BAB 2
SISTEM BILANGAN

A. Konsep Bilangan

Dalam matematika bilangan-bilangan yang ada dapat digolongkan menjadi bilangan nyata dan bilangan khayal. Kemudian dari bilangan nyata dapat dibagi lagi menjadi bilangan irrasional dan bilangan rasional. Selanjutnya bilangan rasional dibagi menjadi bilangan bulat dan bilangan pecahan.

Bilangan nyata dapat positif maupun negatif. Bilangan khayal adalah bilangan yang berupa akar pangkat genap dari suatu bilangan negatif. Perbedaan antara kedua jenis bilangan ini adalah bahwa bilangan nyata mengandung salah satu sifat secara tegas yaitu: atau positif atau negatif, dan tidak kedua-duanya. Sedangkan bilangan khayal tidak jelas sifatnya, apakah positif ataukah negatif. Bilangan khayal yang mengandung kedua sifat positif dan negatif sekaligus, disebut bilangan kompleks.

Contoh bilangan nyata : 2; -2; 1,1; -1,1

Contoh bilangan khayal : $\sqrt{(-16)} \stackrel{?}{=} \pm 4$; $\sqrt[4]{(-1{,}4641} \stackrel{?}{=} \pm 1{,}1$

Pada dasarnya setiap bilangan, positif maupun negatif, jika berpangkat genap akan selalu menghasilkan bilangan positif. Dengan demikian sukar sekali dibayangkan bagaimana hasil akhir dari suatu bilangan negatif yang berada di bawah tanda akar berpangkat genap. Oleh karenanya bilangan seperti itu dinamakan bilangan khayal.

Bilangan rasional adalah hasilbagi antara dua bilangan, yang berupa bilangan bulat; atau berupa pecahan dengan desimal terbatas, atau desimal berulang. Sedangkan bilangan irasional adalah hasil bagi antara dua bilangan berupa pecahan dengan desimal tak terbatas dan tak berulang, termasuk bilangan π dan bilangan e. Bilangan bulat adalah hasilbagi antara dua bilangan yang hasilnya bulat, termasuk 0 (nol). Bilangan pecahan adalah hasilbagi antara dua bilangan yang hasilnya pecahan dengan desimal terbatas atau desimal berulang.

Berdasarkan pembatasan di atas, maka yang membedakan apakah sesuatu bilangan tergolong bilangan rasional ataukah bilangan irasional ialah faktor keterbatasan dan keberulangan desimalnya.

0,1372525	tergolong bilangan rasional
0,137252525799888......	tergolong bilangan irrasional
0,137252526	tergolong bilangan rasional

Dengan menggunakan pendekatan teori himpunan, pernyataan-pernyataan di bawah ini akan memperjelas penggolong-golongan bilangan tersebut (Dumairy, 2007: 14 – 15):

- Semua bilangan bulat adalah bilangan rasional, tapi tidak semua bilangan rasional berupa bilangan bulat.
- Semua bilangan pecahan adalah bilangan rasional, tapi tidak semua bilangan rasional berupa bilangan pecahan.
- Semua bilangan irrasional adalah bilangan berdesimal, tapi tidak semua bilangan berdesimal adalah bilangan irrasional.

Selain jenis-jenis bilangan di atas, terdapat tidak lagi jenis bilangan yang menyangkut bilangan bulat positif. Mereka adalah bilangan asli, bilangan cacah, dan bilangan prima.

Bilangan asli adalah semua bilangan bulat positif, tidak termasuk nol. Seandainya himpunan bilangan asli kita lambangkan dengan notasi A, maka:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

Bilangan cacah ialah semua bilangan bulat positif atau nol. Jika himpunan bilangan cacah dilambangkan dengan notasi C, maka:

$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

Bilangan prima ialah bilangan asli yang besarnya tidak sama dengan satu dan hanya “habis” (maksudnya bulat) dibagi oleh dirinya sendiri. Jika himpunan bilangan prima dilambangkan dengan notasi P, maka:

$P = \{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$

Selanjutnya akan dibahas bagaimana bilangan-bilangan nyata saling berhubungan satu sama lain secara relatif. Dalam hal ini kita akan bekerja dengan empat macam ketidaksamaan. Tanda-tanda ketidaksamaan yang dimaksud adalah:

Tanda $<$ melambangkan “lebih kecil dari”

Tanda $>$ melambangkan “lebih besar dari”

Tanda $\leq$ melambangkan “lebih kecil dari atau sama dengan”

Tanda $\geq$ melambangkan “lebih besar dari atau sama dengan”

Bilangan-bilangan nyata mempunyai sifat-sifat hubungan perbandingan sebagai berikut:

1. Jika $a \leq b$, maka $-a \geq -b$
   Sedangkan jika $a \geq b$, maka $-a \leq -b$
2. Jika $a \leq b$ dan $x \geq 0$, maka $x.a \leq x.b$
   Sedangkan jika $a \geq b$ dan $x \geq 0$, maka $x.a \geq x.b$
3. Jika $a \leq b$ dan $x \leq 0$, maka $x.a \geq x.b$
   Sedangkan jika $a \geq b$ dan $x \leq 0$, maka $x.a \leq x.b$
4. Jika $a \leq b$ dan $c \leq d$, maka $a + c \leq b + d$
   Sedangkan jika $a \geq b$ dan $c \geq d$, maka $a + c \geq b + d$

Contoh dari hubungan perbandingan bilangan-bilangan di atas ialah:

Untuk sifat ke-1:

Andaikan $a = 2$ dan $b = 4$ $a < b$, dan $-a > -b$, sebab -2 > -4. Sedangkan jika $a = 7$ dan $b = 5$ $a > b$, dan $-a < -b$, sebab -7 < -5

