BAB 3
DERET

Deret ialah rangkaian bilangan yang tersusun secara sistematis dan memenuhi kaidah-kaidah tertentu. Bilangan-bilangan yang merupakan unsur dan pembentuk sebuah deret dinamakan suku. Keteraturan rangkaian bilangan yng membentuk sebuah deret terlihat pada "pola perubahan" bilangan-bilangan tersebut dari satu suku ke suku berikutnya.

Dilihat dari jumlah suku yang membentuknya deret digolongkan atas deret berhingga dan deret tak berhingga. Yang dimaksud deret berhingga adalah deret yang jumlah suku-sukunya tertentu, sedangkan deret tak berhingga adalah deret yang jumlah suku-sukunya tidak terbatas. Sedangkan dilihat dari segi pola perubahan bilangan pada suku-sukunya, deret bisa dibeda-bedakan menjadi deret hitung, deret ukur dan deret harmoni.

A. Deret Hitung

Deret hitung ialah deret yang perubahan suku-sukunya berdasarkan penjumlahan terhadap sebuah bilangan tertentu. Bilangan yang membedakan suku-suku dari deret hitung ini dinamakan pembeda, yang merupakan selisih antara nilai-nilai dua suku yang berurutan.

Contoh:

- 4, 9, 14, 19, 24, 29 (pembeda = 5)
- 92, 82, 72, 62, 52 (pembeda = -10)
- 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 (pembeda = 2)

Besarnya nilai suku tertentu (ke-*n*) dari sebuah deret hitung dapat dihitung melalui suatu rumus. Dalam membentuk rumus yang dimaksud, kita pergunakan contoh di atas. Dalam contoh tersebut, nilai suku pertamanya (a) adalah 4 dan pembedanya (b) adalah 5.

4	9	14	19	24	29
S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6

$S_1 = 4 = a$

$S_2 = 9 = a + b = a + (2 - 1)b$

S_3 = 14 = a + 2b = a + (3 – 1)b

S_4 = 19 = a + 3b = a + (4 – 1)b

S_5 = 24 = a + 4b = a + (5 – 1)b

S_6 = 29 = a + 5b = a + (6 – 1)b

……

……

……

S_n = a + (n – 1)b

a : suku pertama

b : pembeda

n : indeks suku

berdasarkan rumus di atas, dengan mudah dan cepat dapat dihitung dengan mudah apabila mau menghitung nilai-nilai suku tertentu. Sebagai contoh, nilai suku ke-15, suku ke-27, suku ke – 32 dan suku ke- 42 dari contoh deret hitung ialah:

S_{15} = a + (n – 1)b = 4 + (15 – 1)5 = 4 + 70 = 74

S_{27} = a + (n – 1)b = 4 + (27 – 1)5 = 4 + 130 = 134

S_{32} = a + (n – 1)b = 4 + (32 – 1)5 = 4 + 155 = 159

S_{42} = a + (n – 1)b = 4 + (42 – 1)5 = 4 + 205 = 209

Hal yang sama dapat dilakukan pula pada contoh yang kedua dan ketiga, misalkan pada contoh yang kedua ingin dihitung berapa nilai suku ke-10, suku ke-15, dan suku ke-20, maka nilainya ialah:

S_{10} = a + (n – 1)b = 92 + (10 – 1)-10 = 92 - 90 = 2

S_{15} = a + (n – 1)b = 92 + (15 – 1)-10 = 92 - 140 = -48

S_{20} = a + (n – 1)b = 92 + (20 – 1)-10 = 92 - 190 = -98

Kemudian untuk contoh ketiga, misalkan ingin diketahui suku ke-24, suku ke- 45, suku ke-70 dan suku ke-90

S_{24} = a + (n – 1)b = 3 + (24 – 1)2 = 3 + 46 = 49

S_{45} = a + (n – 1)b = 3 + (45 – 1)2 = 3 + 88 = 91

S_{70} = a + (n – 1)b = 3 + (70 – 1)2 = 3 + 138 = 141

S_{90} = a + (n – 1)b = 3 + (90 – 1)2 = 3 + 178 = 181

Jumlah sebuah deret hitung sampai dengan suku tertentu tak lain adalah jumlah nilai suku-sukunya, sejak suku yang pertama (S_1 atau a) sampai dengan suku ke-n (S_n) yang bersangkutan.

$$\boldsymbol{J_n = \sum_{i=1}^{n} S_i = S_1 + S_2 + \cdots + S_n}$$

$$J_4 = \sum_{i=1}^{4} S_i = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$$J_5 = \sum_{i=1}^{5} S_i = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$$

$$J_6 = \sum_{i=1}^{6} S_i = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6$$

Berdasarkan rumus $S_n = a + (n – 1)b$, maka masing-masing S_i dapat diuraikan, sehingga akan menjadi sebagai berikut:

$J_4 = a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) = 4a + 6b$

$J_5 = a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + (a + 4b) = 5a + 10b$

$J_4 = a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + (a + 4b) + (a + 5b) = 6a + 15b$

Masing-masing J_i dapat disederhanakan atau ditulis ulang menjadi sebagai berikut:

$J_4 = 4a + 6b = 4a + \frac{4}{2}(4 – 1)b$

$J_5 = 5a + 10b = 5a + \frac{5}{2}(5 – 1)b$

$J_6 = 6a + 15b = 6a + \frac{6}{2}(6 – 1)b$

…..

…..

…..

