BAB 6
LIMIT FUNGSI

A. Pengertian Limit Fungsi

Aljabar kalkulus, yang berintikan teori tentang diferensiasi dan integrasi, berhubungan dengan perubahan-perubahan sangat kecil dalam variabel-variabel sebuah fungsi. Dikembangkan secara terpisah pada abad ketujuhbelas oleh *Sir Isaac Newton dan Gottfried Leibnitz.* Kalkulus pada awalnya digunakan untuk memecahkan masalah-masalah fisika, astronomi dan geometri. Dewasa ini kalkulus semakin meluas dimanfaatkan oleh berbagai bidang atau ilmu pengetahuan, termasuk ilmu ekonomi. Hal ini dilakukan mengingat analisis dalam bisnis dan ekonomi selalu berhubungan dengan faktor perubahan, kalkulus memainkan peranan penting sebagai salah satu alat analisisnya.

Diferensasi dan integrasi sesungguhnya merupakan dua operasi matematis yang saling berkebalikan. Pada intinya, diferensial (teori tentang diferensiasi) berkenaan dengan penentuan tingkat perubahan suatu fungsi, sedangkan integral (teori tentang integrasi) berkenaan dengan pembentukan persamaan suatu fungsi apabila tingkat perubahan fungsi yang bersangkutan diketahui. Teori tentang limit dan kesinambungan sebuah fungsi merupakan "akar" dari aljabar kalkulus. Oleh karenanya uraian mengenai kalkulus selalu diawali dengan bahasan tentang kedua hal ini. Meskipun konsep limit dan kesinambungan itu sendiri mungkin terasa relatif lebih canggih (*sophisticated)* dibandingkan dengan konsep diferensial dan integralnya (yang merupakan inti kalkulus)

Konsep-konsep dalam bentuk limit, sering kali digunakan baik dalam pemikiran yang nonmatematis maupun dalam aktivitas kehidupan keseharian. Konsep dalam bentuk limit dimaksudkan sebagai pola pendekatan terhadap nilai-nilai batas yang ditentukan (tidak sama persis, tetapi hanya mendekati saja), misalnya produksi maksimum teoritis dari sebuah mesin adalah suatu limit, takaran bahan bakar untuk setiap kilometer yang dibutuhkan oleh suatu kendaraan bermotor, kecepatan laju suatu kendaraan, kecepatan rata-rata kendaraan bermotor, dan lainnya.

Ada beberapa pengertian mengenai istilah limit itu sendiri, seperti *limit kiri* dan *limit kanan*. Artinya, bahwa dengan adanya pernyataan itu konsep pendekatannya dinyatakan dari kiri dan/atau dari kanan. Sebagai gambaran, konsep pendekatan dari kiri terhadap besaran angka 2 adalah: 1,9999…, dan konsep pendekatan dari kanan terhadap besaran angka 2 tersebut adalah: 2,0000001 dan seterusnya.

Untuk menggambarkan seberapa jauh sebuah fungsi akan berkembang apabila variabel di dalam fungsi yang bersangkutan terus menerus berkembang mendekati suatu nilai tertentu digunakanlah limit. Sebagai contoh : dari y dan f(x) akan dapat diketahui limit atau batas perkembangan f (x) ini apabila variabel x terus menerus berkembang hingga mendekati suatu nilai tertentu.

Limit dapat didefinisikan sebagai: Untuk suatu fungsi f(x) diandaikan sebuah peubah bebas x diasumsikan mempunyai nilai tertentu yang mendekati a, maka fungsi f(x) dapat dianggap berhubungan dengan suatu himpunan nilai. Seandainya pada saat x mendekati a, nilai yang sesuai bagi f(x) mendekati suatu konstanta A, dan seandainya pula bahwa nilai f(x) dapat dijadikan berbeda sedikit secara arbiter dari A dengan mengambil nilai x yang mendekati a, tetapi tidak sama dengan a, maka hal ini benar untuk semua nilai x. Dan artinya f(x) dikatakan sebagai suatu konsep pendekatan dari a atau limit a jika x mendekati a.

Secara singkat definisi limit dari suatu peubah atau limit dari suatu fungsi adalah: Suatu peubah x dikatakan mendekati bilangan konstanta merupakan limit, apabila x berubah-ubah sedemikian rupa sehingga selisih absolut (x – a), terjadi dan tetap lebih kecil daripada jumlah positif yang ditentukan lebih dahulu, tetapi nilai yang lebih kecil akan dipilih, hal ini ditunjukan oleh notasi: $\lim_{x \to a} x = a$ (baca: *limit x di mana x mendekati a).*

Dua hal perlu diperhatikan dalam notasi atau pernyataan limit di atas. *Pertama*, x → a harus dibaca serta ditafsirkan sebagai x mendekati a, dan bukan berarti x = a. *Kedua*, lim f(x) = L harus dibaca serta ditafsirkan bahwa L adalah limit fungsi f(x), dan bukan berarti L adalah nilai fungsi f(x).

Contoh praktis berikut ini akan menjelaskan bagaimana bekerjanya teori limit dan apa sesungguhnya yang dimaksud dengan limit.