Untuk sifat ke-2:

Andaikan nilai $a = 2$ dan nilai $b = 4$ serta $x = 3$, maka $x.a < x.b$, sebab 2.3 = 6 < 4.3 = 12. Sedangkan jika $a = 7$; $b = 5$ dan $x = 3$, maka $x.a > x.b$, sebab 7.3 = 21 > 5.3 = 15

Untuk sifat ke-3:

Andaikan nilai $a = 2, dan\ nilai\ b = 4$, dan nilai $x = -3$, maka $x.a > x.b$, sebab 2.-3 = -6 > 4.-3 = -12. Sedangkan jika $a = 7$; $b = 5$ dan $x = -3$, maka $x.a < x.b$, sebab 7.-3 = -21 < 5.-3 = -15

Untuk sifat ke-4:

Jika nilai $a = 2; nilai\ b = 4$ dan $c = 3$; $d = 5$, maka $a + c < b + d$, sebab 2+3 = 5 < 4 + 5 = 9. Jika nilai $a = 4$; $b = 2$ dan $c = 5$; d=3, maka $a + c > b + d$, sebab 4 + 5 = 9 > 2 + 3 = 5

B. Operasi Bilangan

Bilangan-bilangan nyata memenuhi kaidah-kaidah tertentu apabila mereka dioperasikan. Operasi penjumlahan dan perkalian bilangan akan memenuhi kaidah-kaidah berikut:

1. Kaidah komutatif

   Dalam menjumlahkan dua bilangan, perubahan urutan antara keduanya tidak akan mengubah hasil penjumlahan.

   $$\boxed{a + b = b + a}$$

   Contoh:

   - 4 + 7 = 7 + 4
   - 10 + 2 = 2 + 10
   - 5 + 3 = 3 + 5
   - 12 + 15 = 15 + 12
   - 2 + 3 = 3 + 2

   Hal yang sama berlaku juga untuk perkalian, perubahan urutan perkalian antara dua bilangan tidak akan mengubah hasilnya.

   $$\boxed{a \times b = b \times a}$$

   Contoh:

   - 4 x 7 = 7 x 4
   - 3 x 2 = 2 x 3
   - 5 x 3 = 3 x 5
   - 7 x 4 = 4 x 7
   - 6 x 5 = 5 x 6

2. Kaidah asosiatif

   Dalam menjumlahkan tiga bilangan –atau lebih- perubahan cara pengelompokkan bilangan-bilangan tersebut tidak akan mengubah hasil penjumlahan

   $$\boxed{(a + b) + c = a + (b + c)}$$

   Contoh:

   - (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)
   - (4 + 5) + 10 = 4 + (5 + 10)
   - (12 + 4) + 8 = 12 + (4 + 8)
   - (3 + 5) + 8 = 3 + (5 + 8)

Begitu pula dalam hal, perkalian, perubahan cara pengelompokkan bilangan-bilangan tidak akan mengubah hasil perkalian.

$$\boxed{(a \times b) \times c = a \times (b \times c)}$$

Contoh:

- (2 x 3) x 4 = 2 x (3 x 4)
- (3 x 5) x 7 = 3 x (5 x 7)
- (4 x 6) x 10 = 4 x (6 x 10)
- (5 x 8) x 12 = 5 x (8 x 12)

3. Kaidah pembatalan

Jika jumlah a dan c sama dengan jumlah b dan c, maka a sama dengan b.

Jika $a + c = b + c$
Maka $a = b$

Contoh: Jika $a = 5$, $b = 5$, dan $c = 3$. Maka 5 + 3 = 5 + 3, sehingga 5 = 5, atau dengan kata lain $a = b$

Jika hasilkali a dan c sama dengan hasilkali b dan c, dimana c adalah bilangan nyata bukan nol, maka a sama dengan b

Jika $a.c = b.c$ $(c \neq 0)$
Maka $a = b$

Contoh: jika $a = 7$, $b = 7$, dan $c = 2$, maka 7 x 2 = 7 x 2, sehingga 7 = 7, atau dengan kata lain $a = b$.

4. Kaidah distributif

Dalam pengalian bilangan a terhadap jumlah $(b + c)$, hasilkalinya adalah sama dengan jumlah hasilkali $a.b$ dan hasilkali $a.c$. atau dengan kata lain hasilkali sebuah bilangan terhadap suatu penjumlahan adalah sama dengan jumlah hasilkali-nya.

$$\boxed{a\,(b + c) = a.b + a.c}$$

Contoh:

- 3 (4 + 5) = (3 x 4) + (3 x 5)
- 2 (5 + 10) = (2 x 5) + (2 x 10)
- 5 (10 + 15) = (5 x 10) + (5 x 15)

5. Unsur penyama

Unsur penyama dalam penjumlahan (atau pengurangan) adalah bilangan nol, sebab jumlah (selisih) antara suatu bilangan tertentu dan 0 adalah bilangan itu sendiri.

$$\boxed{a \pm 0 = a}$$

Contoh:

- $4 \pm 0 = 4$
- $15 \pm 0 = 15$

6. Kebalikan

Setiap bilangan nyata mempunyai sebuah balikan penambah (*additive inverse*); jumlah antara bilangan tertentu dan balikan penambahnya adalah sama dengan nol.

$$\boxed{a + (-a) = 0}$$

Contoh:

- 3 + (-3) = 0. Bilangan -3 disebut balikan penambah dari 3 atau negatif dari 3.
- 10 + (-10) = 0, Bilangan -10 adalah balikan penambah dari 10 atau negatif dari 10.