$\mathbf{J_n = na +} \boldsymbol{\frac{n}{2}(n-1)b}$

Atau,

$\mathbf{J_n = \frac{n}{2}[2a + (n – 1)b]}$

Rumus $J_n = \frac{n}{2}[2a + (n – 1)b]$ dapat disederhanakan kembali menjadi:

$J_n = \frac{n}{2}[2a + (n – 1)b]$

$= \frac{n}{2}[a + a + (n – 1)b]$; misal: $S_n = a + (n-1)b$

$\mathbf{J_n = \frac{n}{2}(a + S_n)}$

Dengan demikian untuk menghitung jumlah sebuah deret hitung sampai dengan suku tertentu n, terdapat empat bentuk rumus yang dapat digunakan, yaitu:

$$\boldsymbol{J_n = \sum_{i=1}^{n} S_i = S_1 + S_2 + \cdots + S_n}$$

$$\mathbf{J_n = na + \frac{n}{2}(n-1)b}$$

$$\mathbf{J_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)b]}$$

$$\mathbf{J_n = \frac{n}{2}(a + S_n)}$$

Dalam kasus deret hitung pada contoh pertama, jumlahnya sampai dengan suku ke-15 adalah

$$J_{15} = \frac{15}{2}(4 + S_{15})$$
$$= 7,5\ (4 + 74)$$
$$= 585$$

B. Deret Ukur

Deret ukur ialah deret yang perubahan suku-sukunya berdasarkan perkalian terhadap sebuah bilangan tertentu. Bilangan yang membedakan suku-suku sebuah deret ukur dinamakan pengganda, yakni merupakan hasil bagi nilai suatu suku terhadap nilai suku di depannya.

Contoh:

- 4, 8, 16, 32, 64 (pengganda = 2)
- 3, 15, 75, 375, 1875 (pengganda = 5)
- 512, 256, 128, 64, 32 (pengganda = 0,5)

Untuk dapat membentuk rumus penghitungan suku tertentu dari sebuah deret ukur, dengan contoh pertama di atas dapat disajikan dalam bentuk:

$S_1 = 4 = a$

$S_2 = 8 = ap$ $= ap^{2-1}$

$S_3 = 16 = app$ $= ap^{3-1}$

$S_4 = 32 = appp$ $= ap^{4-1}$

….
….
….

$S_n = a.p^{n-1}$

Dimana:

a ialah suku pertama

p ialah pengganda

n ialah indeks suku

berdasarkan rumus di atas, nilai suku ke-6 dalam contoh di atas masing-masing ialah:

- $S_6 = (4)\ (2)^{6-1} = 128$
- $S_6 = (3)\ (5)^{6-1} = 9375$
- $S_6 = (512)\ (0,5)^{6-1} = 16$

Seperti halnya dalam deret hitung, jumlah sebuah deret ukur sampai dengan suku tertentu adalah jumlah nilai suku-sukunya sejak suku pertama sampai dengan suku ke-n yang bersangkutan

$$\boldsymbol{J_n = \sum_{i=1}^{n} S_i = S_1 + S_2 + \cdots + S_n}$$

Berdasarkan $S_n = ap^{n-1}$, maka masing-masing S_i dapat dijabarkan sehingga:

$$J_n = a + ap + ap^2 + ap^3 + \ldots + ap^{n-2} + ap^{n-1}$$

Apabila persamaan di atas dikalikan dengan pengganda p, maka

$$pJ_n = ap + ap^2 + ap^3 + ap^4 + \ldots + ap^{n-1} + ap^n$$

dengan mengurangkan persamaan kedua dari persamaan pertama, diperoleh selisih antara kedua persamaan ini yaitu:

$$J_n - pJ_n = a - ap^n$$

$$J_n\ (1 - p) = a(1 - p^n)$$

Sehingga dapat dibentuk rumus jumlah deret ukur sampai dengan suku ke-n:

$$\boldsymbol{J_n = \frac{a(1-p^n)}{1-p}}\ , atau$$

$$\boldsymbol{J_n = \frac{a(p^n-1)}{p-1}}$$

Dalam hal $|\ p\ | < 1$, penggunaan rumus yang pertama akan lebih mempermudah perhitungan. Sedangkan jika $|\ p\ | > 1$, rumus yang kedua akan lebih mempermudah dalam penghitungan.

Pada contoh deret ukur yang pertama, dimana a = 4 dan p = 2, maka jumlahnya sampai dengan suku ke-15 adalah:

$$J_{15} = \frac{4(2^{15}-1)}{2-1} = \frac{4\ (32767)}{1} = 131068$$

Sedangkan pada contoh ketiga, dimana a = 512 dan p =0,5, maka jumlahnya sampai dengan suku ke-10 adalah:

$$J_{10} = \frac{512\,(1-0{,}5^{10})}{1-0{,}5} = \frac{512\,(\frac{1023}{1024})}{0{,}5} = 1023$$

C. Penerapan Ekonomi

1. Bunga Sederhana/tunggal

Bunga dalam teori bisnis merupaka suatu balas jasa yang dibayarkan bilamana kita menggunakan uang, nasabah membayar bunga kepada pihak bank yang meminjamkan uang. Dana yang diperoleh dari hasil pinjaman disebut juga dari sisi nasabah sebagai pinjaman pokok. Sehingga bunga dapat dilihat sebagai pendapatan, namun dapat pula dilihat sebagai biaya. Jika hanya pokok yang berbunga selama masa transaksi, bunga yang harus dibayar pada akhir tempo dikatakan bunga tunggal.