Andaikan $y = f(x) = 1 - 2x^2$

Maka $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2}(1 - 2x^2) = -7$

$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} f(x)(1 - 2x^2) = -17$

Perhatikan perkembangan fungsi f(x) untuk perkembangan variabel x sebagaimana tercermin di dalam tabel berikut:

x	$f(x) = 1 - 2x^2$
3,50	$1 - 2(3,50)^2 = -23,5$
3,10	$1 - 2(3,10)^2 = -18,22$
3,05	$1 - 2(3,05)^2 = -17,605$
3,01	$1 - 2(3,01)^2 = -17,1202$
2,99	$1 - 2(2,99)^2 = -16,8802$
2,95	$1 - 2(2,95)^2 = -16,405$
2,90	$1 - 2(2,90)^2 = -15,82$
2,50	$1 - 2(2,50)^2 = -11,5$
2,10	$1 - 2(2,10)^2 = -7,82$
2,05	$1 - 2(2,05)^2 = -7,405$
2,01	$1 - 2(2,01)^2 = -7,0802$
1,99	$1 - 2(2,99)^2 = -6,9202$
1,95	$1 - 2(2,95)^2 = -6,605$
1,90	$1 - 2(2,90)^2 = -6,22$
1,50	$1 - 2(2,50)^2 = -3,5$
1	$1 - 2(2,1)^2 = -0,1$

Dari tabel di atas memperlihatkan bahwa jika x bergerak mendekati 2 (baik dari x = 1 lalu menaik, maupun dari x = 3,50 lalu menurun), maka f(x) akan mendekati nilai -7. Sedangkan jika x bergerak mendekati 3 maka f(x) akan berkembang mendekati nilai -17.

Pada contoh di atas variabel bergerak mendekati nilai-nilai positif tertentu, yakni 2 dan 3. Limit sebuah fungsi dapat pula dianalisis untuk perkembangan variabel yang menuju nilai-nilai negatif tertentu, menuju 0, bahkan menuju + ∞ dan – ∞. Dengan demikian, untuk setiap fungsi f(x) kita dapat menganalisis lim f(x) untuk $x \to +a,\ x \to -a,\ x \to 0,\ x \to +\infty$ dan $x \to -\infty$. Seiring dengan itu dapat pula terjadi (untuk x mendekati sembarang nilai tertentu) lim f(x) = + L, lim f(x) = -L, lim f(x) = 0, f(x) = + ∞ atau lim f(x) = – ∞. Limit sesuatu fungsi hanya mempunyai dua kemungkinan: ada (terdefinisi, tertentu; yakni jika limitnya adalah L, atau –L, atau 0, atau ∞ atau – ∞) atau tidak ada sama sekali (tidak terdefinisi), dan tidak boleh tak tentu.

Contoh:

1) $\lim_{x \to 2}(1 - 2x^2) = -7$
2) $\lim_{x \to 0}(1 - 2x^2) = 1$
3) $\lim_{x \to +\infty}(1 - 2x^2) = -\infty$
4) $\lim_{x \to -\infty}(1 - 2x^2) = -\infty$

Analisis mengenai limit sesuatu fungsi sesungguhnya dipilah menjadi dua bagian, tergantung pada sisi mana kita melihat gerakan perkembangan variabelnya. Apabila kita menganalisis $\lim_{x \to a} f(x)$ dari nilai-nilai x yang lebih kecil daripada a (dari x < a), berarti kita melihatnya dari sisi kiri. Sebaliknya jika kita menganalisis $\lim_{x \to a} f(x)$ dari nilai-nilai x yang lebih besar daripada a (dari x > a), berarti kita melihatnya dari sisi kanan. Jadi,

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

terdiri atas

$\lim_{x \to a^-} f(x)$

(analisis sisi kiri)
$x \to a$ **dilihat dari nilai-nilai** $x < a$

$\lim_{x \to a^+} f(x)$

(analisis sisi kanan)
$x \to a$ **dilihat dari nilai-nilai** $x > a$

Limit sisi-kiri dari sebuah fungsi adalah nilai yang didekati oleh fungsi tersebut apabila variabelnya bergerak mendekati limitnya melalui nilai-nilai yang membesar ($x \to a$ dari sisi-kiri, melalui nilai-nilai $x < a$. Jadi, jika:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L^-$$

berarti L^- merupakan limit sisi-kiri dari f(x) untuk $x \to a$

Untuk sisi-kanan dari sebuah fungsi adalah nilai yang didekati oleh fungsi tersebut apabila variabelnya bergerak mendekati limitnya melalui nilai-nilai yang mengecil ($x \to a$ dari sisi kanan, melalui nilai-nilai $x > a$). Jadi, jika

$$\lim_{x \to a} f(x) = L^{+}$$

berarti L^{+} merupakan limit sisi-kiri dari f(x) untuk $x \to a$

Limit sebuah fungsi dikatakan ada jika dan hanya jika limit sisi-kiri dan limit sisi-kanannya ada serta sama. Dalam kasus semacam ini

$$\lim_{x \to a^{-}} f(x) = \lim_{x \to a^{+}} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Apabila salah satu dari ketentuan-ketentuan di atas tidak terpenuhi, maka limit dari fungsi yang bersangkutan tidak terdefinisi. Dengan demikian limit sebuah fungsi dikatakan tidak ada jika limit salah satu sisinya tidak ada, atau limit kedua sisinya tidak ada, atau limit kedua sisinya ada tetapi tidak sama.

Konsep limit, yang secara matematik terasa samar-samar, sebenarnya bukanlah sesuatu yang abstrak. Dalam kehidupan bisnis dan ekonomi sehari-hari, konsep ini cukup sering diterapkan. Ia menggambarkan batas ideal tertentu (maksimum dan minimum) yang dapat atau harus dipenuhi, dalam kondisi yang juga ideal. Ambillah sebagai contoh tingkat upah minimum. Ini menggambarkan batas upah minimum yang ideal ini tidak harus dipenuhi. Kalaupun dalam kenyataan tingkat upah minimum yang ideal ini tidak terpenuhi, karena kondisi ideal yang mendukungnya tidak memadai, namun setidak-tidaknya upah minimum yang berlangsung akan berkisar di tingkat ideal yang diharapkan (sedikit di atasnya atau sedikit di bawahnya). Gambaran mengenai batas ideal ini dapat pula kita temui dalam hal kapasitas produksi (maksimum), profit (maksimum), biaya (minimum) dan sebagainya.