Setiap bilangan nyata bukan nol mempunyai sebuah balikan pengali (*multiplicative inverse*); hasilkali bilangan tertentu terhadap balikan pengalinya adalah sama dengan satu.

$$\boxed{a \times \frac{1}{a} = 1}$$

Contoh:

- $3 \times \frac{1}{3} = 1$, Bilangan $\frac{1}{3}$ disebut balikan pengali dari 3
- $7 \times \frac{1}{7} = 1$, Bilangan $\frac{1}{7}$ disebut balikan pengali dari 7
- $10 \times \frac{1}{10} = 1$, Bilangan $\frac{1}{10}$ disebut balikan pengali dari 10

C. Operasi Tanda

Apabila dalam membahas pengoperasian bilangan baru membahas mengenai bilangan-bilangan dengan satu macam tanda, yaitu positif. Maka selanjutnya akan dibahas pengoperasian terkait dengan tanda-tanda yang melekat padanya.

1. Operasi penjumlahan

a. Jumlah dari dua bilangan positif adalah sebuah bilangan positif baru yang nilainya lebih besar.

$$\boxed{(+\,a) + (+\,b) = (+c)}$$

Contoh:

- (+ 3) + (+ 4) = (+ 7)
- (+ 5) + (+ 12) = (+ 17)
- (+ 10) + (+ 15) = (+ 25)
- (+ 15) + (+ 25) = (+ 40)
- (+ 60) + (+ 40) = (+ 100)

b. Jumlah dari dua bilangan negatif adalah sebuah bilangan negatif baru yang nilainya lebih kecil.

$$\boxed{(-\,a) + (-\,b) = (-c)}$$

Contoh:

- (-3) + (- 4) = (- 7)
- (-5) + (-7) = (- 12)
- (-10) + (- 15) = (- 25)
- (-20) + (-25) = (- 45)
- (- 37) + (- 13) = (- 50)

c. Jumlah dari bilangan positif dan bilangan negatif adalah bilangan positif jika harga mutlak bilangan pertama lebih besar dari harga mutlak bilangan kedua, atau bilangan negatif jika harga mutlak bilangan pertama lebih kecil dari harga mutlak bilangan kedua.

$$\boxed{(+\,a) + (-\,b) = (+c) \text{ jika } |a| > |b|}$$

Contoh:

- (+ 5) + (-3) = (+2)
- (+10) + (- 4) = (+ 6)
- (+ 20) + (- 11) = (+ 9)

atau

$$\boxed{(+a) + (-b) = (-d) \text{ jika } |a| < |b|}$$

contoh:

- (+3) + (- 7) = (- 4)
- (+ 5) + (- 15) = (- 10)
- (+ 7) + (- 12) = (- 5)
- (+20) + (- 28) = (- 8)
- (+ 35) + (-50) = (- 15)

d. Jumlah dari bilangan negatif dan bilangan positif adalah bilangan positif apabila harga mutlak dari bilangan pertama lebih kecil dari harga mutlak bilangan kedua atau bilangan negatif apabila harga mutlak bilangan pertama lebih besar dari harga mutlak bilangan kedua.

$$\boxed{(-a) + (+b) = (+c) \text{ jika } |a| < |b|}$$

Contoh:

- (- 3) + (+7) = (+4)
- (- 2) + (+ 10) = (+ 8)
- (- 5) + (+ 20) = (+ 15)
- (-20) + (+ 45) = (+ 25)
- (- 25) + (+75) = (+ 50)

atau

$$\boxed{(-a) + (+b) = (-d) \text{ jika } |a| > |b|}$$

Contoh:

- (-8) + (+3) = (-5)
- (- 12) + (+ 5) = (- 7)
- (- 20) + (+ 7) = (- 13)
- (-30) + (+ 10) = (- 20)
- (-50) + (+15) = (-35)

2. Operasi pengurangan

a. Selisih antara dua bilangan positif adalah bilangan positif, jika harga mutlak bilangan pertama lebih besar daripada harga mutlak dari bilangan kedua, dan negatif jika harga mutlak bilangan pertama lebih kecil dari harga mutlak bilangan kedua.

$$(+a) - (+b) = (+c) \text{ jika } |a| > |b|$$

Contoh:

- (+8) – (+2) = (+6)
- (+ 15) – (+5) = (+10)
- (+30) – (+21) = (+9)
- (+50) – (+43) = (+7)
- (+100) – (+78) = (+22)

atau

$$(+a) - (+b) = (-d) \text{ jika } |a| < |b|$$

contoh:

- (+4) – (+9) = (-5)
- (+ 10) – (+ 17) = (-7)
- (+15) – (+ 28) = (- 13)
- (+20) – (+45) = (-25)

b. Selisih antara dua bilangan negatif adalah bilangan positif jika harga mutlak bilangan pertama lebih kecil dari harga mutlak bilangan kedua, atau akan menjadi bilangan negatif apabila harga mutlak bilangan pertama lebih besar daripada harga mutlak bilangan kedua.

$$(-a) - (-b) = (+c) \text{ jika } |a| < |b|$$

Contoh:

- (-2) – (-7) = (+5)
- (-10) – (-23) = (+ 13)
- (- 21) – (-30) = (+9)
- (-30) – (-50) = (+20)

atau

$$(-a) - (-b) = (-d) \text{ jika } |a| > |b|$$

Contoh:

- (-6) – (-2) = (-4)
- (-15) – (-7) = (-8)
- (-30) – (-21) = (-9)
- (-50) – (-30) = (-20)

c. Selisih antara bilangan positif dan bilangan negatif adalah sebuah bilangan positif baru.

$$\boxed{(+\,a) - (-\,b) = (+c)}$$

Contoh:

- (+3) – (-6) = (+9)
- (+5) – (- 10) = (+15)
- (+10) – (-21) = (+31)
- (+20) – (- 30) = (+ 50)

d. Selisih antara bilangan negatif dan bilangan positif adalah sebuah bilangan negatif baru.