Misalkan P adalah pinjaman atau investasi dan i adalah tingkat suku bunga tahunan, maka pendapatan bunga pada akhir tahun pertama adalah P_I dan jumlah dari P adalah $(P + P_i)$, sedangkan pada akhir tahun kedua nilai akumulasinya adalah P + P(2i) dan seterusnya sampai akhir tahun ke-n, nilai akumulasinya adalah $P + P_{in}$. Secara sederhana dapat ditulis sebagai berikut:

I = P.i.n

Dimana:

I ialah pendapatan bunga

P ialah pinjaman pokok (investasi)

i ialah tingkat bunga tahunan

n ialah jumlah tahunan (waktu)

Adapun jumlah akumulasi selama n tahun dengan modal awal P, dinyatakan dengan persamaan:

Fn = P + P.i.n atau **Fn = P (1 + i.n)**

Bunga tunggal dapat dibagi menjadi: (a) bunga tunggal sebenarnya, yaitu yang dihitung dengan mengasumsikan bahwa satu tahun adalah 365 hari (366 hari untuk tahun kabisat); (b) bunga tunggal biasa yang dihitung dengan dasar satu tahun dihitung 360 hari. Penggunaan 360 hari dalam satu tahun sangat menyederhanakan perhitungan, juga pertambahan dari bunga.

- Jika besarnya pinjaman seseorang sejumlah Rp 50.000.000,- dengan tingkat bunga yang dikenakan adalah sebesar 12% per tahunnya, maka berapakah nilai secara keseluruhan jika pinjaman tersebut harus dikembalikan dalam waktu 5 tahun?

Jawab:

Diketahui : P = 50.000.000

i = 12%

Maka,

Bunga per tahun ialah I = P_{in}

Pendapatan bunga = (50.000.000) (0.12) = Rp 6.000.000,-

Bunga selama 5 tahun ialah Rp 6.000.000, - x 5 = Rp 30.000.000,-

Nilai yang terakumulasi selama 5 tahun:

Fn = P + P.i.n

= 50.000.000,- + Rp 30.000.000

= Rp 80.000.000,-

Maka jumlah pinjaman nasabah yang diakumulasi selama 5 tahun ialah sebesar Rp 80.000.000,-

- Tentukan bunga tunggal sebenarnya dan bunga tunggal biasa dari dana yang dipinjam sebesar Rp 2.000.000 untuk 50 hari dengan bunga 5%?

Jawab:

Bunga tunggal sebenarnya, dihitung dengan menganggap satu tahun adalah 365 hari, sehingga $n = \frac{50}{365} = \frac{10}{73}$, sehingga

Fn = 2.000.000 (0,05) $(10/73)$ = Rp 13.698,-

Kemudian, jika menggunakan bunga tunggal biasa yang menganggap satu tahun adalah 360 hari, sehingga $n = \frac{50}{360} = \frac{5}{36}$, sehingga

Fn = 2.000.000 (0,05) $(5/36)$ = Rp 13.899,-

Bagaimana jika tanggal jatuh tempo telah ditetapkan, yang menjadi pertanyaan berikutnya ialah bagaimana kita menentukan jumlah hari dimana bunga dihitung? Dalam menghitung jumlah hari dimana bunga dihitung dapat dicari dengan dua cara, yaitu:

a. Waktu sebenarnya, yaitu dhitung menurut hari yang sebenarnya dari seluruh jumlah hari dalam kalender. Dalam hal ini satu dari dua tanggal yang diberikan tidak dihitung;
b. Waktu pendekatan, dicari dengan menganggap bahwa tiap bulan terdiri dari 30 hari.

- Tentukan bunga tunggal sebenarnya dan bunga tunggal biasa apabila seseorang meminjam dana sebesar Rp 20.000.000 untuk 6% dari 20 April 2013 sampai 1 Juli 2013 dengan menggunakan waktu sebenarnya dan waktu pendekatan:

Jawab:

Waktu sebenarnya adalah 10 + 31 + 30 + 1 = 72 hari

Waktu pendekatan adalah 10 + 30 + 30 + 1 = 71 hari

Bunga tunggal sebenarnya adalah:

Fn = $20.000.000\ (0{,}06)(72/365) =$ Rp 236.712,-

Fn = $20.000.000\ (0{,}06)(71/365) =$ Rp 233.424,-

Bunga tunggal biasa adalah:

Fn = $20.000.000\ (0{,}06)(72/360) =$ Rp 240.000,-

Fn = $20.000.000\ (0{,}06)(71/360) =$ Rp 236.667,-

Metode yang paling sering dipergunakan ialah bunga tunggal biasa untuk waktu sebenarnya. Bagi bank komersil, ini disebut sebagai *banker's rule*. Karena ini merupakan bunga maksimum dalam berbagai transaksi.

Salah satu hal yang menjadi aplikasi dalam penggunaan bunga tunggal ialah promes. Promes adalah janji yang ditulis oleh debitur untuk membayar atau kesanggupan membayar kepada kreditur untuk sejumlah uang, dengan atau tanpa bunga, pada suatu tanggal tertentu. (Sembiring, dkk, 2005)

Untuk surat perjanjian tanpa tambahan bunga, maka nilai awal sama dengan nilai akhir. Dalam buku ini nilai akhir dari promes ditentukan dengan menggunakan: (a) waktu pendekatan jika temponya dalam bulan; (b) waktu sebenarnya jika temponya diberikan dalam hari.

- Berapa danakah yang harus seseorang investasikan hari ini dengan tingkat bunga sebesar 5%, dan dana ini akan menjadi sebesar Rp 10.000.000 dalam waktu 8 bulan?

Jawab:

Kita dapat mencari nilai tunai untuk return sebesar 5% dari dana sebesar Rp 100 juta pada waktu jatuh tempo dalam waktu 8 bulan.

Pn = $\frac{100.000.000}{1+(0{,}05)(8/12)} =$ Rp 96.805.421,-

Dana yang harus disediakan ialah sebesar Rp 96.805.421,-

2. Diskonto Tunggal

Nilai tunai dari uang yang berasal dari sejumlah uang yang dibayar pada hari yang berlainan dapat diinterpretasikan sebagai nilai diskonto.

- Tentukan nilai tunai untuk bunga tunggal 6% dari dana sebesar Rp 15.000.000 yang harus dibayar dalam 9 bulan. Berapakah diskonto sebenarnya?