B. Kaidah-kaidah Limit

1. Jika $y = f(x) = x^n \; dan \, n > \; 0, maka \; \lim_{x \to a} x^n = a^n$

   Contoh:

   - $\lim_{x \to 2} x^4 = 2^4 = 16$
   - $\lim_{x \to 4} x^3 = 4^3 = 64$

2. Limit dari suatu konstanta adalah konstanta itu sendiri.

$$\lim_{x \to a} k = k$$

Contoh:

- $\lim_{x \to 1} 10 = 10$
- $\lim_{x \to 2} 5 = 5$

3. Limit dari suatu penjumlahan (pengurangan) fungsi adalah jumlah (selisih) dari limit fungsi-fungsinya.

$$\lim_{x \to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \to a}\{f(x) \pm\} = \lim_{x \to a} g(x)$$

Contoh:

- $\lim_{x\to 1}(3x + 4x) = \lim_{x\to 1} 3x + \lim_{x\to 1} 4x$

  = 2.1 + 3.1

  = 5

- $\lim_{x\to 2}(2x^2 - 3x) = \lim_{x\to 2} 2x^2 - \lim_{x\to 2} 3x$

  = $2(2)^2 - 3(2)$

  = 2

4. Limit dari suatu perkalian fungsi adalah perkalian dari limit fungsi-fungsinya.

$$\lim_{x \to a}\{f(x)\ \ g(x)\} = \lim_{x \to a} \mathrm{f(x)}\ .\ \lim_{x \to a} g(x)$$

Contoh:

- $\lim_{x \to 2} 4x(2x + 3) = \lim_{x \to 2} 4\mathrm{x}\ .\ \lim_{x \to 2} 2x + 3$

  = (4.2) . (2(2) + 3)

  = 56

- $\lim_{x \to 1} x^3(3x - 2) = \lim_{x \to 1} x^3\ .\ \lim_{x \to 1}(3x + 2)$

  = $(1)^3$. [3(1) + 2]

  = 5

5. Limit dari perkalian konstanta dengan fungsi adalah perkalian antra konstanta dengan limit dari fungsi

$$\lim_{x\to a} k.\{f(x)\} = k.\lim_{x\to a} f(x) = k.A$$

Contoh:

- $\lim_{x\to 2} 4.(2x+3) = 4.\lim_{x\to 2}(2x+3)$
  $= 4.\{2(2)+3\} = 28$
- $\lim_{x\to 1} 5.(8x^2) = 5.\lim_{x\to 1}(8x^2)$
  $= 5.\{8.(1)^2\}$
  $= 40$

6. Limit dari suatu pembagian fungsi adalah pembagian dari limit fungsi-fungsinya, dengan syarat limit fungsi pembagian tidak sama dengan nol.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \text{ dengan syarat } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

Contoh: $\lim_{x\to 5} \frac{(x^2-25)}{(x-5)} = \frac{\lim_{x\to 5}(x^2-25)}{\lim_{x\to 5}(x-5)}$

$$= \frac{\lim_{x\to 5}(x-5)(x+5)}{\lim_{x\to 5}(x-5)} = \lim_{x\to a}(x+5) = 10$$

7. Limit dari suatu fungsi berpangkat n adalah pangkat n dari limit fungsinya.

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\}^n = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\}^n$$

Contoh:

- $\lim_{x\to 2}(2x+3)^2 = \{\lim_{x\to 2}(2x+3)\}^2$
  $= \{2(2) + 3\}^2 = 49$
- $\lim_{x\to 3}(5x)^2 = \{\lim_{x\to 3}(5x)\}^2$
  $= (5(3))^2 = 225$

8. Limit dari suatu fungsi terakar berpangkat positif adalah akar dari limit fungsinya. $\lim_{x\to a}\{\sqrt[n]{f(x)}\} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ $\qquad n > 0$

Contoh:

- $\lim_{x\to 2}\sqrt{(2x+1)^2} = \sqrt{\lim_{x\to 2}(2x+1)^2}$
  $= \sqrt{(2(2)+1)^2} = \sqrt{25} = 5$
- $\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{(x-2)}{(x^2-4)}} = \sqrt{\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)}}$
  $= \sqrt{\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+2)}} = \sqrt{\frac{1}{5}}$

9. Dua buah fungsi yang serupa mempunyai limit yang sama. Jika f(x) = g(x) untuk semua nilai x≠ a dan lim f(x) = L, maka $\lim_{x \to a} g(x) = L$ juga

C. Fungsi Limit Pecah

Dalam menentukan solusi dari suatu limit fungsi pecah, pada prinsipnya adalah sama dengan menentukan nilai pada limit fungsi biasa, yaitu melakukan substitusi harga x terhadap variabel x yang ada pada fungsi pecahnya. Jika setelahnya disubstitusi ternyata hasilnya riil (nyata), maka nilai tersebut adalah merupakan hasil akhirnya, namun demikian apabila setelah disubstitusikan hasilnya terjadi pembagian dengan 0 (nol). Maka hal tersebut harus dilakukan proses penyelesaian yang berbeda dengan proses penyelesaian pada limit fungsi lainnya. Hal ini lebih karena adanya ketentuan yang tidak membolehkan terjadinya pembagian dengan nol.