$$\boxed{(-\,a) - (+\,b) = (-c)}$$

Contoh:

- (-4) – (+2) = (- 6)
- (-10) – (+8) = (- 18)
- (-20) – (+5) = (- 25)
- (-30) – (+10) = (- 40)

3. Operasi perkalian

a. Hasilkali antara dua bilangan positif, serta antara dua bilangan negatif adalah sebuah bilangan positif.

$$\boxed{(+\,a) \times (+\,b) = (+c)}$$

Contoh:

- (+2) x (+3) = (+6)
- (+4) x (+5) = (+20)
- (+10) x (+4) = (+40)
- (+15) x (+3) = (+45)

$$\boxed{(-\,a) \times (-\,b) = (+c)}$$

Contoh:

- (-4) x (-2) = (+8)
- (-5) x (-3) = (+15)
- (-10) x (-4) = (+40)
- (-20) x (-3) = (+ 60)

b. Hasilkali antara dua bilangan yang berlainan tanda adalah sebuah bilangan negatif.

$$\boxed{(+\,a) \times (-\,b) = (-c)}$$

Contoh:

- (+3) x (-2) = (-6)
- (+4) x (-3) = (-12)
- (+10) x (- 5) = (-50)
- (+ 12) x (-3) = (-36)

$$\boxed{(-\,a) \times (+\,b) = (-c)}$$

Contoh:

- (-4) x (+2) = (-8)
- (-6) x (+4) = (- 24)
- (-10) x (+3) = (-30)
- (-12) x (+ 2) = (-24)

4. Operasi pembagian

a. Hasilbagi antara dua bilangan positif, serta antara dua bilangan negatif adalah sebuah bilangan positif.

$$\boxed{(+\,a) : (+\,b) = (+c)}$$

Contoh:

- (+8) : (+2) = (+4)
- (+10) : (+2) = (+5)
- (+35) : (+5) = (+7)
- (+50) : (+10) = (+5)
- (+100) : (+5) = (+20)

$$\boxed{(-\,a) : (-\,b) = (+c)}$$

Contoh:

- (-4) : (-2) = (+2)
- (-20) : (-5) = (+4)
- (-30) : (-3) = (+10)
- (-100) : (-10) = (+10)

b. Hasilbagi antara dua bilangan yang berlainan tanda adalah sebuah bilangan negatif.

$$\boxed{(+\,a):(-\,b) = (-c)}$$

Contoh:

- (+6) : (-2) = (-3);
- (+12) : (-3) = (-4)
- (+24) : (-4) = (-6)
- (+36) : (-3) = (-12)
- (+50) : (-5) = (-10)

$$\boxed{(-\,a):(+\,b) = (-c)}$$

Contoh:

- (-8) : (+2) = (-4)
- (-10) : (+4) = (-2,5)
- (-20) : (+5) = (-4)
- (-30) : (+10) = (-3)
- (-49) : (+7) = (-7)

D. Operasi Bilangan Pecahan

Bilangan pecahan ialah bilangan rasional yang benar, tidak bulat atau tidak utuh. Berdasarkan cara penulisannya, bilangan pecahan bisa dibedakan atas pecahan biasa dan pecahan desimal. Pecahan biasa selalu menunjukkan bentuk pembagian antara dua bilangan, contoh $\frac{1}{4}, \frac{3}{6}$, dll. Setiap pecahan biasa pada dasarnya dapat diubah bentuk menjadi pecahan desimal, yakni dengan cara mengisikan atau mencantumkan angka-angka tertentu yang memenuhi di belakang tanda koma. Jadi pecahan ¼ bisa dituliskan menjadi 0,25, sedangkan pecahan $\frac{3}{6}$ bisa dituliskan menjadi 0,5.

Dalam suatu pecahan biasa terdapat dua macam suku, yaitu suku terbagi (*numerator*) dan suku pembagi (*denominator*). Suku terbagi terletak di atas garis bagi, sedangkan suku pembagi terletak di bawahnya. Dalam contoh di atas, angka 1 dan 3 masing-masing adalah suku terbagi, sedangkan angka 4 dan 6 masing-masing adalah suku pembagi.

Berdasarkan nilai-nilai dari suku-suku pecahan biasa dibedakan menjadi tiga macam yaitu *pecahan layak*, *pecahan tak layak*, dan *pecahan kompleks*. Pecahan layak ialah pecahan yang mutlak suku terbaginya lebih kecil dari harga mutlak suku pembaginya. Apabila pecahan layak ini didesimalkan, angka di depan tanda koma akan selalu berupa angka nol. Sedangkan pecahan tak layak ialah pecahan yang harga mutlak suku terbaginya sama dengan atau lebih besar dari harga mutlak suku pembaginya. Jika didesimalkan, angka di depan tanda koma angka berupa angka bukan nol. Adapun pecahan kompleks ialah pecahan yang pada salah satu atau kedua-duanya terdapat satu pecahan atau lebih. Jadi jika pada suku terbagi (atau pada suku pembagi, atau bahkan pada kedua suku tersebut) masih terdapat lagi satu atau beberapa pecahan, maka pecahan demikian dinamakan dengan pecahan kompleks. (Dumairy, 2007: 22)

Contoh pecahan layak: ½ , ¼ , ¾

Contoh pecahan tak layak: $^5/_2$, $^7/_4$

Contoh pecahan kompleks: $\frac{1}{\frac{3}{5}}$, $\frac{^2/_4}{^1/_3}$

Selanjutnya akan dibahas mengenai prinsip-prinsip pengoperasiannya, dalam hal ini pengoperasian pecahan biasa.