Jawab:

$$Pn = \frac{15.000.000}{1+(0{,}06)(\frac{9}{12})} = \text{Rp } 14.354.066,-$$

Laju pertambahan diskonto didefinisikan sebagai perbandingan antara diskonto yang diberikan dalam suatu unit waktu terhadap sejumlah diskonto yang diberikan. Laju pertambahan diskonto tahunan dinyatakan dalam bentuk prosentase.

Suatu piutang dapat dijual sekali atau beberapa kali sebelum jatuh tanggal pembayarannya. Setiap pembeli memberikan diskonto dari nilai akhir perjanjian untuk waktu dari tanggal dijual sampai waktu jatuh tempo dengan suatu laju diskonto. Biasanya hal ini acap kali dilakukan pada produsen yang membutuhkan dana kas untuk produksi namun masih memiliki piutang di sejumlah distributor/agen yang mengambil barang kepadanya, sehingga piutang tersebut dijual kepada lembaga keuangan agar produsen tersebut dapat memiliki dana segar untuk berproduksi.

- Tentukan berapakah nilai diskonto dari suatu promes yang memiliki nilai sebesar Rp 30 juta serta jatuh tempo 8 bulan, apabila promes tersebut telah dijual pada bulan ke-5 dengan tingkat bunga sebesar 4% dan diskonto 8%.

Jawab:

Nilai akhir pada 8 bulan = 30.000.000 (1 + (0.04) (8/12)) = Rp 30.080.000,-

Apabila dijual pada bulan ke-5 dengan tingkat diskonto sebesar 8%, maka

Nilai diskonto = (30.080.000) (0,08) (5/12) = 1.002.667,-

Maka harga jual dari promes tersebut pada bulan ke-5 ialah:

Harga tunai = 30.080.000 – 1.002.667 = 29.077.333

- Suatu promes untuk 3 bulan sebesar Rp 10.000.000,- tertanggal 5 Mei dan jatuh tempo pada 5 Agustus telah dijual pada 26 Juni sebesar 6%. Tentukan perolehannya?

Jawab:

Tanggal pembayaran pada 5 Agustus dan nilai jatuh tempo sebesar Rp 10 juta. Tempo dari diskonto (dari 26 Juni sampai 5 Agustus) adalah 40 hari

Diskontonya adalah: 10 juta (0,06) (40/360) = Rp 66.667,-

Maka nilai perolehan dari promes tersebut pada 26 Juni adalah:

= 10.000.000 – 66.667 = 9.933.333,-

3. Bunga Majemuk

Bunga majemuk dapat diartikan sebagai perhitungan modal awal yang diakumulasikan dengan nilai bunga selama kurun waktu tertentu. Misalkan suatu investasi dari P rupiah pada tingkat bunga i per tahun, maka pendapatan bunga pada tahun pertama adalah P_i. Sedangkan pendapatan bunga pada tahun kedua, modal awal P sudah ditambahkan dengan tingkat suku bunga i, sehingga nilai uang pada akhir tahun pertama (masuk ke tahun kedua), menjadi:

$$P + P_i = P(1 + i)$$

Dan pada akhir tahun kedua (masuk tahun ketiga), menjadi:

$$\begin{aligned} P(1 + i) + P(1 + i)i &= P + P_i + P_i + P_i^2 \\ &= P_i^2 + 2P_i + P \\ &= P(1 + i)^2 \end{aligned}$$

Modal awal pada awal tahun ketiga, menjadi: $P(1 + i)^2\, i$, dan seterusnya sehingga pada awal tahun ke-n, modal awal dapat dituliskan menjadi:

$$\mathbf{F_n = P\,(1 + i)^n}$$

Dimana:

F_n ialah modal awal pada awal tahun ke-n

P ialah investasi

i ialah tingkat suku bunga

n ialah jumlah periode pinjaman

- Jika seseorang meminjam dana untuk tambahan modal usaha sebesar Rp 50.000.000,- kepada suatu lembaga keuangan konvensional dengan tingkat suku bunga yang dikenakan adalah sebesar 12% per tahun, dengan jangka waktu selama 5 tahun. Hitunglah berapa besarnya akumulasi pinjaman yang harus dibayarkan sampai dengan tahun ke-5?

Jawab:

Diketahui: P = 50.000.000

i = 12%

n = 5 tahun

$F_n = P (1 + i)^n$

$F_n = 50.000.000 (1 + 0.12)^5$

$F_n = 88.117.084,16$

Sehingga akumulasi pinjaman yang harus dibayarkan oleh nasabah tersebut sampai dengan akhir tahun ke-5 ialah sebesar Rp 88.117.084,16

Apabila pembayaran bunga majemuk dilakukan per periode (dapat secara kuartal, bulanan, dan/atau semesteran), dapat dituliskan menjadi:

$$F_n = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm}$$

Dimana:

F_n ialah nilai uang di masa yang akan dating

P ialah nilai awal

i ialah tingkat suku bunga per tahun

m ialah frekuensi pembayaran bunga dalam setahun

n ialah jangka waktu

Dengan contoh diatas, apabila pembayaran dilakukan setiap bulan, maka m = 12

$$F_n = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm}$$

$$F_n = 50.000.000\left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{12.5}$$

$F_n = 90.834.834,93$

Sehingga akumulasi pinjaman yang harus dibayarkan oleh nasabah dengan metode pembayaran dilakukan secara per bulan sampai dengan tahun ke-5 ialah sebesar Rp 90.834.834,92

Selanjutnya bagaimana jika pembayaran dilakukan tiap semester, maka m = 2

$$F_n = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm}$$

$$F_n = 50.000.000\left(1 + \frac{0.12}{2}\right)^{2.5}$$

$F_n = 89.542.384,83$

Akumulasi pinjaman yang harus dibayarkan ialah sebesar Rp 89.542.384,83

- Saldo tabungan seorang nasabah bank “ABC” sebesar Rp 532.400,-. Jika tingkat bunga bank yang berlaku ialah 10% per tahun (bunga diasumsikan konstan), berapa besarnya tabungan nasabah tersebut pada tiga tahun sebelumnya?