Untuk mendapatkan penyelesaian akhir atau cara menyelesaikan model limit fungsi (setelah dilakukan substitusi harga x terhadap fungsinya dan terjadi pembagian dengan nol), perhatikan fungsi pembilang dan fungsi penyebutnya, tentukan derivatif (turunan) dari fungsi pembilang dan penyebutnya terhadap x, kemudian substitusikan harga x yang didekati terhadap fungsi-fungsi derivatif dari pembilang dan penyebutnya, apabila harga x yang didekati setelah disubstitusikan terhadap fungsi derivatif pembilang dan penyebutnya masih terjadi pembagian dengan nol, maka hasilnya adalah merupakan harga yang *infinite* (sebagai hasil akhir).

Contoh:

- $\lim_{x\to 2} \frac{(2x^3+3x-8)}{(5x+6)} = \frac{(2(2)^3+3(2)-8}{(5(2)+6)} = \frac{14}{16}$
- $\lim_{x\to 1} \frac{(2x^3+3x-2)}{(3x-3)} = \frac{(2(1)^3+3(1)-2}{(3(1)-3)} = \frac{3}{0}\ (infinite)$

Oleh karena setelah dilakukan subtitusi terhadap harga x yang didekati terjadi pembagian dengan nol, maka langkah berikutnya adalah menentukan derivative dari fungsi pembilang dan fungsi penyebutnya, sebagai berikut:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(6x^2+3)}{(3)} = \frac{(6(1)^2+3}{(3)} = \frac{9}{3} = 3$$

D. Penyelesaian Kasus Khusus

Dalam sub-bab pengertian limit ditegaskan bahwa limit sesuatu fungsi tidak boleh taktentu. Ini berarti penentuan limit sesuatu fungsi tidak boleh membuahkan hasil berbentuk 0/0 atau ∞/∞. Sub-bab ini akan membahas kaidah-kaidah khusus yang dapat diterapkan guna menghindari hasil berbentuk tak tentu tersebut.

1. Bentuk tak tentu 0/0

Perhatikan tentang kaidah tentang limit pembagian fungsi

Misalkan y = f(x)/g(x) = $\frac{(x^2-25)}{(x-5)}$. Kemudian jika terhadap limit fungsi $\frac{(x^2-25)}{(x-5)}$ untuk taktentu menghasilkan 0/0. Hal ini disebabkan karena fungsi y = $\frac{(x^2-25)}{(x-5)}$ = 0/0 jika x =5. Sehubungan dengan itu kita senantiasa harus waspada bahwa x → 5 bukanlah berarti x = 5.

Selanjutnya perhatikan : jika x ≠ 5 maka y ≠ 0/0, kedua pembilang (x^2 – 25) dan penyebut (x – 5) dapat dibagi dengan (x – 5), sehingga y = $\frac{(x^2-25)}{(x-5)}$ dapat diuraikan menjadi y = (x – 5)(x + 5)/(x – 5) = (x + 5).

Mengingat x → 5 adalah x ≠ 5, maka lim $\frac{(x^2-25)}{(x-5)}$ untuk x → 5 dapat diuraikan seperti di atas dan tersederhana menjadi hanya lim (x + 5) untuk setiap x → 5. Jadi, limit yang menghasilkan bentuk taktentu 0/0 dapat dihindari dengan cara mengurai-sederhanakan fungsinya.

Misalkan fungsi y = $\frac{(x-2)}{(x^2-4)}$. Kemudian jika terhadap limit fungsi $\frac{(x-2)}{(x^2-4)}$ untuk taktentu menghasilkan 0/0. Hal ini disebabkan karena fungsi $\frac{(x-2)}{(x^2-4)}$ = 0/0 untuk nilai x = 2. Sehingga fungsi y = $\frac{(x-2)}{(x^2-4)}$ dapat diuraikan menjadi $\frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)}$, setelah disederhanakan menjadi hanya lim $\frac{1}{(x+2)}$. Jadi limit yang menghasilkan bentuk taktentu 0/0 dapat dihindari dengan menguraikan fungsinya. Hal ini sama dengan contoh limit pecah sebelumnya.

Misalkan $f(x) = \frac{(x-3^2)-9}{(x)}$. Berapa lim f(x) untuk x → 0. Substitusi langsung x = 0 ke dalam lim f(x) untuk x → 0 akan menghasilkan bentuk tak tentu 0/0 jika x = 0. Namun jika x ≠ 0, f(x) ≠ 0/0 dan dapat diurai-sederhanakan menjadi f(x) = $\frac{(x^2-6x+9-9)}{(x)} = \frac{(x^2-6x)}{x}$ = x – 6.

Dengan demikian

$$\lim_{x \to 0} [(x-3)^2 - 9\}/x] = \lim_{x \to 0}(x-6) = -6$$

2. Bentuk tak tentu ~ / ~

Bentuk taktentu ~ / ~ dapat terjadi dalam kasus penentuan limit pembagian fungsi [katakanlah lim{*f(x)/g(x)}*] untuk variabel *x* →'. Hasil **~ / ~,** yang potensial untuk terjadi, dapat dihindari dengan cara membagi pembilang dan penyebutnya dengan variabel berpangkat tertinggi pada penyebut.

Contoh:

- Misalkan $y(x) = f(x)/g(x) = (4x^5 + x^2)/(3x^6 + 7x^3)$ dan kita ingin mengetahui limit y(x) untuk x → ~

  Dengan membagi pembilang dan penyebut dengan x^6, akan diperoleh

$$\lim_{x\to\sim} \frac{4x^5 + x^2}{3x^6 + 7x^3} = \lim_{x\to\sim} \frac{\frac{4}{x} + \frac{1}{x^4}}{3 + \frac{7}{x^3}}$$

$$= \frac{0+0}{3+0} = 0$$

- $\lim_{x\to\sim} \frac{6x^3+x^2+9}{2x^3+5x^2-4} = \lim_{x\to\sim} \frac{6+\frac{1}{x}+\frac{9}{x^3}}{2+\frac{5}{x}-\frac{4}{x^3}}$

$$= \frac{6+0+0}{2+0+0} = 3$$

3. Limit Tak Hingga (*Infinite*)

Suatu limit dikatakan limit tak hingga (*limit infinite*) jika di depan limitnya merupakan fungsi pecah dan x didekati oleh bilangan tak terhingga (~).