1. Operasi pemadanan

Suku-suku dalam suatu pecahan dapat diperbesar atau diperkecil dengan mengubah nilai pecahannya, sepanjang keduanya (suku terbagi dan suku pembagi) dikalikan atau dibagi dengan bilangan yang sama.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}} \qquad \boxed{\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}}$$

Contoh memperbesar pecahan:

$\frac{2}{3} = \frac{2\times3}{3\times3} = \frac{6}{9}$; $\frac{6}{9} = \frac{6\times5}{9\times5} = \frac{30}{45}$; $\frac{30}{45} = \frac{30\times c}{45 \times c}$; dst

Pecahan-pecahan $\frac{2}{3}, \frac{6}{9}, \frac{30}{45}, \frac{30c}{45c}$ adalah sepadan

Contoh memperkecil pecahan:

$\frac{24}{30} = \frac{24:2}{30:2} = \frac{12}{15}$; $\frac{12:3}{15:3} = \frac{4}{5}$

Pecahan-pecahan $\frac{24}{30}, \frac{12}{15}, \frac{4}{5}$ adalah sepadan.

Berdasarkan kedua contoh di atas, dapat disimpulkan: pembesaran pecahan bersifat tak terbatas, sedangkan pengecilan pecahan bersifat terbatas. Kita dapat memperbesar pecahan sekehendak kita, tetapi kita hanya dapat memperkecil sebuah pecahan sampai pada bentuk tersederhana, atau sampai pada suku-suku terkecil, yakni jika kedua suku tidak memiliki pembagi bersama lagi.

2. Operasi penjumlahan dan pengurangan

Dua buah pecahan atau lebih hanya dapat ditambahkan dan dikurangi apabila mereka memiliki suku-suku pembagi yang sama atau sejenis. Berarti jika suku-suku pembaginya belum sama, terlebih dahulu harus disamakan sebelum pecahan-pecahan tersebut ditambahkan atau dikurangkan. Dalam menyamakan suku-suku pembaginya, diusahakan pecahan-pecahan tersebut memiliki suku pembagi bersama terkecil (spbt). (Dumairy, 2007: 24)

Contoh:

- $\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{10}{4}$
- $\frac{7}{4} - \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$
- $\frac{10}{3} - \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$
- $\frac{12}{5} - \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = 2$

Dalam hal pecahan-pecahan yang hendak dijumlahkan atau dikurangi tidak memiliki suku pembagi bersama terkecil, maka yang dilakukan adalah mengalikan suku pembaginya. Namun penjumlahan (atau pengurangan) bilangan-bilangan campuran dapat dilakukan dengan cara menambahkan (atau mengurangkan) bilangan-bilangan bulatnya dulu, kemudian menambahkan (mengurangkan) pecahan dengan pecahannya. Jadi tidak harus dengan mengubah bilangan-bilangan campuran tersebut menjadi pecahan tak layak terlebih dahulu.

Contoh:

- $\frac{5}{a} + \frac{2}{b} = \frac{5b}{ab} + \frac{2a}{ab} = \frac{5b+2a}{ab}$
- $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3\times3}{4\times3} + \frac{2\times4}{4\times3} = \frac{9+8}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$
- $2\frac{5}{8} + 3\frac{2}{8} = (2+3) + \left(\frac{5}{8} + \frac{2}{8}\right) = 5 + \frac{7}{8} = 5\frac{7}{8}$

  Atau

  $2\frac{5}{8} + 3\frac{2}{8} = \frac{21}{8} + \frac{26}{8} = \frac{47}{8} = 5\frac{7}{8}$

3. Operasi perkalian

Perkalian antarpecahan dilakukan dengan cara mengalikan suku-suku sejenis, suku terbagi dikalikan suku terbagi dan suku pembagi dikalikan suku pembagi. Perkalian yang mengandung bilangan campuran dilakukan dengan cara mengubahnya terlebih dahulu menjadi pecahan tak layak sebelum dikalikan.

Contoh:

- $\frac{a}{x} \times \frac{b}{y} = \frac{ab}{xy}$
- $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$
- $5\frac{3}{4} \times 6\frac{1}{2} = \frac{23}{4} \times \frac{13}{2} = \frac{299}{8} = 37\frac{3}{8}$

4. Operasi pembagian

Pembagian antar pecahan dapat dilakukan dengan tiga macam cara, yaitu: Cara pertama. Kalikan pecahan terbagi (pecahan yang akan dibagi) dengan kebalikan dari pecahan pembagi.

Contoh: $\frac{7}{8} : \frac{3}{4} = \frac{7}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{28}{24} = 1\frac{1}{6}$ atau $\frac{7}{8} : \frac{3}{4} = \frac{7}{\cancel{8}_2} \times \frac{\cancel{4}^1}{3} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$

Cara kedua. Ubah terlebih dahulu pecahan terbagi dan pecahan pembagi sehingga keduanya memiliki suku pembagi bersama terkecil, kemudian batalkan suku pembagi bersama terkecil tersebut dan bagilah suku-suku terbagi yang tersisa.

Contoh: $\frac{7}{8} : \frac{3}{4} = \frac{7}{8} : \frac{6}{8} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$

Cara ketiga. Kalikan terlebih dahulu dengan suku pembagi bersama terkecil, selesaikan atau sederhanakan masing-masing pecahan dan kemudian dibagi.

Contoh: $\frac{7}{8} : \frac{3}{4} = \left(\frac{7}{\cancel{8}} \times \cancel{8}\right) : \left(\frac{3}{\cancel{4}} \times \cancel{8}^2\right) = 7 : 6 = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$

E. Pangkat

Pangkat dari suatu bilangan ialah suatu indeks yang menunjukkan banyaknya perkalian bilangan yang sama secara beruntun (Dumairy, 2007: 29). Notasi x^n menunjukkan bahwa x harus dikalikan dengan x itu sendiri secara berturut-turut sebanyak n kali. Notasi pemangkatan sangat berfaedah untuk merumuskan penulisan bentuk perkalian secara ringkas.