  F = 532.400

  n = 3

  i = 10%

  $P = \frac{1}{(1+i)^n} F$

  $P = \frac{1}{(1+0.1)^3} 532.400$

  = 400.000,-

Jadi besarnya tabungan mahasiswa tersebut pada tiga tahun sebelumnya dengan tingkat bunga 10% per tahun ialah sebesar Rp 400.000,-

- Seseorang menerima pembayaran pinjaman Rp 4.000.000,- atas pinjaman yang diberikan sebesar Rp 250.000,- beberapa tahun yang lalu. Jumlah sebanyak itu ia terapkan sebagai konsekuensi dari tingkat bunga 100% yang ditetapkan oleh orang tersebut. Berapakah jangka waktu pinjaman yang diberikan tersebut?

Jawab:

F_n = 4.000.000

P = 250.000

i = 100% = 1

$F_n = P (1 + i)^n$

$4.000.000 = 250.000 (1 + 1)^n$

$16 = 2^n$

$2^n = 16$

$\log 2^n = \log 16$

$n \log 2 = \log 16$

$n = \frac{\log 16}{\log 2} = \frac{1,2041}{0,3010} = 4$

Jadi jangka waktu pinjaman yang diberikan selama 4 tahun.

4. Potongan Harga (Diskon)

Potongan harga atau diskon adalah pengurangan dari harga yang tertulis dalam faktur. Pada umumnya potongan selalu dinyatakan dalam bentuk presentase dari harga bruto.

Contoh:

Jika harga bruto dari mesin cuci adalah Rp 3.650.000,- dan potongan harganya adalah 40%. Berapakah harga netto faktur?

Jawab:

Potongan harga adalah 3.650.000 (0,40) = 1.460.000,-

Harga faktur netto = harga bruto – potongan harga

Harga netto = 3.650.000 – 1.460.000 = 2.190.000,-

Selain menggunakan cara tersebut diatas, dapat pula diselesaikan dengan cara berikut, yaitu:

Potongan 40% dari nilai bruto memberikan sisa (1 – 0,40) = 0,60 atau 60% dari harga bruto.

Harga faktur = 3.650.000 (0,60)
= 2.190.000,-

Lalu bagaimanakah jika terdapat dua atau lebih potongan harga yang diberikan oleh penjual kepada pembeli. Hal ini banyak kita lihat di pusat perbelanjaan yang misalnya memberikan potongan harga 20% ditambah lagi dengan 10%, jika seperti ini bagaimanakah cara menghitungnya? Cara menghitungnya ialah harus dihitung secara berurutan.

Contoh:

Jika suatu perusahaan "CV RIDHA" yang menjual furniture memberikan potongan harga Ramadhan berturut-turut yaitu 20%, 10%, dan 5%. Tentukanlah harga faktur untuk pembelian jika diketahui harga pembelian bruto adalah sebesar Rp 1.950.000,-

Jawab:

Penyelesaian pertama:

Harga bruto = 1.950.000

Potongan pertama = 1.950.000 (0,20) = 390.000

Sisa pertama = 1.950.000 – 390.000 = 1.560.000

Potongan kedua = 1.560.000 (0,10) = 156.000

Sisa kedua = 1.560.000 – 156.000 = 1.404.000

Potongan ketiga = 1.404.000 (0,05) = 70.200

Sisa ketiga = 1.404.000 – 70.200 = 1.333.800,-

Sehingga harga faktur ialah sebesar 1.333.800,-

Penyelesaian kedua:

Harga bruto = 1.950.000

Sisa pertama = 1.950.000 (0,80) = 1.560.000

Sisa kedua = 1.560.000 (0,90) = 1.404.000

Sisa ketiga = 1.404.000 (0,95) = 1.333.800,-

5. Depresiasi (Penyusutan)

Depresiasi atau penyusutan ialah hilangnya nilai dari aktiva tetap (bangunan atau mesin) selama dipakai. Dalam hal untuk mengembalikan aktiva pada akhir umur ekonomisnya, perusahaan akan menaruh sebagian dari keuntungannya tiap tahun sebagai beban penyusutan. Setiap saat jumlah perbedaan antara nilai perolehan dengan jumlah biaya penyusutan dinamakan dengan nilai buku (*book value*) dari aktiva/aset. Pada akhir umur kegunaan, nilai buku dari aset adalah merupakan nilai sisa.

Dalam metode yang sederhana untuk perhitungan penyusutan, dinamakan metode garis lurus yang sama dengan penyimpanan tahunan selama umur ekonomis dari aset yang dianggap sebagai biaya penyusutan.

Contoh:

Mesin dengan harga perolehan Rp 10.000.000,- ditaksir memiliki umur ekonomis selama 4 tahun dan nilai sisa Rp 2.000.000,-. Tentukan penyusutan rata-rata tahunan.

Jawab:

Total penyusutan = harga perolehan – nilai sisa

= 10.000.000 – 2.0000.000

= 8.000.000,-

Penyusutan rata-rata tahunan = $\frac{8.000.000}{4} = 2.000.000$

Metode dalam menentukan penyusutan tahunan merupakan suatu hal yang penting untuk dibahas. Misal, penyusutan dari aset untuk tahun pertama pemakaian sering lebih besar dibandingkan dengan penyusutan tahun kedua, demikian pula penyusutan tahun kedua lebih besar daripada penyusutan tahun ketiga, demikian seterusnya.

