq f(x_0 + \Delta x) \text{ yaitu:}$$

$$47,968 \leq 48 \geq 47,972$$

Dengan demikian, pada $x = 2$ diperoleh titik yang relatif maksimum yaitu titik P (2, 48). Selanjutnya, lihat titik ekstrem atau kritis Q_0 (3, 47), yaitu:

titik Q_1 : $x = 2,8$ menghasilkan nilai $y = 47, 104$ dan

titik Q_2 : $x = 3,2$ menghasilkan nilai $y = 47, 136$

Dengan memperbandingkan ketiga titik Q_0 , Q_1 dan Q_2 tersebut, dapatlah diperoleh kesimpulan bahwa:

$$f(x_0 - \Delta x) \geq f(x_0) \leq f(x_0 + \Delta x)$$

$$47, 104 \geq 47 \leq 47, 136$$

Maka, pada $x = 3$ diperoleh titik yang relatif minimum yaitu titik Q (3, 47).

Cara kedua:

Dengan menggunakan turunan atau diferensial pertama $f(x) \frac{dy}{dx}$, yaitu bila $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ terdapat perubahan tanda dari positif (+) ke negatif (-) jika x bertambah nilainya dari $x_0 - \Delta x$ ke $(x_0 + \Delta x)$, maka titik pada x_0 adalah relatif minimum.

$$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 20$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 30x + 36$$

Marilah kita lihat titik ekstrem atau kritis pada P (2, 48). Dilihat perubahan atau pertambahan nilai x di sekitarnya, kita dapati:

$$x = 1,5 \text{ maka } f'(x) \frac{dy}{dx} = 4,5 \text{ (tanda positif)}$$

$$x = 2,0 \text{ maka } f'(x) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x = 2,5 \text{ maka } f'(x) \frac{dy}{dx} = -1,5 \text{ (tanda negatif)}$$

Dengan terdapatnya perubahan tanda dari positif (+) ke negatif (-) dan dengan bertambahnya nilai x tersebut dari $x = 1,5$ ke $x = 2,5$, maka ternyata titik P (2, 48) adalah titik relatif maksimum.

Selanjutnya marilah kita lihat pula titik ekstrem atau kritis Q (3, 47).

Dilihat perubahan atau pertambahan nilai x di sekitarnya, maka kita dapati, pada:

$$x = 2,5 \text{ maka } f'(x) \frac{dy}{dx} = 1,5 \text{ (tanda positif)}$$

$$x = 3,0 \text{ maka } f'(x) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x = 3,5 \text{ maka } f'(x) \frac{dy}{dx} = -4,5 \text{ (tanda negatif)}$$

Dengan terdapatnya perubahan tanda dari negatif (-) ke positif (+) dan dengan bertambahnya nilai x tersebut dari $x = 2,5$ ke $x = 3,5$, maka ternyata titik Q (3, 47) adalah titik relatif minimum.

Cara ketiga:

Dengan menggunakan turunan atau diferensial kedua $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$ yaitu bila $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} < 0$, maka kurvanya cembung ke bawah. Titik diperoleh adalah titik ekstrem yang relatif minimum.

Sekarang marilah kita lihat fungsi:

$$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 20$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 30x + 36$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x - 30$$

Dilihat dari titik ekstrem atau kritis P (2 ; 48), maka

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12(2) - 30 = 24 - 30 = -6 < 0$$

Dengan demikian, titik ini merupakan titik relatif maksimum. Sementara itu, kita lihat titik ekstrem atau kritis Q (3 ; 47), maka

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12(3) - 30 = 36 - 30 = 6 > 0$$

Maka, titik ini merupakan titik relatif minimum.