Misalkan: $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$; atau;

$0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}4^5$

Notasi pemangkatan berfaedah pula untuk meringkas bilangan-bilangan kelipatan perkalian-sepuluh yang nilainya sangat besar atau sangat kecil. Misalkan bilangan 1.000.000 dapat diringkat menjadi 10^6; bilangan 1/100.000 atau 0,00001 dapat diringkat menjadi 10^{-5}.

Pemangkatan suatu bilangan dan pengoperasian bilangan-bilangan berpangkat mematuhi kaidah-kaidah tertentu. Berikut akan dijelaskan beberapa kaidah-kaidah dan pemangkatan bilangan.

1. Kaidah pemangkatan bilangan

a. Bilangan bukan nol berpangkat nol adalah satu.

$x^0 = 1 \; (x \neq 0)$

Contoh: $4^0 = 1$

b. Bilangan berpangkat satu adalah bilangan itu sendiri.

$x^1 = x$

Contoh: $5^1 = 5$

c. Nol berpangkat suatu bilangan adalah tetap nol.

$0^x = 0$

Contoh: $0^7 = 0$

d. Bilangan berpangkat negatif adalah balikan pengali dari bilangan itu sendiri.

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Contoh: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 8^{-1}$

e. Bilangan berpangkat pecahan adalah akar dari bilangan itu sendiri dengan suku pembagi dalam pecahan menjadi pangkat dari akarnya, sedangkan suku terbagi menjadi pangkat dari bilangan yang bersangkutan.

$x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$

Contoh: $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9} = 1{,}55$

f. Bilangan pecahan berpangkat adalah hasilbagi suku-suku berpangkatnya.

$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$

Contoh: $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$

g. Bilangan berpangkat dipangkatkan lagi adalah bilangan berpangkat hasilkali pangkat-pangkatnya.

$(x^a)^b = x^{ab}$

Contoh: $(3^2)^4 = 3^{2.4} = 3^8 = 6561$

h. Bilangan dipangkatkan pangkat-berpangkat adalah bilangan berpangkat hasil pemangkatan pangkatnya.

$x^{a^b} = x^c$ dimana $c = a^b$

Contoh: $3^{2^4} = 3^{16} = 43.046.721$

Kaidah ke-7 dan ke-8 di atas perlu mendapat perhatian khusus, sebab acapkali diselesaikan secara tidak benar. Jika dikerjakan dengan kurang teliti, maka contoh-contoh dalam kaidah ke-7 dan ke-8 tersebut bisa salah diselesaikan menjadi 9^4 (=1296), padahal seharusnya adalah 3^8 dan 3^{16}. Prinsip penyelesaian bilangan yang pangkatnya beranting ialah menyelesaikan pangkat-pangkatnya terlebih dahulu.

2. Kaidah perkalian bilangan berpangkat

a. Hasilkali bilangan-bilangan berpangkat yang basisnya sama adalah bilangan basis berpangkat jumlah pangkat-pangkatnya.

$x^a . x^b = x^{a+b}$

Contoh: $4^2 . 4^3 = 4^{2+3} = 4^5 = 1024$

b. Hasilkali bilangan-bilangan berpangkat yang pangkatnya sama, tetapi basisnya berbeda, adalah perkalian basis-basisnya dalam pangkat yang bersangkutan

$x^a . y^a = (xy)^a$

Contoh: $4^2 . 6^2 = (4.6)^2 = 24^2 = 576$

3. Kaidah pembagian bilangan berpangkat

a. Hasilbagi bilangan-bilangan berpangkat yang basisnya sama adalah bilangan basis berpangkat selisih pangkat-pangkatnya.

$x^a : x^b = x^{a-b}$

Contoh: $4^3 : 4^2 = 4^{3-2} = 4^1 = 4$

b. Hasilbagi bilangan-bilangan berpangkat yang pangkatnya sama, tetapi basisnya berbeda, adalah pembagian basis-basisnya dalam pangkat yang bersangkutan.

$x^a : y^a = \left(\frac{x}{y}\right)^a$

Contoh: $5^2 : 4^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$

F. Akar

Akar merupakan bentuk lain untuk menyatakan bilangan berpangkat. Akar dari suatu bilangan ialah basis yang memenuhi bilangan tersebut berkenaan dengan pangkat akarnya (Dumairy, 2007: 32). Berdasarkan konsep pemangkatan dapat diketahui, bahwa jika bilangan-bilangan yang sama (misalkan x) dikalikan sejumlah tertentu sebanyak (katakanlah) *n* kali, maka kita dapat menuliskannnya menjadi x^n; *x* disebut sebagai *basis* dan *n* disebut pangkat. Misalkan $x^n = y$, maka *x* dapat juga disebut sebagai akar pangkat *n* dari *y*, yang jika dituliskan dalam bentuk akar menjadi $\boldsymbol{x = \sqrt[n]{y}}$.

Misalkan: $\sqrt[2]{9} = 3$ sebab $3^2 = 9$; $\sqrt[3]{64} = 4$ sebab $4^3 = 64$

Sebagaimana halnya dengan bilangan-bilangan yang lain, pengakaran bilangan pun harus mematuhi sejumlah kaidah-kaidah berikut:

1. Kaidah pengakaran bilangan

a. Akar dari sebuah bilangan adalah basis yang memenuhi bilangan tersebut berkenaan dengan pangkat akarnya

Berdasarkan $\sqrt[n]{y} = x$ jika $x^n = m$ (*x* adalah basis)

Maka: $\sqrt[b]{x} = x^{\frac{1}{b}}$

Contoh: $\sqrt[3]{64} = 64^{\frac{1}{3}} = 4$

b. Akar dari suatu bilangan berpangkat adalah bilangan itu sendiri berpangkat pecahan, dengan pangkat dari bilangan bersangkutan menjadi suku terbagi sedangkan pangkat dari akar menjadi suku pembagi.