Daftar penyusutan dari suatu mesin dapat dijelaskan sebagai berikut. Metode prosentase tetap dari suatu objek, dengan asumsi bahwa penyusutan dihitung pada tiap akhir tahun yang dinyatakan dalam prosentase tetap dari nilai buku pada permulaan tahun.

Misal suatu aset memiliki nilai awal H dan nilai sisa S, dan perkiraan umur ekonomis adalah *n* tahun. Jika p adalah prosentase tetap per-tahun. Maka pada akhir tahun pertama beban penyusutan adalah Hp dan nilai bukunya adalah H – Hp = H (1 – p). Pada akhir tahun kedua, penyusutan adalah H (1- p)p dan nilai bukunya adalah H(1 – p) – H (1 – p)p = H (1 – p) (1-p) = H $(1 – p)^2$.

Nilai buku selama umur pemakaian aset adalah merupakan suku-suku dari deret geometri:

$H(1 – p), H (1 – p)^2, H(1 – p)^3$

Karenanya pada akhir tahun ke-*n*, nilai bukunya:

$H(1 – p)^n = S$

Nilai dari p, atau laju penyusutan mungkin merupakan nilai estimasi (perkiraan) atau mungkin ditentukan dari rumus di atas.

Contoh:

Suatu mesin memiliki harga perolehan sebesar Rp 4.800.000,- dan diperkirakan memiliki umur ekonomi sampai 6 tahun dan memiliki nilai sisa sebesar Rp 360.000,-. Tentukan laju penyusutan dan buatlah daftar penyusutannya.

Jawab:

H = 4.800.000,- S = 360.000,-, *n* = 6

Dengan menggunakan rumus $H(1 – p)^n = S$

$4.800.000(1 – p)^6 = 360.000$

$$(1-p)^6 = \frac{360.000}{4.800.000}$$

$$(1-p)^6 = 0{,}075$$

6 log (1 – p) = log 0,075 = 8,875061 – 10

log (1 – p) = 9,812510 – 10

1 – p = 0,6494

p = 0,3506

p = 35,06%

Dalam daftar, nilai buku akhir tahun pertama, kedua, dan ke-*n* tahun dapat dihitung dari rumus H(1 – p), H $(1 - p)^2$, H$(1 - p)^3$, dst.

Tahun ke-1 4.800.000 (0,6494) = 3.117.120

Tahun ke-2 4.800.000 $(0{,}6494)^2$ = 2.024.257

Tahun ke-3 4.800.000 $(0{,}6494)^3$ = 1.314.552

dst

Penyusutan untuk berbagai tahun adalah berbeda antara nilai buku tahun itu dengan tahun yang lain. Jumlah cadangan penyusutan pada akhir tahun adalah merupakan jumlah beban penyusutan yang mencakup tahun tersebut atau sama dengan selisih antara nilai awal dengan nilai buku saat itu.

(dalam ribuan rupiah)

Umur	Nilai buku pada akhir tahun	Beban penyusutan	Jumlah cadangan penyusutan
0	4800,00		
1	3117,12	1682,88	1682,88
2	2024,26	1092,86	2775,74
3	1314,55	709,71	3485,45
4	853,67	460,88	3946,45
5	554,37	299,30	4245,63
6	360,00	194,37	4440,00

6. Model Perkembangan Usaha

Jika perkembangan variabel-variabel tertentu dalam kegiatan usaha –misalnya produksi, biaya, pendapatan, penggunaan tenaga kerja, atau penanaman modal- yang memiliki pola seperti deret hitung, maka prinsip-prinsip deret hitung dapat digunakan untuk menganalisis perkembangan variabel tersebut.

- Perusahaan bata “Sumber Jaya” menghasilkan 5.000 buah bata pada bulan pertama produksinya. Dengan penambahan tenaga kerja dan peningkatan produktivitas, perusahaan mampu menambah produksi sebanyak 500 buah bata setiap bulan. Jika perkembangan produksinya diasumsikan konstan, Hitunglah: a) Berapa buah bata yang dihasilkannya pada bulan keenam? b) Serta berapa jumlah akumulasi bata yang telah dihasilkan sampai dengan bulan keenam?

Jawab:

Diketahui:

$a = 5.000$

$b = 500$

$n = 6$

$S_6 = 5.000 + (6 - 1)500$

$= 7.500$

Sehingga produksi yang dihasilkan pada bulan keenam ialah 7.500 buah bata

Kemudian jumlah akumulasi produksi bata sampai dengan bulan keenam ialah:

$J_6 = \frac{6}{2}(5000 + 7.500)$

$= 37.500$

Sehingga akumulasi produksi bata yang dihasilkan dari bulan pertama sampai dengan bulan keenam ialah sebesar 37.500 bata

a) Pendapatan Toserba “Ananda” yang berasal dari penjualan barangnya pada tahun ke-5 sebesar Rp 720.000.000,- dan pada tahun ke-7 ialah sebesar Rp 980.000.000, jika pendapatan berpola deret hitung. Hitunglah: a) Berapa pendapatan per tahun? B) Berapa besar penerimaan pada tahun pertama? c) Pada tahun keberapa pendapatan Toserba Anada sebesar Rp 1,37 milyar?