Didefinisikan:

$$\lim_{x\to\sim} \frac{1}{X} = 0 \; dan \lim_{x\to 0} \frac{1}{X} = \sim$$

Untuk menyelesaikan model limit *infinite* ini, perhatikan pangkat (derajat) tertinggi dari fungsi pembilang dan pangkat (derajat) dari fungsi penyebutnya, kemudian bagilah dengan pangkat (derajat) tertinggi dari fungsi penyebutnya. Ada berbagai model dari limit fungsi *infinitei* seperti:

- Pangkat fungsi pembilang sama dengan (=) pangkat fungsi penyebut
- Pangkat fungsi pembilang lebih besar (>) pangkat fungsi penyebut
- Pangkat fungsi pembilang lebih kecil (<) pangkat fungsi penyebut

- **Pangkat Fungsi Pembilang Sama Dengan Pangkat Fungsi Penyebut**

Jika pangkat (derajat) tertinggi dan fungsi pembilang sama dengan pangkat tertinggi dari fungsi penyebutnya, maka penyelesaian dari limit fungsi tersebut adalah merupakan hasil bagi antara koefisien pangkat tertinggi dari fungsi pembilang dan pangkat tertinggi fungsi penyebutnya, adapun langkah penyelesaikan kasus tersebut seperti contoh berikut ini.

C*ontoh:*

$$\lim_{x \to \sim} \frac{(16x^2 + 4)}{(15x^2 - 10x)} = \lim_{x \to \sim} \frac{\frac{16x^2}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{15x^2}{x^2} - \frac{10x}{x^2}}$$

$$= \frac{16+0}{15-0} = \frac{16}{15}$$

Keterangan:

Pangkat tertinggi pembilang sama dengan pangkat tertinggi penyebutnya, yaitu = 2, maka solusinya adalah hasil bagi koefisien dari pembilang dan penyebut yang mempunyai pangkat tertinggi yaitu ($\frac{16}{15}$).

- **Pangkat Fungsi Pembilang Lebih besar dari Pangkat Fungsi Penyebut**

Jika pangkat (derajat) tertinggi dari fungsi pembilang lebih besar dari pangkat tertinggi dari fungsi penyebutnya, maka penyelesaian dari limit fungsi tersebut bernilai *infinite* (~) seperti pada contoh di bawah ini:

Contoh:

$$\lim_{x \to \sim} \frac{(16x^3 + 5x^2 + 4x)}{(10x^2 - 6x)} = \lim_{x \to \sim} \frac{\frac{16x^3}{x^2} + \frac{5x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2}}{\frac{10x^2}{x^2} - \frac{6x}{x^2}}$$

$$= \frac{16x + 4 - \frac{3}{\sim}}{15 - \frac{10}{\sim}} = \frac{16(\sim) + 4 - 0}{15 - 0} = \sim$$

- **Pangkat Fungsi Pembilang Lebih Kecil dari Pangkat Fungsi Penyebut**

Jika pangkat (derajat) tertinggi dari fungsi pembilang lebih kecil dari pangkat tertinggi dari fungsi penyebutnya, maka solusi dari limit fungsi tersebut akan bernilai nol.

Contoh:

$$\lim_{x\to\sim}\frac{(16x^2+5x-2)}{(10x^3-6x)} = \lim_{x\to\sim}\frac{\frac{16x^2}{x^3}+\frac{5x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}{\frac{10x^3}{x^3}-\frac{6x}{x^3}}$$

$$= \frac{\frac{16}{\sim}+\frac{5}{\sim}-\frac{2}{\sim}}{10-\frac{6x}{x^3}} = \frac{0+0-0}{15-0} = 0$$

Terdapat cara lain yang lebih singkat dalam menentukan lim{*f(x)/g(x)*} untuk $x \to \sim$. Penyelesaian pintas ini dilakukan dengan cara memperbandingkan suku-suku berpangkat tertinggi pada pembilang dan penyebut.

Jika $y(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_{i}x^{i}}{\sum_{j=0}^{n} b_{j}x^{j}}$

di mana *f(x)* dan *g(x)* masing-masing merupakan fungsi polinom berderajat *m* dan berderajat *n*,

maka

$$\lim_{x\to\infty} y(x) \begin{cases} = 0 & \text{dalam hal } m < n \\ = a_m/b_n & \text{dalam hal } m = n \\ = +\sim & \text{dalam hal } m < n \text{ dan } a_m > 0 \\ = -\sim & \text{dalam hal } m < n \text{ dan } a_m < 0 \end{cases}$$

Perhatian: Kaidah ini berlaku hanya jika *y(x)* merupakan fungsi pembagian dan limitnya ditentukan untuk $x \to \sim$

Contoh:

- $y(x) = (4x^5 + x^2)/(3x^6 + 7x^3)$ merupakan sebuah fungsi pembagian, dimana $m = 5$, $n = 6$, $a_m = 4$ dan $b_n = 3$.

  Karena m < n, maka $\lim_{y\to\sim} y(x) = 0$

- Tentukan limit y(x) untuk x → ~ jika $y(x) = (6x^3 + x^2 + 9)/(2x^3 + 5x^2 – 4)$, dimana m =3, n = 3, a_m = 6, dan b_n = 2.