$\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$

Contoh: $\sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{2}{5}} = 1,55$

c. Akar dari suatu perkalian bilangan adalah perkalian dari akar-akarnya.

$\sqrt[b]{xy} = \sqrt[b]{x}.\sqrt[b]{y}$

Contoh: $\sqrt[3]{8 \times 64} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{64} = 2 \times 4 = 8$

d. Akar dari suatu bilangan pecahan adalah pembagian dari akar suku-sukunya

$\sqrt[b]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[b]{x}}{\sqrt[b]{y}}$

Contoh: $\sqrt[3]{\frac{8}{64}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{2}{4} = 0{,}5$

2. Kaidah penjumlahan (pengurangan) bilangan terakar

Bilangan-bilangan terakar hanya dapat ditambahkan atau dikurangi apabila akar-akarnya sejenis. Yang dimaksud dengan akar-akar yang sejenis ialah akar-akar yang pangkat dan radikannya sama.

Jumlah (selisih) bilangan-bilangan terakar adalah jumlah (selisih) koefisien-koefisiennya terakar.

$m\sqrt[b]{x^a} \pm n\sqrt[b]{x^a} = (m \pm n)\sqrt[b]{x^a}$

Contoh: $5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3} = 7(1{,}73) = 12{,}11$

3. Kaidah perkalian bilangan terakar

a. Hasilkali bilangan-bilangan terakar adalah akar dari hasilkali bilangan-bilangannya. Perkalian hanya dapat dilakukan apabila akar-akarnya berpangkat sama.

$\sqrt[b]{x}.\sqrt[b]{y} = \sqrt[b]{x.y}$

Contoh: $\sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{8.64} = \sqrt[3]{512} = 8$

b. Akar ganda dari suatu bilangan adalah akar pangkat baru dari bilangan bersangkutan; pangkat baru akarnya ialah hasilkali pangkat dari akar-akar sebelumnya.

$\sqrt[b]{\sqrt[c]{x^n}} = \sqrt[b.c]{x^n}$

Contoh:

$\sqrt[2]{\sqrt[3]{15.625}} = \sqrt[2.3]{15.625} = 5$

4. **Kaidah pembagian bilangan terakar**

   Hasilbagi bilangan-bilangan terakar adalah akar dari hasilbagi bilangan-bilangannya. Pembagiannya hanya dapat dilakukan apabila akar-akarnya berpangkat sama.

   $$\frac{\sqrt[b]{x}}{\sqrt[b]{y}} = \sqrt[b]{\frac{x}{y}}$$

   Contoh:

   $$\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{\frac{8}{64}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 0{,}5$$

G. Logaritma

Logaritma pada hakikatnya merupakan kebalikan dari proses pemangkatan dan/atau pengakaran. Logaritma dapat dipakai untuk menyederhanakan operasi-operasi perkalian, pembagian, pencarian pangkat dan penarikan akar. Logaritma dari suatu bilangan ialah pangkat yang harus dikenakan pada (memenuhi) bilangan pokok logaritma untuk memperoleh bilangan tersebut. (Dumairy, 2007: 36). Misalkan suatu bilangan berpangkat (x^n) sama dengan bilangan tertentu (*m*), maka dalam bentuk pemangkatan kita dapat menuliskan menjadi:

$$x^n = m$$

Dimana *x* adalah basis; dan; n adalah pangkat.

Pangkat n disebut juga logaritma dari *m* terhadap basis *x*, yang dituliskan dalam bentuk logaritma menjadi:

$n = {}^x\log m$ atau $n = \log_x m$

bilangan pokok (basis) logaritma, *x* dalam contoh tersebut, dapat dituliskan di pojok kiri atas dari tanda log (singkatan logaritma) atau dipokok kanan bawah dari tanda tersebut. Berdasarkan kesamaan bentuk pemangkatan logaritma sebagaimana ditunjukkan di atas, dapat pula menarik analogi pada pernyataan-pernyataan di bawah ini:

$5^2 = 25$; pangkat 2 adalah logaritma dari 25 terhadap basis 5, atau ${}^5\log 25 = 2$

$4^3 = 64$; pangkat 3 adalah logaritma dari 64 terhadap basis 4, atau ${}^4\log 64 = 3$

Selain dengan bentuk pemangkatan, bentuk logaritma juga berhubungan dengan bentuk pengakaran. Keeratan hubungan diantara ketiga macam bentuk ini dapat dilihat sebagai berikut:

Bentuk pangkat	Bentuk akar	Bentuk logaritma
$x^n = m$	$\sqrt[n]{m} = x$	${}^{x}\log m = n$

Logaritma dapat dihitung untuk basis berapapun, akan tetapi pada umumnya basis logaritma selalu berupa bilangan positif dan tidak sama dengan satu. Basis logaritma yang paling lazim digunakan, karena pertimbangan praktis dalam penghitungan adalah bilangan 10. Karena kelaziman tersebut, maka basis 10 ini pada umumhya tidak dicantumkan dalam notasi logaritma. Dengan demikian log *m* berarti adalah ${}^{10}\log m$.