Jawab: (dalam jutaan rupiah)

$S_n = a + (n - 1)b$

$S_7 = 980 \rightarrow a + (7 - 1)b = 980$

$= a + 6b = 980$

$S_5 = 720 \rightarrow a + (5 - 1)b = 720$

$= a + 4b = 720$

Kemudian dilakukan eliminasi:

$$\begin{array}{l} a + 6b = 980 \\ \underline{a + 4b = 720}\ \_ \\ \quad 2b = 260 \rightarrow b = 130 \end{array}$$

maka besarnya pendapatan per tahun yang mampu dihasilkan oleh Toserba "Ananda" ialah sebesar Rp 130.000.000,-

Kemudian nilai b dimasukkan pada salah satu persamaan di atas

$$a + 4b = 720$$
$$a = 720 – 4 (130)$$
$$a = 200$$

Maka, besarnya pendapatan yang mampu dihimpun oleh Toserba "Ananda" pada tahun pertamanya ialah sebesar Rp 200.000.000,-

Kemudian pendapatan sebesar Rp 1, 37 milyar mampu didapat pada tahun:

$$\begin{array}{ll} S_n & = a + (n – 1)b \\ 1.370 & = 200 + (n – 1)130 \\ 1.370 & = 200 + 130n – 130 \\ 1.370 & = 70 + 130n \\ 1.300 & = 130n \\ n & = 1300/130 \rightarrow n = 10 \end{array}$$

Maka pendapatan sebesar Rp 1,37 milyar mampu didapat pada tahun ke-10.

- Pabrik mie instan "Lezat" menghasilkan sejuta bungkus mie instan pada tahun pertama berdirinya, dan 1,6 juta bungkus pada tahun ketujuh. Andaikan perkembangan produksinya konstan. a) berapa tambahan produksinya per tahun? b) Berapa produksinya pada tahun kesebelas? c) pada tahun ke berapa produksinya akan mencapai 2,5 juta bungkus? d) berapa bungkus mie instan yang akan dihasilkan sampai dengan tahun ke-16?

Jawab:

$$a = 1.000.000$$
$$S_7 = 1.600.000$$
$$S_7 = a + (7 – 1)b = 1.600.000$$
$$a + 6b = 1.600.000$$
$$6b = 1.600.000 – a$$

$6b = 1.600.000 - 1.000.000$

$6b = 600.000 \rightarrow b = 100.000$

a) Tambahan produksinya per tahun ialah 100.000 bungkus mie instan

b) Produksi pada tahun kesebelas ialah:

$S_{11} = a + (11 - 1)b$

$= 1.000.000 + (10)\ 100.000 = 2.000.000$ bungkus mie instan

c) Produksi sebesar 2,5 juta bungkus

$S_n = a + (n - 1)b$

$2.500.000 = 1.000.000 + (n - 1)\ 100.000$

$2.500.000 = 1.000.000 + 100.000n - 100.000$

$1.600.000 = 100.000n \rightarrow n = 16$

d) Jumlah mie instan yang telah dihasilkan sampai dengan tahun ke-16

$$J_{16} = \frac{16}{2}(1\ juta + 2{,}5\ juta)$$

$$J_{16} = 8(3{,}5\ juta)$$

= 28 juta bungkus mie instan

7. Model Pertumbuhan Penduduk

Penerapan deret ukur yang paling konvensional di bidang ekonomi adalah dalam hal menaksir jumlah penduduk. Dalam teori Malthus, penduduk dunia tumbuh mengikuti pola deret ukur. Secara matematik dapat dirumuskan sebagai:

$P_t = P_0 R^{t-1}$

Dengan $R = 1 + r$

Dimana

P_0 ialah jumlah penduduk pada tahun pertama

P_t ialah jumlah penduduk pada tahun ke-t

r ialah persentase pertumbuhan penduduk per tahun

t ialah indeks waktu (tahun)

- Misalkan penduduk di kota Jakarta berjumlah sebesar 5 juta jiwa pada tahun 2010, tingkat pertumbuhan penduduk sebesar 2 persen per tahun. Hitunglah jumlah penduduk kota Jakarta pada tahun 2025. Jika mulai tahun 2025 pertumbuhannya meningkat menjadi 3 persen per tahun, berapakah jumlah penduduk 10 tahun kemudian?

Jawab:

P_0 = 5 juta

r = 0,02 → R = 1,02

Maka penduduk pada tahun 2025 ialah:

P_{2025} = 5juta $(1{,}02)^{15}$

= 6.729,341 jiwa

Jumlah penduduk di Jakarta pada tahun 2025 dengan asumsi pertumbuhan penduduk konstan 2% per tahun ialah sebesar 6.729.341 jiwa

Kemudian jumlah penduduk 10 tahun kemudian, apabila persentase pertumbuhan penduduk meningkat menjadi 3% per tahun ialah:

P_{2035} = 6.729.341 $(1{,}03)^{10}$

= 9.043.671 jiwa

Jumlah penduduk di kota Jakarta pada sepuluh tahun kemudian (atau tahun 2035) dengan asumsi pertumbuhan penduduk setelah tahun 2025 meningkat menjadi 3% per tahun ialah sebesar 9.043.671 jiwa

Atau dengan memanfaatkan kaidah logaritma dapat diperoleh:

P_{2035} = 6.729.341 $(1{,}03)^{10}$

log P_{2035} = log 6.729.341 $(1{,}03)^{10}$

log P_{2035} = log 6.729.341 + 10 log 1,03

log P_{2035} = 6,827972536 + 0,128372247

log P_{2035} = 6,956344783

P_{2035} = 9.043.671 jiwa

- Penduduk di suatu kota di Sulawesi tercatat 2,5 juta jiwa pada tahun 2002 dan diperkirakan menjadi 3 juta jiwa pada tahun 2006. Jika tahun 2000 dianggap merupakan tahun basis. a) berapa persen tingkat pertumbuhannya? b) berapa jumlah penduduknya pada tahun 2000? c) berapa pula jumlah pada tahun 2011? Pada tahun berapa penduduknya berjumlah 5 juta jiwa?