  Karena m = n, maka $\lim_{y\to\sim} y(x) = \frac{a_m}{b_n} = \frac{6}{2} = 3$

E. Kesinambungan

Perihal kesinambungan dan ketidaksinambungan fungsi merupakan konsep dasar penting dalam kalkulus. Konsep kesinambungan bertalian erat dengan konsep limit. Secara visual, sebuah fungsi dikatakan sinambung (*continous*) apabila gambarnya berupa sebuah kurva yang tidak terputus; yakni jika dalam menggambarkan kurva tersebut kita tidak perlu mengangkat alat tulis, melainkan cukup dengan menggeserkannya ke arah yang bersesuaian. Apabila dalam melanjutkan penggambaran kurva sebuah fungsi kita terpaksa harus mengangkat alat tulis pada titik tertentu, maka fungsi yang bersangkutan dikatakan asinambung (*discontinous*) atau terputus pada titik tersebut.

Dalam uraian-uraian sebelum ini telah ditegaskan bahwa *lim f(x)* untuk $x \to a$ bukanlah berarti *f(x)* pada $x = a$. Dalam menentukan *lim (x)* untuk $x \to a$, kita tidak menetapkan berapa nilai *f(x)* pada $x = a$. Dengan perkataan lain, limit tersebut sesungguhnya ditentukan oleh nilai-nilai *f(x)* di sekitar (yang berdekatan dengan) $x = a$, tetapi bukan oleh nilai *f(x)* pada $x = a$ itu sendiri. Limit fungsi *f(x)* untuk $x \to a$ dapat sama dan dapat pula tidak sama dengan *f(a)*. Apabila *lim f(x)* untuk $x \to a$ terdefinisi, dan *f(x)* pada $x = a$ [atau *f(a)*] juga terdefinisi serta sama dengan *lim f(x)* untuk $x \to a$, maka fungsi *f(x)* dikatakan sinambung pada titik di mana $x = a$. Jadi,

Sebuah fungsi *f(x)* dikatakan sinambung pada $x = a$ jika

1. *f(a)* terdefinisi
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ terdefinisi
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Fungsi *f(x)* dikatakan sinambung dalam suatu interval $b \le x \le c$ (atau interval $b < x < c$) jika ia sinambung pada setiap titik di dalam interval tersebut.

Fungsi *f(x)* yang tidak sinambung pada suatu titik di mana $x = a$ dikatakan asinambung pada $x = a$.

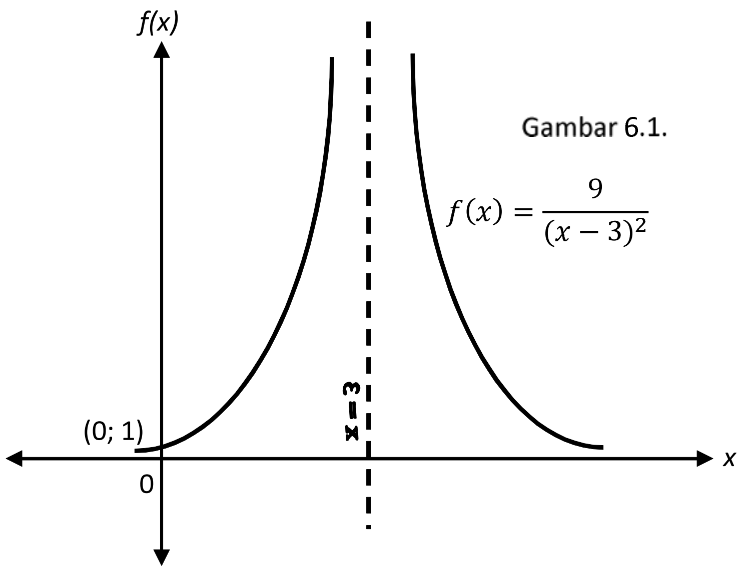
Ketidaksinambungan sebuah fungsi dapat berbentuk salah satu dari tiga kemungkinan : asinambung tak terhingga, asinambung berhingga dan asinambung titik. Secara geometri, penampilan kurva dari fungsi-fungsi yang berlainan bentuk ketidaksinambungan ini sangat berbeda.

Fungsi *f(x)* dikatakan asinambung tak terhingga pada $x = a$ jika *f(x)* menjadi (positif atau negatif) tak berhingga pada $x = a$ mendekati $x = a$ sebagai sebuah asimtot.

Contoh:

Fungsi $f(x) = 9/(x - 3)^2$ asinambung tak terhingga pada $x = 3$ sebab *f*(3) dan *lim* *f(x)* untuk $x \to 3$ tidak terdefinisi; dalam hal ini *f*(3) = ~ dan $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \sim$

Fungsi ini sinambung pada semua nilai *x* selain $x = 3$. Kurvanya asimtotik pada $x = 3$ (lihat gambar).



Gambar 6.1.

Fungsi *f(x)* dikatakan asinambung berhingga pada $x = a$ jika *f(x)* terdefinisi tapi berubah secara drastik *x a;* yakni jika *f(a)* terdefinisi dan *lim f(x)* untuk $x \to a$ tidak terdefinisi. Kurva dari fungsi yang asinambung berhingga pada $x = a$ mempunyai dua macam nilai *f(a)* untuk $x \to a$ yakni limit masing-masing sisinya.

Contoh:

Fungsi $f(x) = 3/x$ asinambung berhingga pada $x = 0$ sebab *f(x)* terdefinisi tapi berubah secara drastik pada $x = 0$, karena *lim f(x)* untuk $x \to 0$ tidak terdefinisi.