Logaritma berbasis 10 disebut juga logaritma biasa (*common logarithm* atau logaritma Briggs –berdasarkan nama penemunya Henry Briggs). Di samping bilangan 10, basis lain yang juga lazim dipakai adalah bilangan *e* (*e* = 2,718287 atau sering diringkas menjadi 2,72). Logaritma berbasis *e* disebut juga dengan logaritma natural atau logaritma Napier (nama penemunya adalah John Napier). Jika notasi logaritma Briggs dilambangkan dengan log, maka logaritma natural dilambangkan dengan *ln*. Dengan demikian *ln m* berarti *log m*, $ln\ 24 \equiv {}^{e}\log 24$.

berikut akan dijelaskan kaidah-kaidah dalam logaritma

a. ${}^{x}\log x = 1$ sebab $x^1 = x$

contoh:

- ${}^{10}\log 10 = 1$;
- ${}^{7}\log 7 = 1$

b. ${}^{x}\log 1 = 0$ sebab $x^0 = 1$

contoh:

- ${}^{6}\log 1 = 0$;
- ${}^{5}\log 1 = 0$

c. ${}^{x}\log x^n = n$ sebab $x^n = x^n$

contoh:

- ${}^{7}\log 7^3 = 3$
- ${}^{5}\log 5^2 = 2$

d. ${}^{x}\log m^n = n\ {}^{x}\log m$

contoh:

- ${}^{10}\log 100^2 = 2\ {}^{10}\log 100 = 2\ {}^{10}\log 10^2 = 2.2 = 4$
- ${}^{8}\log 512^4 = 4\ {}^{8}\log 512 = 4\ {}^{8}\log 8^3 = 4.3 = 12$

e. $x\ {}^{x}log\ m = m$

contoh:

- $10\ {}^{10}\log 100 = 10\ {}^{10}\log 10^2 = 10^2 = 100$
- $8\ {}^{8}\log 512 = 8\ {}^{8}\log 8^3 = 8^3 = 512$

f. ${}^{x}log\ m.n = {}^{x}log\ m + {}^{x}log\ n$

contoh:

- ${}^{10}\log (100).(1000) = {}^{10}\log 100 + {}^{10}\log 1000 = 2 + 3 = 5$
- ${}^{3}\log (243).(27) = {}^{3}\log 243 + {}^{3}\log 27 = 5 + 3 = 8$

g. ${}^{x}\boldsymbol{log}\,\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}} = {}^{x}log\ m - {}^{x}log\ n$

contoh:

- ${}^{10}\log \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{1000}} = {}^{10}\ \log 100 - {}^{10}\log 1000 = 2 - 3 = -1$
- ${}^{3}\log \frac{\mathbf{243}}{\mathbf{27}} = {}^{3}\log 243 - {}^{3}\log 27 = 5 - 3 = 2$

h. ${}^{x}log\ m.\ {}^{m}log\ x = 1$ sehingga ${}^{x}log\ m = \frac{\mathbf{1}}{{}^{\boldsymbol{m}}\mathbf{log}\ \boldsymbol{x}}$

contoh:

- ${}^{10}\log 100.{}^{100}\log 10 = {}^{10}\log 10^2.\ {}^{100}\log 100^{0,5} = 2 \times 0,5 = 1$
- ${}^{3}\log 81.\ {}^{81}\log 3 = {}^{3}\log 3^4.\ {}^{81}\ \log 81^{0,25} = 4 \times 0,25 = 1$

i. ${}^{x}log\ m.\ {}^{m}log\ n.\ {}^{n}log\ x = 1$

contoh:

- ${}^{10}\log 100.{}^{100}\log 10000.{}^{10000}\log 10 =$
  ${}^{10}\log 10^2.\ {}^{100}\log 100^2.\ {}^{10000}\log 10000^{0,25} = 2 \times 2 \times 0,25 = 1$
- ${}^{3}\log 9.{}^{9}\log 729.\ {}^{729}\log 3 =$
  ${}^{3}\log 3^2.\ {}^{9}\log 9^3.\ {}^{729}\log 729^{1/6} = 2 \times 3 \times 1/6 = 1$

Latihan Soal:

1. Benarkah bahwa jika a > x > b, maka selalu x.a > x.b?
2. Manakah yang salah diantara pernyataan-pernyataan berikut ini?
   a. Bilangan positif berpangkat genap akan menghasilkan bilangan positif
   b. Bilangan negatif berpangkat genap menghasilkan bilangan positif
   c. Bilangan positif berpangkat ganjil menghasilkan bilangan negatif
   d. Bilangan negatif berpangkat ganjil menghasilkan bilangan negatif
3. Jumlahkan dari pasanga-pasangan pecahan berikut
   a) $\frac{3}{8} + \frac{4}{6}$
   b) $\frac{4}{6} + \frac{3}{12}$
   c) $\frac{4}{7} + \frac{7}{4}$
   d) $\frac{5}{6} + 4\frac{1}{3}$
4. Hitunglah selisih dari soal-soal nomor 3 di atas.
5. Hitunglah hasilkali dari soal-soal nomor 3 di atas
6. Hitunglah hasilbagi dari soal-soal nomor 3 di atas
7. Selesaikanlah soal berikut ini:
   (a) $7^4 . 7^3 . 7^{-2}$ (c) $7^4 : 7^3 . 7^{-2}$
   (b) $6^3 . 4^3 . (-5)^3$ (d) $6^3 : 4^3 : (-5)^3$
8. Ubahlah ke dalam bentuk logaritma
   (a) 6^4 (c) $5^4 . 5^2 : 5^{-2}$
   (b) $\sqrt[3]{64}$ (d) $3^{9/2} : \sqrt{243}$
9. Carilah *x* jika:
   (a) $\log x = 0{,}3010$ (c) $\log x^2 = 1{,}7482$
   (b) $\log x = 1{,}2304$ (d) $\log x^2 = 2{,}6021$
10. Hitunglah:
    (a) ${}^6\log 36$ (c) $\ln e$
    (b) ${}^8\log 512$ (d) $\ln 17$