Contoh:

Diketahui fungsi $y = \sqrt{9 - x}$ dalam batas-batas $0 \leq x \leq 9$

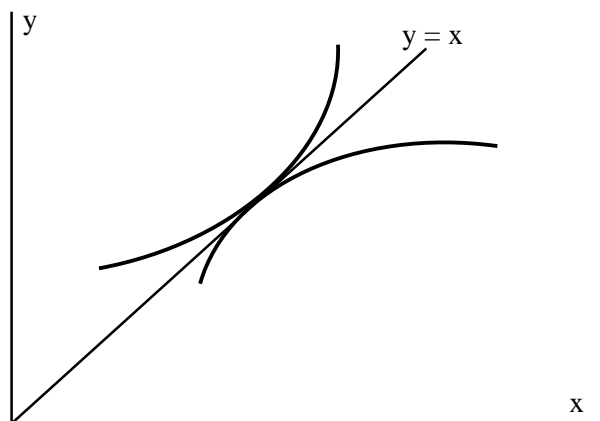
Persyaratan titik ekstrem atau kritis dari fungsi ini diperoleh pada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{9-x}} = 0$$

Sehingga, dalam hal ini tidak kita peroleh titik ekstrem atau kritis. Nilai yang terbesar dari fungsi y adalah 3 pada saat $x = 0$, dan nilai yang terkecil dari fungsi y ini adalah 0 pada saat $x = 9$.

C. Titik Belok (*Point of Infection*)

Suatu fungsi $f(x)$ yang mempunyai titik ekstrem, tetapi titik ekstrem tersebut bukan merupakan titik maksimum atau minimum maka fungsi $f(x)$ tersebut mempunyai titik belok. Hal ini dapat dilihat Gambar 7.8.



Gambar 7.8. Grafik $y = f(x)$

Kurva $y = f(x)$ yang terletak di atas garis $y = x$ disebut kurva yang cekung ke atas (*concave upward*) sedangkan yang terletak di bawah disebut kurva yang cekung ke bawah (*concave downward*). Kurva dari fungsi garis lurus (linear) tidak berlekuk atau berbelok karena tidak cekung ataupun cembung. Hal itu disebabkan tidak mempunyai titik ekstrem.

Bahwa suatu fungsi $f(x)$ yang mempunyai kurva cembung ke atas (*convex upward*) apabila $f''(x_0) < 0$. Fungsi $f(x)$ yang mempunyai kurva cembung ke bawah (*convex downward*) apabila $f''(x_0) > 0$. Fungsi $f(x)$ ini mempunyai titik relatif minimum.

Apabila suatu fungsi $f(x)$ mempunyai hasil turunan/diferensial keduanya yaitu $f'(x_0) = \frac{dy}{dx} = 0$, maka fungsi $f(x)$ tersebut yang mempunyai titik ekstrem karena $f'(x_0) = 0$. Di samping itu, mungkin selain mempunyai titik relatif maksimum atau minimum, juga mempunyai titik belok. Jadi, persyaratan titik belok dari suatu fungsi $f(x)$ adalah bila

$$f''(x_0) = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Contoh:

Suatu fungsi adalah $y = 1/2x^4 - 3x^2$, maka titik beloknya diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = 2x^3 - 6x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x^2 - 6 = 0$$

$$\rightarrow \therefore 6(x^2 - 1) = 0$$

$$\text{maka } x_1 = -1 \text{ dan } x_2 = 1$$

Jadi, ada titik beloknya yaitu titik A (-1 ; -2,5) dan titik B (1 ; -25).

Contoh:

Diketahui fungsi: $y = x^3 - 3x^2 + 4$

Persyaratan titik ekstrem atau kritis diperoleh pada:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x = 0$$

$$\rightarrow \therefore 3x(x - 2) = 0$$

Maka, ada dua titik ekstrem yaitu titik A (0 ; 4) dan titik B (2 ; 0).

Bila $x = 0$, maka:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6 = 6(0) - 6 = -6 < 0$$

sehingga titik A (0 ; 4) adalah titik relatif maksimum.

Apabila $x = 2$, maka:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6 = 6(2) - 6 = 6 > 0$$

sehingga titik B (2 ; 0) adalah titik relatif minimum.