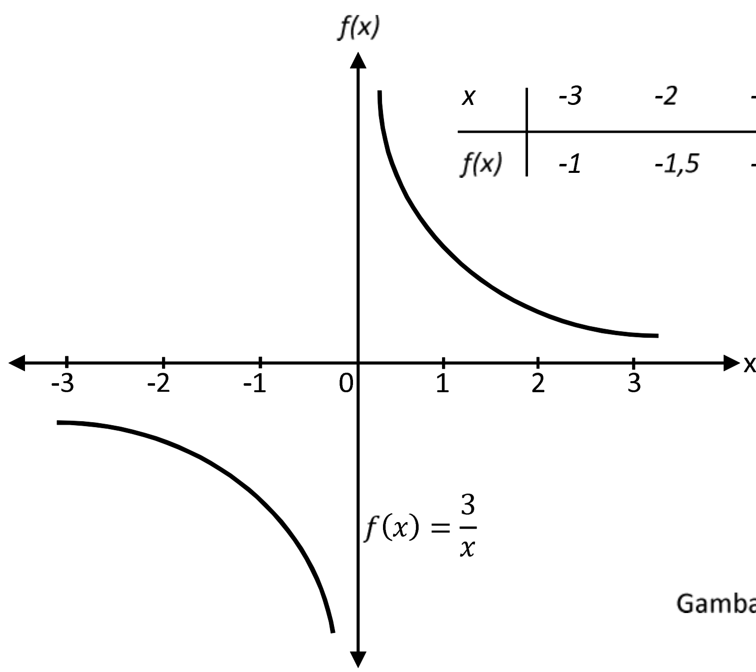
$f(0) = \frac{3}{0} = \sim$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-}(3/x) = -\sim \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}(3/x) = +\sim \end{array}\right\}$$

Karena limit sisi-kiri ≠ limit sisi-kanan maka $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ tidak terdefinisi

Amati gambar di bawah ini; *f(x)* menuju – ∼ untuk $x \to 0$ dari sisi-kiri, tetapi menuju + ∼ untuk $x \to 0$ dari sisi kanan terdapat perubahan drastis nilai *f(x)* pada $x = 0$.

x	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
f(x)	*-1*	*-1,5*	*-3*	∞	*3*	*1,5*	*1*



Gambar 6.2.

Ciri khas dari fungsi yang memiliki ketidaksinambungan berhingga (*finite discountinuity*) adalah bahwa nilai fungsinya sama dengan limit salah satu sisinya.

Fungsi *f(x)* dikatakan asinambung titik pada $x = a$ jika *f(a)* tidak terdefinisi tapi *lim f(x)* untuk $x \to a$ terdefinisi. Kurva dari fungsi yang asinambung titik pada $x = a$ tampak seakan-akan sinambung, namun sesungguhnya terputus karena pada $x = a$ tersebut *f(x)* tidak terdefinisi. Titik di mana *f(x)* tidak terdefinisi dinamakan "titik-yang hilang" dalam fungsi yang bersangkutan.

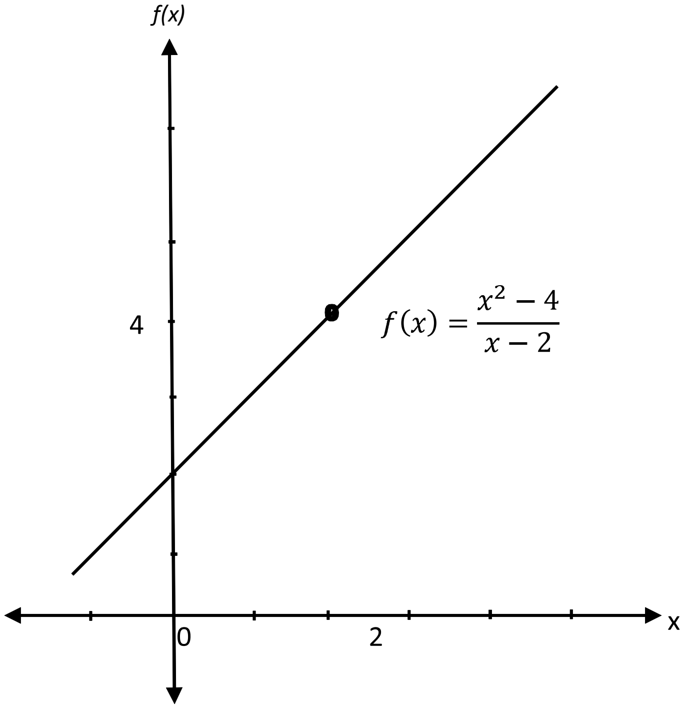
Contoh:

1) Fungsi $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ asinambung titik pada $x = 2$ sebab $f(2)$ tidak terdefinisi tapi *lim f(x)* untuk $x \to 2$ terdefinisi.

   $f(2) = (4 - 4)/(2 - 2) = 0/0$ = tak terdefinisi. Akan tetapi untuk $x \neq 2$, *f(x)* bisa disederhanakan menjadi

   $f(x) = (x + 2)(x - 2) = (x + 2)$ sehingga

   $$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$



Gambar 6.3.

   Kurva dari fungsi $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ tak lain garis lurus (x + 2).

   Perhatikan gambar di atas, kurva $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ terputus pada kedudukan $x = 2$. Hal ini disebabkan karena tidak terdefinisinya $f(2)$. Titik (2, 4) merupakan titik-yang hilang dalam *f(x)* = $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$.

2) Fungsi $f(x) = (2x^2 - 32)/(x + 4)$ asinambung titik pada $x = -4$ sebab $f(-4)$ tidak terdefinisi tapi *lim f(x)* untuk $x \to -4$ terdefinisi.