Jawab:

Pada contoh ini tahun 2000 = tahun ke-1; tahun 2002 = tahun ke-3, 2006 = tahun ke-7, dan 2011 = tahun ke-12

a) $\left.\begin{aligned} P_7 = P.r^6 &= 3 \text{ juta} \\ P_3 = P.r^2 &= 2{,}5 \text{ juta} \end{aligned}\right\}$ $r^4 = 1{,}2$, $r = \sqrt[4]{1{,}2} = 1{,}0466$

Tingkat pertumbuhan penduduknya = r – 1 = 0,0466 = 4,66%

b) $P_3 = P.r^2 \rightarrow P = \frac{P_3}{r_2} = \frac{2.500.000}{1.0954} = 2.282.271$

Jumlah penduduknya pada tahun 1990 = 2.282.271 jiwa

c) Penduduk pada tahun 2011

$P_{12} = P.r^{11} \rightarrow \quad P_{12} = 2.282.271\ (1{,}0466)^{11}$

$\log P_{12} = \log 2.282.271\ (1{,}0466)^{11}$

$\log P_{12} = \log 2.281.271 + 11 \log (1{,}0466)$

$\log P_{12} = 6{,}3583 + 11\ (0{,}0195)$

$\log P_{12} = 6{,}5728 \rightarrow P_{12} = 3.739.383$ jiwa

d) Tahun pada saat penduduk berjumlah 5 juta jiwa

$P_n = P.r^{n-1}$

$5.000.000 = 2.282.271\ (1{,}0466)^{n-1}$

$(1{,}0466)^{n-1} = 2{,}19$

$\log (1{,}0466)^{n-1} = \log 2{,}19$

$(n-1) \log (1{,}0466) = \log 2{,}19$

$(n – 1)\ (0{,}0195) = 0{,}3404$

$n – 1 = 17{,}45$

$n = 18{,}45$

Penduduk kota tersebut akan mencapai ± 5 juta jiwa akan tejadi pada tahun ke-18, yaitu pada tahun 2017.

Latihan Soal

1. Hitunglah bunga sederhana dari masing-masing informasi di bawah ini:
   a. P = Rp 20.000.000,-; n = 4 tahun; i = 12% per tahun
   b. P = Rp 35.000.000,-; n = 7 tahun; i = 15% per tahun
2. Hitunglah nilai uang dari masa yang akan datang dengan menggunakan pola majemuk dari masing-masing informasi di bawah ini:
   a. P = Rp 20.000.000,-; n = 4 tahun; i = 12% per tahun
   b. P = Rp 35.000.000,-; n = 7 tahun; i = 15% per tahun
3. Hitunglah nilai uang di masa yang akan datang jika pembayarannya dilakukan seperti di bawah ini:

   P = Rp 20.000.000,-; n = 4 tahun; i = 12% per tahun
   - Pembayaran dilakukan setiap bulan
   - Pembayaran dilakukan setiap kuartal
   - Pembayaran dilakukan setiap semester
   - Pembayaran dilakukan tiap tahun
4. Hitunglah nilai uang di masa yang akan datang jika pembayarannya dilakukan seperti di bawah ini

   P = Rp 35.000.000,- ; n = 7 tahun; i = 15% per tahun
   - Pembayaran dilakukan setiap bulan
   - Pembayaran dilakukan setiap kuartal
   - Pembayaran dilakukan setiap semester
   - Pembayaran dilakukan tiap tahun
5. Suatu promes dengan jangka waktu 6 Mulai sebesar Rp 250.000.000,- dengan bunga sebesar 6% dengan tanggal awal promes adalah 20 Maret dan tanggal jatuh tempo adalah 20 September didiskontokan pada tanggal 7 Juli sebesar 5%. Hitunglah nilai perolehan dari promes tersebut pada tanggal 7 Juli?
6. Tentukan jumlah uang yang seharusnya diinvestasikan supaya mencapai nilai investasinya sebesar Rp 15.000.000,- pada akhir tahun k-3, dengan tingkat bunga sebesar 12% per tahun, dengan menggunakan bunga majemuk secara:
   - Pembayaran *return* dilakukan setiap bulan
   - Pembayaran *return* dilakukan setiap kuartal
   - Pembayaran *return* dilakukan setiap semester

- Pembayaran *return* dilakukan setiap tahun

7. Tentukan jumlah uang yang seharusnya diinvestasikan supaya mencapai nilai investasinya sebesar Rp 100.000.000,- pada akhir tahun k-5, dengan tingkat bunga sebesar 10% per tahun, dengan menggunakan bunga majemuk secara:
    - Pembayaran *return* dilakukan setiap bulan
    - Pembayaran *return* dilakukan setiap kuartal
    - Pembayaran *return* dilakukan setiap semester
    - Pembayaran *return* dilakukan setiap tahun
8. Jika penduduk di Propinsi Jawa Timur berjumlah sebesar 25 juta jiwa pada tahun 2013, tingkat pertumbuhan penduduk sebesar 4 persen per tahun. Hitunglah jumlah penduduk di Jawa Timur pada tahun 2030. Jika mulai tahun 2030 pertumbuhannya menurun menjadi 3 persen per tahun, berapakah jumlah penduduk 10 tahun kemudian?
9. Misal Penduduk di Propinsi Papua Barat tercatat 5 juta jiwa pada tahun 2012 dan diperkirakan menjadi 6 juta jiwa pada tahun 2016. Jika tahun 2010 dianggap merupakan tahun basis. a) berapa persen tingkat pertumbuhannya? b) berapa jumlah penduduknya pada tahun 2010? c) berapa pula jumlah pada tahun 2021? Pada tahun berapa penduduknya berjumlah 10 juta jiwa?
10. Misalkan penduduk suatu Negara "XYZ" tercatat 200 juta jiwa pada tahun 2010, tingkat pertumbuhan pendudukan adalah 2 persen per tahun. Hitunglah jumlah penduduk di Negara tersebut pada 10 tahun yang akan datang?