Persyaratan titik belok diperoleh bila:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x^2 - 6 = 0$$

$$6(x - 1) = 0$$

$$\rightarrow \therefore x = 1$$

Jadi titik beloknya adalah titik C (1 ; 2)

Contoh:

Diketahui juga fungsi: $y = x^3 + 3x + 5$

Persyaratan titik ekstrem atau kritis diperoleh pada:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 3 = 0$$

Dalam hal ini tidak terdapat titik ekstrem atau kritis atau titik maksimum ataupun minimum. Persyaratan titik belok diperoleh bila:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x = 0 \rightarrow \therefore x = 0$$

Contoh:

Suatu fungsi $y = x^2$

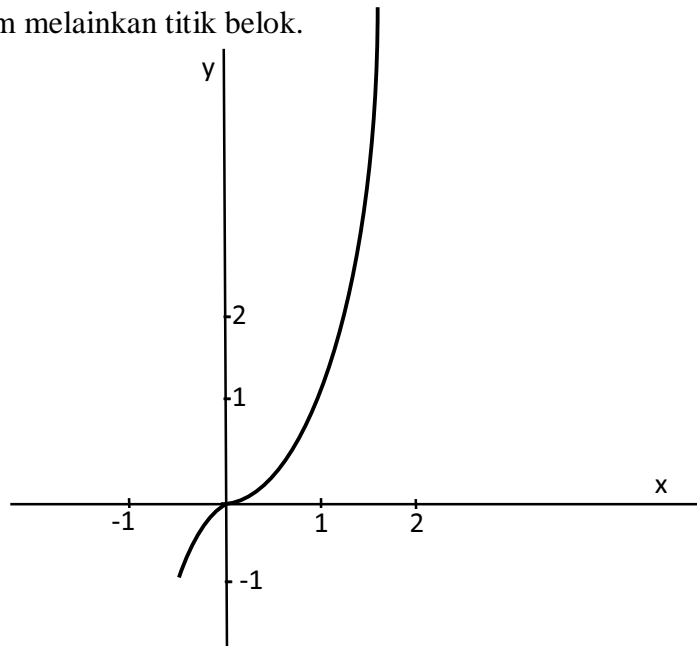
Apabila grafiknya digambar maka pada gambar grafik fungsi ini akan terlihat pada Gambar. Dalam Gambar 6.6. ini terlihat bahwa tidak ada titik relatif masimum atau minimum, tetapi hanya ada titik belok. Hal ini dapat dibuktikan dengan persyaratan yang harus dipenuhi untuk titik tersebut.

Persyaratan titik ekstrem atau titik kritis diperoleh pada:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 = 0 \text{ bila } x = 0, \text{ maka:}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x = 6 \times 0 = 0.$$

Oleh karena titik pada $x = 0$; $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, maka titik A (0, 0) bukan titik maksimum atau minimum melainkan titik belok.



Gambar 7.9. Grafik fungsi $y = x^2$

Contoh:

Suatu fungsi $y = x^3 - 4x^2 + 5x$

Apabila grafiknya digambarkan, grafik fungsi ini akan terlihat pada Gambar 7.10.

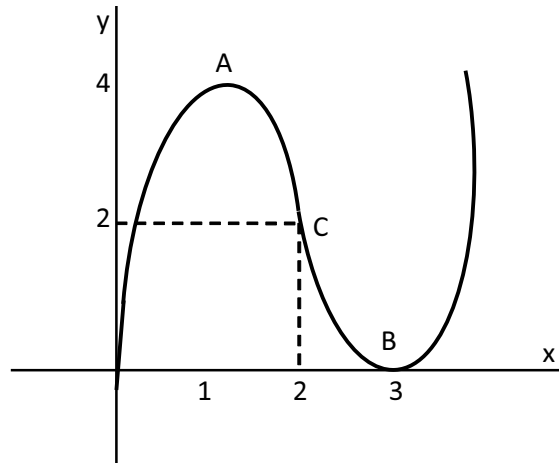
Grafik ini digambarkan dengan menggunakan tabel x dan y.

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	-16	0	4	2	0	4	20

Dari Gambar 7.10. terlihat bahwa ada titik relatif maksimum dan relatif minimum serta titik belok. Titik-titik tersebut diperoleh pada:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^3 - 12x + 9 = 0$$

$$3(x - 1)(x - 3) = 0$$



Gambar 7.10.

Bila $x \rightarrow \therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12 = -6 < 0$, maka titik A (1 : 4) adalah titik relatif maksimum. Sedangkan, jika $x = 3$, maka $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12 = 6 > 0$ sehingga titik B (3 : 0) adalah titik relatif minimum.

Apabila $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12 = 0$

$$x \rightarrow \therefore x = 2$$

Maka titik C (2 ; 2) adalah titik belok.