   $f(-4) = (32 - 32)/(-4 + 4)$ = tak terdefinisi. Akan tetapi untuk $x \neq -4$, *f(x)* bisa disederhanakan menjadi $f(x) = (2x - 8)(x + 4) = (2x - 8)$.

   $$\lim_{x \to -4} f(x) = \lim_{x \to -4} f(x),\ \frac{(2^x - 32)}{(x+4} = \lim_{x \to -4} \frac{(2x-8)(x+4)}{(x+4)} = -16$$

   Kurva dari fungsi $f(x) = 2x^2 - 32)/(x + 4)$ tak lain adalah garis lurus (2x – 8) dengan titik (− 4, − 16) sebagai titik-yang-hilang.

F. Penerapan Ekonomi

Fungsi-fungsi dalam bisnis dan ekonomi banyak yang berbentuk fungsi asinambung. Bahkan sesungguhnya sebagian besar dari fungsi yang ada merupakan fungsi asinambung, terutama fungsi permintaan dan fungsi penawaran untuk jenis-jenis barang tertentu yang unit atau satuannya selalu diskrit (berupa bilangan bulat, tidak mungkin dipecah-pecah). Begitu pula fungsi biaya dan fungsi penerimaanya.

Penyinambungan fungsi-fungsi yang sesungguhnya asinambung atau diskrit memungkinkannya untuk ditelaah dengan berbagai alat analisis matematik. Namun demikian, dalam menafsirkan hasil analisisnya, kita harus senantiasa mengingat ketidaksinambungan yang tersirat. Sebagai contoh : meskipun secara matematik kita dapat menunjukkan berapa biaya untuk memproduksi 234,6 unit mobil, secara ekonomi yang harus kita permasalahkan adalah biaya untuk memproduksi 234 (atau 235) unit mobil.

Contoh:

Misalkan pemerintah menetapkan suatu sistem pajak-pendapatan progresif dengan ketentuan sebagai berikut:

10% terhadap pendapatan di bawah Rp 3 juta per bulan (Rp 36 juta per tahun)

15% terhadap pendapatan antara Rp 3 juta – Rp 6 juta per bulan (antara Rp 36 juta – Rp 72 juta per tahun

25% terhadap pendapatan melebih Rp 6 juta per bulan (> Rp 72 juta per tahun)

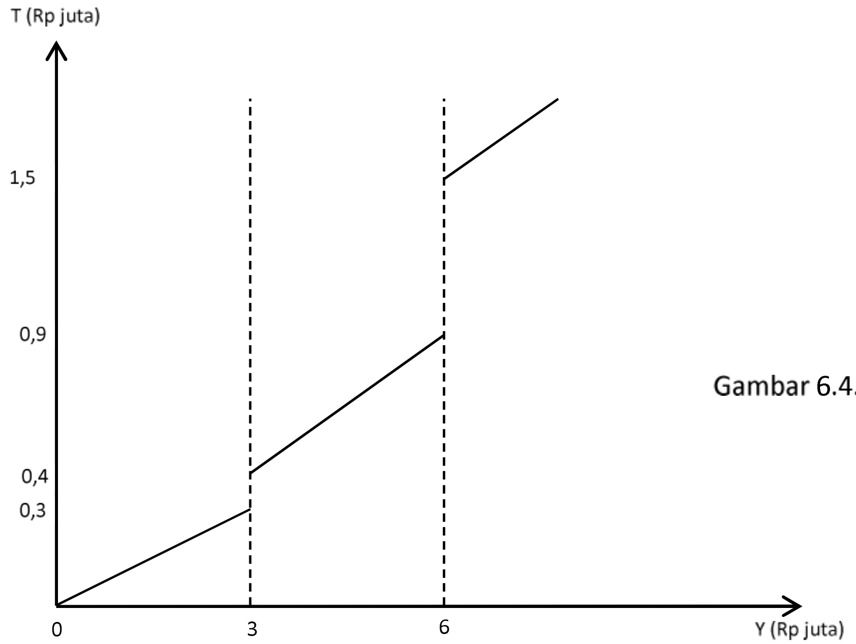
Apabila pendapatan dilambangkan dengan Y dan jumlah pajak yang ditawarkan adalah T, maka fungsi pajak pendapatannya dapat dituliskan sebagai:

$$T = 0{,}10Y \qquad 0 \le Y < 3$$

$$T = 0{,}15Y \qquad 3 \le Y \le 6$$

$$T = 0{,}25Y \qquad Y > 6$$

Apabila digambarkan, maka akan terlihat bahwa kurvanya akan asinambung di dua tempat, yaitu pada Y = 2,9999… dan pada Y = 6,000…1



Gambar 6.4.

Latihan:

1. $\lim_{x\to 2}(2x^2 - 3x + 1)$
2. $\lim_{x\to 3}(3x^4 - 2x^2 + 4x + 5)$
3. $\lim_{x\to 5}\sqrt{x-1}$
4. $\lim_{x\to 5}\left(\frac{x-1}{x-3}\right)$
5. $\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{(3x^2+2x-5)}{3}}$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{(3x^3+2x^2-5x+2)}{(x^3-2x^2)}$
7. $\lim_{x\to 0}\frac{(3x^3+4x-8)}{(5x^2+3x)}$
8. $\lim_{x\to \infty}\frac{(-x^2+4x-18)^4}{(5x+10x)^4}$
9. $\lim_{x\to \infty}\sqrt{\frac{(100x^2+14x-18)^4}{(x^2+10x)}}$
10. $\lim_{x\to \infty}\sqrt{(\frac{20x^2+4x-18)}{(4x^2+10x)}}$